Universidad del Atlántico
Vigilada Mineducación

Sello Editorial
UNIVERSIDAD DEL ATLÁNTICO

Colección Investigación y Desarrollo para todos

Hacia un lenguaje matemático

Oswaldo Dede Mejía
Miguel Antonio Caro Candezano
Carlos Araújo Martínez

Colección Investigación y Desarrollo para todos

Hacia un lenguaje matemático

Oswaldo Dede Mejía
Miguel Antonio Caro Candezano
Carlos Araújo Martínez

Universidad del Atlántico
VIGILADA MINEDUCACIÓN
Acreditación Institucional de Alta Calidad 2019 - 2023
Sello Editorial
UNIVERSIDAD DEL ATLÁNTICO

Araújo Martínez, Carlos -- Caro Candezano, Miguel Antonio -- Dede Mejia, Oswaldo

Hacia un lenguaje matemático / Carlos Araújo Martínez -- Miguel Antonio Caro Candezano -- Oswaldo Dede Mejía. – 1 edición. – Puerto Colombia, Colombia: Sello Editorial Universidad del Atlántico, 2020.

Colección Investigación y Desarrollo para todos.

Ilustraciones. Incluye bibliografía.

ISBN: 978-958-5173-18-7 (Digital descargable)

1. Filosofía de las matemáticas. 2. Matemáticas – Terminología. 3. Teoría de los números. 4. Notación matemática. 5. Matemáticas -- Historia. I. Autor. II. Título.

CDD: 510 A663

www.unitlantico.edu.co
Kilómetro 7, Antigua Vía a Puerto Colombia.
Barranquilla, Colombia.

ISBN 978-958-5173-18-7

Coordinación editorial
Sonia Ethel Durán.

Asistencia editorial
Estefanía Calderón Potes.

Diseño y diagramación
Joaquín Camargo Valle.

Revisión y corrección
Mariana Virginia Arias Llano.

Impreso y hecho en Barranquilla, Colombia.
Ditar S.A. www.ditar.co
Kilómetro 7, Vía a Juan Mina.
Parque Industrial Clavería.

Printed and made in Barranquilla, Colombia.

La presente colección es posible gracias a las siguientes autoridades académicas de la Universidad del Atlántico:

José Rodolfo Henao Gil
Rector

Leonardo Niebles Núñez
Vicerrector de Investigaciones, Extensión y Proyección Social

Danilo Hernández Rodríguez
Vicerrector de Docencia

Mariluz Stevenson
Vicerrectora Financiera

Josefa Cassiani Pérez
Secretaria General

Miguel Caro Candezano
Jefe del Departamento de Investigaciones

Agradecimientos especiales

Facultad de Ciencias Básicas

Decano Alberto Moreno Rossi

2020

La colección ***Investigación y desarrollo para todos***
es una iniciativa liderada por la Vicerrectoría de
Investigaciones, Extensión y Proyección Social de la
Universidad del Atlántico, pensada como herramienta
para la divulgación de la investigación y el
conocimiento que se genera en el Caribe colombiano.

Contenido

Introducción

La especie humana, a diferencia de otras, posee la capacidad de hablar y construir signos con significado propio que le permiten la comunicación entre sus congéneres. Esos signos lingüísticos que, según Ferdinand de Saussure (1945), son de naturaleza eminentemente psíquica, unen no un objeto y su nombre, sino un concepto y una imagen acústica. El concepto no es la cosa en sí, sino su abstracción; y la imagen acústica no es el sonido material, sino su huella psíquica. Estas dos facetas del signo lingüístico son inmotivadas, por lo que no existe relación natural alguna entre el significante y el significado. La naturaleza del signo lingüístico es arbitraria. Palabras orales o escritas, signos lingüísticos, no son naturales sino convencionales; tampoco son los mismos para todas las culturas ya que se hablan distintas lenguas, y de no existir una convención social que establezca un vínculo entre sonido y pensamiento, aquel carecería de sentido.

La matemática, una manifestación de la mente humana que emergió en el seno de antiguos pueblos y civilizaciones unos 2000 años antes de nuestra era, ha requerido, de acuerdo con cada época, un tratamiento simbólico y un lenguaje característico enmarcados en la necesidad de comunicar y entender el número y las formas en un nivel cada vez más creciente de abstracción.

Pueblos antiguos tuvieron una incipiente matemática encaminada a resolver problemas de conteo, utilizando métodos indirectos como guijarros o marcas en algún objeto. El paso a una numeración escrita fue dado en civilizaciones como Caldea y Egipto, las cuales incorporaron además la geometría como una aritmética aplicada al cálculo de medidas de objetos, así como una incipiente álgebra en la cual se daban *reglas* para resolver ecuaciones, pero formuladas en lenguaje natural, lo que suele denominarse álgebra retórica. Por esas épocas nada se justificaba, nada se explicaba; solo se daban las operaciones y las reglas estipuladas. Sin embargo, aparecieron sistemas de numeración con reglas precisas para su manejo tales como el egipcio, decimal no posicional y el babilónico sexagesimal. A este nivel podemos llamarlo nivel de las modalidades ejecutorias de carácter esencialmente métrico o nivel cuasiempírico.

Muchos siglos transcurrieron hasta que a partir del siglo V antes de nuestra era, en una tendencia iniciada en el siglo IV a.C. que se prolongó hasta el siglo IV d.C., surgió en Grecia un movimiento encaminado a racionalizar la matemática existente. Este posibilitó la explicación, es decir, *dar razón* de los procesos matemáticos pues la experiencia práctica es muy compleja para describirla de una manera simple y sin justificación. Se requiere de abstracciones y del razonamiento deductivo aplicado en forma consciente y segura a las inducciones particulares que conducen a conjeturas, las cuales deben ser probadas de la forma más general posible. La vía para ello la constituyó la demostración.

Se requería dar explicación a dificultades inherentes a conceptos como el de continuidad, movimiento e infinitud, así como al problema de la medición de magnitudes arbitrarias mediante unidades prefijadas. Surgió así la concepción del continuo geométrico por Eudoxo y la necesidad de presentar la matemática como una teoría axiomática deductiva, lo que se cristalizó en la obra *Elementos* de Euclides de Alejandría. Esta tendencia axiomática deductiva perduró hasta el siglo XVII. A este segundo nivel podemos llamarle *de la axiomatización*.

Durante los siglos XVII y XVIII, a partir del Renacimiento, el ser humano volvió los ojos a la naturaleza y basándose en observaciones, conjeturas intuitivas y razonamientos convenientes matizados de autocrítica, hizo avances matemáticos importantes. Una vez estipulados, se trataban de justificar según el método euclidiano. Fue la época del desarrollo de la geometría analítica y del cálculo diferencial e integral.

Para el siglo XIX, las críticas lanzadas contra los métodos y conceptos no justificados llevaron a los matemáticos a la necesidad de revisar las bases o fundamentos de la nueva matemática, en particular del cálculo diferencial e integral, así como del concepto de límite. De esta manera se inició un período no solo de nuevos avances, sino que se retomó el ideal griego de precisión y demostración rigurosa, de pureza lógica, de abstracción.

En este nivel y sin perder de vista las aplicaciones, nos encontramos hoy. Lo llamaremos *de síntesis estructural*.

Los desarrollos del siglo XX condujeron a designar la Matemática (en singular) como *la ciencia de los patrones*, es decir la ciencia formal que se ocupa de *estructuras* y *categorías* en las cuales pueden enmarcarse los sistemas matemáticos, así los objetos de estudio de las matemáticas sean abstractos.

Para referirse a esos objetos abstractos se requiere de términos y expresiones verbales o simbólicas que los designen. Expresiones y símbolos que no son los objetos representados, sino guías lingüísticas o signos que los identifiquen; un código de señales con reglas precisas para la comprensión, la expresión y la comunicación de los conceptos y proposiciones de las matemáticas. Se constituye así el lenguaje de las matemáticas, un lenguaje complejo conformado por símbolos propios y palabras con un sentido específico, la mayor parte de las veces ajenos al lenguaje natural de la comunicación cotidiana.

Dicho lenguaje, que pretende ser lo más universal posible, es el objeto de esta obra que recoge las notas recopiladas y ampliadas de los cursos que durante varios años he orientado en las Cátedras de Historia de las Matemáticas en las Universidades del Atlántico y Cartagena; Epistemología de las Matemáticas en el Programa de Matemáticas de la Universidad del Atlántico, y el curso ''El lenguaje de las matemáticas'' que he ofrecido a los estudiantes del Programa de Maestría Virtual en Didáctica de las Matemáticas de la misma universidad. Su propósito es introducir a los profanos en ese lenguaje que tal vez por apatía o por mero desconocimiento, considerando el punto de vista de que la matemática es solo ''la ciencia de los números'', y no la ciencia de las formas y sus abstracciones, esto es, la ciencia de las estructuras, se deja a un lado por las aplicaciones prácticas, las mismas que se ven limitadas por el desconocimiento de las estructuras que subyacen en los fenómenos a estudiar. Estructuras para cuya comprensión se requiere formular representaciones lingüísticas como única forma de modelarlas, comprenderlas y expresar esa comprensión para bien o mal de la humanidad.

Espero que este modesto aporte sea de utilidad, o por lo menos capte el interés de sus eventuales lectores.

1. Lenguaje cotidiano y lenguaje matemático

1.1. La necesidad y el uso del lenguaje matemático

"Gracias al simbolismo, avanzamos en el razonamiento casi mecánicamente solo con la mirada; sin el simbolismo tendríamos que utilizar centros más especializados del cerebro. Una buena notación nos libera del trabajo innecesario y nos permite concentrarnos en los aspectos más difíciles de los problemas".

Alfred North Whitehead

(1861-1947)

1.1.1. Sobre el lenguaje matemático.

Para comprender las matemáticas se requiere conocer su lenguaje, pues en caso contrario, aunque expresemos cosas sencillas, estas no se comprenderán. El lenguaje es en este caso un estructurador del conocimiento, pero a su vez el conocimiento ayuda a estructurar el lenguaje.

Desde los primeros grados escolares la matemática se instala en una serie de códigos que van penetrando los espacios del pensamiento y del lenguaje natural. Los niños van accediendo a la expresión de leyes y procedimientos que inducen comportamientos especiales encaminados a la solución de situaciones cotidianas y de su contexto tales como enumerar, contar y clasificar.

Posteriormente, se debe alcanzar un nivel en el cual se infieran conclusiones de situaciones hipotéticas o reales, a partir de una serie de datos o premisas; esto requiere de una estructura lingüística que permita la comprensión, la expresión y la comunicación. Se va construyendo un lenguaje sin el cual los conceptos y juicios matemáticos serían un galimatías verbal, lo que dificultaría la comprensión y, en general, la formación de un verdadero pensamiento matemático dada la imprecisión del lenguaje natural.

Los temas que constituyen el saber matemático escolar (abstracciones) imponen formas lingüísticas, un léxico y gramática particulares y discursivas (formas enunciativas) llevando a la formación de un lenguaje especializado. Esta especialización implica en la mayoría de los casos la comunicación y clasificación exacta y sin ambigüedades de sus contenidos.

A continuación, se expresan algunos enunciados en lenguaje natural, fruto de creencias difundidas por ciertos paradigmas. Trate de expresarlas y analizarlas a la luz del lenguaje matemático en algunos contextos.

Lenguaje natural. “Sumar es aumentar”.

Lenguaje natural. “Dividir es buscar fracciones que sean parte de un todo”.

Lenguaje natural. “Una figura es un dibujo”.

Lenguaje natural. “Una variable es aquello que cambia”.

En matemáticas, las afirmaciones se presentan de una manera propia, tajante, con demostraciones de su veracidad y sin llegar a equívocos. Todos y cada uno de los símbolos que se definen o utilizan tienen una función determinada, así como el papel que desempeña un empleado de oficina, que es exacto y con una representación adecuada para su comprensión.

¿Qué es un par ordenado?

¿Qué es una operación?

¿Qué es punto?

¿Por qué ½ es mayor que ⅓?

¿Para qué utilizamos el símbolo Φ?

¿Qué significa que un número entero *m* sea divisor de un número entero *n*?

¿Es √(a+b)=√a+√b?

1.1.2. Aproximaciones a una descripción del lenguaje matemático.

De acuerdo con su función y características podemos aseverar, en una primera aproximación, que el lenguaje matemático consta de símbolos verbales (palabras) y de caracteres gráficos (ideogramas) que se utilizan para la identificación y representación coherente de los elementos que constituyen el estudio de las matemáticas, sean estos conceptos, operaciones, relaciones o propiedades.

Tal lenguaje no debe ser ambiguo, es decir, no debe prestarse a dobles interpretaciones, lo que no ocurre con el lenguaje común. Consideremos la siguiente frase: "el hombre vio a la mujer desnuda con unos binoculares". ¿Será que el hombre vio a la mujer a través de unos binoculares, o que el hombre vio a la mujer que portaba unos binoculares?

La característica del lenguaje matemático es la simplificación de las expresiones verbales. Como dice Whitehead (1927), basta una mirada para comprender lo que se afirma, siempre que poseamos el conocimiento de los símbolos.

A manera de ejemplo, consideremos la expresión:

$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

Expresada verbalmente sería algo como "la diferencia del cubo de dos números es igual al producto de la diferencia de dichos números, por la suma de los cuadrados de esos números y el producto de ellos". Sobran los comentarios.

Ejercicio. Sin entrar en detalles, la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$

tiene *soluciones* dadas por $x=(-b\pm\sqrt{(b^2-4ac)})/2a$.

Trate de expresar esto en lenguaje corriente (álgebra retórica).

Ejercicio. El lenguaje matemático debe ser también preciso y coherente para no engendrar contradicciones, lo que requiere establecer de manera adecuada el contexto en el cual se desarrollan los procesos. Por ejemplo, se sabe que

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\,\sqrt{b}$$

Se define $i^2=-1$.

Y solemos escribir $i=\sqrt{(-1)}$.

Utilizando esta última notación

$$i^2=\sqrt{(-1)}\,\sqrt{(-1)}$$

Aplicando la regla de la raíz de un producto dada arriba

$$i^2=\sqrt{((-1)(-1))}=\sqrt{1}=1$$

Entonces concluimos que $1=-1$.

¿Cómo explicar esa *paradoja*?

Otra exigencia que se le hace al lenguaje de la matemática es la de completez. Es decir, debe permitir la descripción de todas las propiedades características de los objetos con cierto patrón matemático. Posteriormente, ampliaremos el estudio de estas exigencias.

Las matemáticas requieren de un lenguaje específico como un medio de comunicación encaminado a conocer lo que se dice y decir lo que se conoce. Este lenguaje tiene una gramática que establece las pautas para su comprensión, utilización y comunicación.

Desde el punto de vista sintáctico, podemos decir siguiendo a Devlin (2002), que

- La matemática puede definirse mediante el lenguaje.
- La matemática tiene un lenguaje.

- La matemática es un lenguaje, tal vez el mejor para describir el universo, aunque es mucho más que eso.

Además,

- Como marco cognitivo estructurado que permite entender, razonar y comunicar acerca del mundo, la matemática es un ejemplo de lenguaje.

Es la representación de los objetos matemáticos, sus relaciones sintácticas y semánticas, así como su praxis, lo que permite la comunicación de las ideas abstractas de las matemáticas y la conformación de un lenguaje específico. Este permite a los seres humanos a su vez acceder a las matemáticas tanto para su comprensión, como para su creación, difusión y aplicaciones a una realidad cada vez más compleja.

1.2. El lenguaje y la construcción de conceptos matemáticos

1.2.1. Sobre lenguajes formales.

En su calidad de seres gregarios, los humanos requieren de la comunicación comprensiva entre ellos, de forma tal que les permita fijar memoria de sus logros y experiencias. Para ello acuden a conformar un sistema que permita el intercambio de ideas en un determinado contexto o comunidad. Esto a fin de estructurarlo con ciertos principios combinatorios e interpretativos que llegan a ser de uso social, es decir, un lenguaje que permit**a** la comprensión, la explicación y la comunicación de los aspectos esenciales del contexto de la comunidad.

Según el contexto o la comunidad, el lenguaje puede ser *natural* o *formal*. El lenguaje natural es generalmente un cuerpo de *signos lingüísticos* (sonidos, gestos, señales o signos gráficos) utilizado y comprendido por una comunidad.

Un lenguaje formal es una creación artificial, convencional, con reglas de construcción y transformación que al ser manipuladas se convierten en la práctica en un *cálculo*.

Cualquier lenguaje debe constar de lo siguiente.

- <u>Un conjunto de ítems básicos discretos (finito)</u>: un vocabulario.

- Una sintaxis: un conjunto de ítems que tienen determinado poder combinatorio sobre los objetos del vocabulario al formar cadenas, estableciendo cuáles secuencias son válidas (cadenas bien formadas). La sintaxis constituye la *gramática* del lenguaje.

- Una semántica: el alcance que tienen las secuencias bien formadas para referirse a objetos que en general son distintos a los propios ítems o secuencias del lenguaje.

Además, debe darse una regla decisoria que asigne a cada ítem la clasificación *correcta* o *incorrecta*, *verdadera* o *falsa*.

Dada la naturaleza de las matemáticas, su lenguaje es puramente formal. Los objetos matemáticos son *constructos* u *objetos conceptuales*, es decir, creaciones mentales (cerebrales) diferentes a los objetos psíquicos o mentales como percepciones, recuerdos o invenciones.

Ejemplos: conjuntos, relaciones, funciones, números, teorema, hadas, brujas, etc.

Siguiendo a Bunge (1972, p. 4), planteamos las siguientes tesis:

1. Primera tesis conceptualista: los objetos conceptuales no son materiales ni mentales; no son signos ni procesos cerebrales, ni sucesos que ocurren en una mente inmaterial. Son objetos que poseen una naturaleza peculiar e irreductible.

2. Segunda tesis: los objetos conceptuales no existen como objetos materiales ni como objetos mentales, por lo tanto, no están sometidos a leyes de una u otra índole. Existen en la medida en que aparecen en ciertos contextos. Así, Harry Potter existe en ficción, pero no en matemáticas; las configuraciones matemáticas existen en las matemáticas, pero no en mitología.

3. Tesis ficcionista: la existencia conceptual no es ideal, material o mental, es convencional. Hacemos de cuenta que existen números, funciones, estructuras, etc. O sea, no solo inventamos los objetos conceptuales, sino su modo de existencia; pedimos, estipulamos, exigimos que existan en determinados contextos. El concebir un objeto conceptual y asignarle existencia conceptual (por convención o imposición) son dos aspectos de un mismo proceso cerebral de algún ser racional. Los objetos conceptuales no existen de por sí, ni son idénticos a sus representaciones (signos), ni se con-

funden con los pensamientos que los piensan. Son imaginables o pensables por una mente, pero el día en que cesan de serlo, dejan de existir; del mismo modo en que desaparecería una divinidad al morir el último de sus creyentes. Para existir de manera conceptual, es necesario y suficiente que un objeto sea pensable por algún ser racional de carne y hueso. Esta es la tesis materialista de la filosofía conceptual.

En síntesis, los objetos conceptuales, a diferencia de los objetos concretos que existen físicamente en algún estado de la materia, que se ubican en algún lugar, tienen energía y se transforman mediante la acción de un agente físico, etc., no poseen estas propiedades. Así, el número 3 no tiene masa, no tiene color, no se metaboliza aunque al operarlo (con otro número) pueda transformarse; las funciones no se calientan o explotan.

Pregunta. ¿Existen para usted los siguientes constructos? A saber, *semigrupo*, *espacio de Banach*, *derivada un medio de una función*.

1.2.2. Clases de constructos.

Restrinjamos los siguientes constructos (Bunge)

- Conceptos: son las unidades con las cuales se construye el lenguaje.
- Proposiciones: constructos que satisfacen algunas reglas de cálculo y que pueden evaluarse con respecto a su grado de veracidad, aunque no se disponga de procedimientos para efectuar la evaluación. Las proposiciones son significados de oraciones con sentido que se expresan mediante enunciados gramaticales. Por ejemplo, *existen números primos pares* enuncia una oración gramatical que determina una proposición.

Posteriormente, aclararemos este aparente galimatías.

- Contexto: conjunto de proposiciones formadas por conceptos con referentes comunes. Por ejemplo, el conjunto de las proposiciones relativas a los números naturales. Un contexto particular se denomina sistema: así hablamos del sistema de los números naturales, constituido no solo por los objetos que denominamos *números naturales*, sino de sus operaciones, relaciones, métodos de cálculo y en ciertos casos, de su proyección en el mundo real.

- Teoría: un contexto cerrado con respecto a las operaciones lógicas, es decir, un conjunto de proposiciones enlazadas con referentes comunes a varios sistemas; un sistema de aserciones acerca de objetos. Por ejemplo, la teoría de grupos enmarca varios sistemas como los números enteros con la adición, los números racionales con la adición, los números racionales diferentes de cero con la multiplicación, los vectores de n componentes reales con la adición, etc.

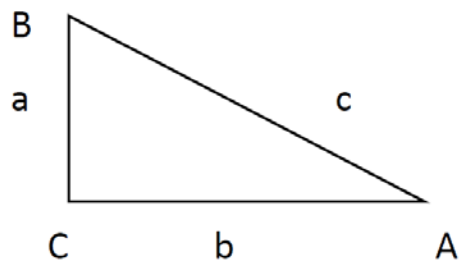
Al igual que el lenguaje natural, el lenguaje matemático utiliza palabras, las cuales podemos ubicar en las siguientes categorías, sobre todo cuando nos internamos en la acción de enseñar.

a) Palabras específicas de las matemáticas y que usualmente no forman parte del lenguaje común como cateto, paralelogramo, ecuación integral, número algebraico, etc.
b) Palabras que aparecen en la matemática y el lenguaje ordinario aunque con distinto significado en uno y otro contexto, como *proposición*, que en lenguaje ordinario significa "acción y efecto de proponer", por ejemplo la frase "Te hago una proposición: cásate conmigo". Sin embargo, en matemáticas esta no es una proposición. Otro ejemplo puede ser *diferencia*, teniendo en cuenta que en matemáticas la *diferencia* entre a y b está dada por a-b, esto es un valor c tal que a=b+c. Sin embargo, en lenguaje natural podemos escuchar frases como "tenemos serias diferencias", "la diferencia entre él y yo, es que él es egoísta pero yo no lo soy", etc.
c) Palabras con igual significado en ambos contextos, por ejemplo, horizontal, rectilíneo, curvo, etc.

Así, expresamos conceptos y proposiciones mediante palabras, pero como vimos en la sección anterior, las expresiones verbales pueden obstaculizar la comprensión de las proposiciones matemáticas. Por esta razón, se acude a los signos para representar los constructos. El objetivo es simplificar el lenguaje de tal manera que en lugar del enunciado verbal "dado un triángulo rectángulo, el cuadrado de la medida del lado opuesto al ángulo recto equivale a la suma de los cuadrados de las medidas de los otros lados" podemos sintetizar con "dado un triángulo rectángulo tal que el lado opuesto al ángulo recto mide c unidades, y los otros dos lados miden a y b unidades, respectivamente, entonces c^2=a^2+b^2".

Si llamamos al lado opuesto al ángulo recto *hipotenusa* del triángulo y a los lados que forman el ángulo recto *catetos*, podemos escribir "dado un ángulo recto cuya hipotenusa mide c y los catetos a y b respectivamente, entonces $c^2=a^2+b^2$".

Gráficamente sería: dado el $\angle C$ recto, $c^2=a^2+b^2$.



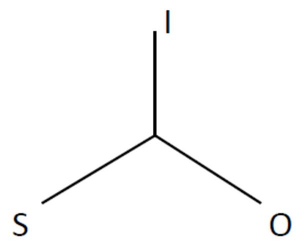
Se construye así un lenguaje simbólico representativo de los constructos matemáticos siguiendo las pautas que exige cualquier lenguaje.

1.2.3. Sobre semiótica.

No pretendemos dar una definición de símbolo, pero de manera informal podemos expresar algo aproximativo. *Un signo es cualquier cosa que determina otra cosa, para que se refiera a un objeto mediante una interpretación.*

"Si S es un signo, S se dirige a alguien (una persona, un conglomerado) con el fin de que en su mente se cree un signo equivalente o quizá más desarrollado. Este signo recibe el nombre de *interpretante* del signo S y ocupa el lugar de algo, de su objeto conceptual" (Peirce, 1973).

Se forma así una tríada (S, I, O).



Donde S es el *signo*, O el *concepto* e I el *interpretante*, se explicaría de la siguiente manera. Dado el objeto O, creamos un signo S, el cual se dirige a otra persona o conglomerado. Este constituye a su vez un símbolo mental (cognitivo) I, llamado *interpretante*, el cual ocupa el lugar del objeto conceptual.

El *concepto O* existe en algún mundo real o ideal, y es el *referente*; S es el *significante automático* (palabra o símbolo) e I es el concepto matemático individual del sujeto o *significado*. Se denomina la tríada como *tríada semiótica* y a sus componentes como *signos lingüísticos*.

Por *semiótica* entendemos el estudio de los diferentes sistemas de signos que permiten la comunicación eficiente entre los individuos o comunidades, su modo de producción, su funcionamiento y los medios de recepción.

La semiótica tiene las siguientes ramas:

- Sintaxis: conjunto de reglas y normas para establecer la buena formación de las cadenas de símbolos, a fin de que tengan una coordinación coherente y con sentido (formas bien formadas).
- Semántica: estudio de las relaciones entre significante y significado, es decir, establece el significado de las palabras y los enunciados.
- Pragmática: estudia las relaciones entre significante y usuarios, es decir, de las formas en que los miembros de una comunidad utilizan los diferentes signos al comunicarse.

Hemos enfatizado en esto ya que el lenguaje que se construye en la clase de matemáticas, analizado desde las tres ramas anteriores, depende de la comprensión y utilización efectiva de las matemáticas por parte de quienes participan en el proceso de enseñanza y aprendizaje de tales disciplinas.

Es conveniente notar que a un mismo concepto pueden asignársele varios signos; tal es el caso de la representación del número diez por 10, X, ∩, ∢, en donde se dan las representaciones decimal, romana, egipcia y babilónica; por lo tanto, debemos ser cuidadosos y no introducir confusiones en las representaciones.

Según la relación que los signos tengan con el objeto conceptual (o real) se clasifican en

- *Íconos*: signos que tienen relación directa de semejanza, en tanto se parecen al objeto que representan. Por ejemplo: retratos, dibujos figurativos, mapas, etc.
- *Índices* (síntomas): expresan relación de contigüidad con los objetos que representan. Por ejemplo: una huella es índice de que alguien pasó, y una fiebre es índice de infección.
- *Símbolo*: es un signo inmotivado, convencional, en su relación entre el significante y el significado. Por ejemplo: logotipos, escritos, variados sistemas de escritura para los números, gráficos cartesianos, diagramas, etc.

¿Es esencial esta utilización, o no es más que un medio cómodo pero secundario para el ejercicio de las actividades cognitivas fundamentales? (Duval, 1993).

Ante este interrogante que puede asaltar a cualquiera al imaginarse que está construyendo algo sin sentido real, podemos citar algunas respuestas.

1. No puede haber comprensión en matemáticas si no es posible distinguir algún objeto de su representación. No deben confundirse los objetos matemáticos (números, funciones, rectas, etc.) con sus representaciones (escrituras decimales, símbolos, gráficos, figuras trazadas), pues un mismo objeto matemático puede darse a través de representaciones diferentes.

2. Las representaciones mentales y/o concepciones individuales sobre una situación permiten una mirada del objeto en ausencia total del significante perceptible; la expresión algebraica a^2+b^2 se interpreta inmediatamente.

3. Las representaciones semióticas constituyen un medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales, es decir, para hacerlas visibles o accesibles a los demás. Además, sus funciones de comunicación son esenciales para el desarrollo de la propia actividad matemática. El sistema de representación semiótica influye en la posibilidad y versatilidad para efectuar operaciones, cálculos y en general, en el tratamiento so-

bre los objetos matemáticos. Para un adecuado desarrollo y progreso de los conocimientos, debemos acudir a sistemas semióticos nuevos y específicos que de alguna manera, coexistan con el de la lengua natural.

4. La diversidad de sistemas semióticos permite una diversificación tal en la representación de un mismo objeto, que aumenta la capacidad cognitiva de los sujetos y, por lo tanto, sus representaciones mentales.

Para reflexionar

¿Cómo deducir la fórmula que da las soluciones de la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$ donde a, b y c son constantes reales y $a\neq 0$, utilizando solo palabras y sin acudir al lenguaje algebraico?

En caso de lograrlo, ¿cómo enunciaría la fórmula obtenida?

Use la fórmula mostrada en cualquier libro de álgebra elemental para resolver la ecuación $x^2-2x+2=0$.

¿En qué contexto existen las soluciones?

¿Genera esta ecuación algún desequilibrio en el lenguaje utilizado para el contexto de los números reales?

¿Se requiere una ampliación del lenguaje?

Identificando objetos matemáticos

Un *número plástico* es cualquier solución positiva de la ecuación $x^n-x-1=0$ donde n es un número natural no menor que dos.

¿Existen números plásticos?

Para cada valor del exponente, ¿cuántos números plásticos pueden existir?

Responda las preguntas anteriores para $n=2$ y $n=3$.

¿Qué razones tendrían los creadores para asignarles a tales números el calificativo de *plásticos*?

1.2.4. Estructuración de un lenguaje.

El lenguaje matemático se estructura mediante constructos que, como hemos visto, son los conceptos, las proposiciones y los contextos abiertos y cerrados.

Los conceptos son algo así como los átomos con los cuales se construye el lenguaje. Las proposiciones son constructos aseverativos sobre uno o más objetos, y que según el contexto pueden —después de aplicar ciertos criterios de asignación— ser significativas, y decidir acerca de su verdad o falsedad en el contexto.

Los conceptos matemáticos, en tanto constructos, son individuales (un punto, un número); conjuntos (una línea recta), relaciones (*ser paralelas*, *estar entre*). Entre las relaciones se destacan las de equivalencia y orden, y unas relaciones especiales denominadas funciones.

La representación lingüística de una proposición es una oración formulada por un enunciado como "el asno es un cuadrúpedo", de una forma oral o escrita, verbal o simbólica. La enunciación y la percepción de una oración son procesos individuales y como tal, realizaciones físicas; pero la oración misma no lo es. Suele aseverarse que una proposición es el significado de una oración, y que esta puede tener varios enunciados representativos. Dos enunciados (expresiones habladas o escritas) son equivalentes psicológicamente si producen los mismos efectos en todos los sujetos que conocen el lenguaje al que pertenece la oración. Por ejemplo, "te daré un beso" y "un beso te voy a dar".

Sin embargo, la misma oración enunciada de manera diferente o bajo circunstancias diferentes, puede tener efectos diferentes. "Te daré un refresco" no significa lo mismo al interior de una fuente de soda, que en una región desértica.

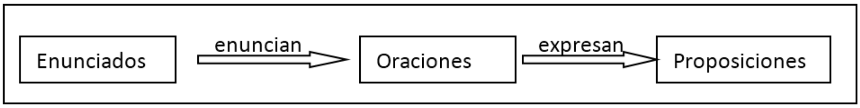
Además, podemos agregar que toda proposición es explicable por una o más oraciones. Por ejemplo, "esta mesa es redonda" y "*this table is round*".

Son oraciones expresadas con enunciados lingüísticos diferentes que corresponden a la misma proposición.

De manera análoga, 1+1=2 y 1+1=10 enuncian el mismo hecho; uno en el sistema decimal y otro en el sistema binario de numeración.

Cabe anotar que existen oraciones gramaticales que no expresan proposición alguna. Por ejemplo, “el canto de una sirena es el logaritmo natural de e”.

El siguiente cuadro tomado de Bunge (1972), muestra la forma en que actúan enunciados, oraciones y proposiciones.



En la práctica se trabaja con enunciados proposicionales (*statements*, en inglés) y no con oraciones (*sentences*), o con proposiciones (*propositions*) aunque muchas veces se confundan las expresiones.

Ya hemos mencionado la diferencia entre sintaxis, semántica y pragmática. Un sistema puramente sintáctico en el cual los elementos y las reglas de formación no se refieran a clase alguna de objetos y postulados de procesos, se denomina *lenguaje puramente formal*. Cuando se asignan significados a los elementos tenemos un *lenguaje interpretado*. Lo que denominamos *matemática pura* se expresa en un lenguaje formal.

A un sistema sintáctico lo denominamos *un cálculo*.

Un cálculo K se construye mediante el siguiente procedimiento:

1. En primer lugar, se da una clasificación de los signos a utilizar (elementos o vocabulario de K).
2. Se plantea un conjunto de reglas constitutivas que actúan en K. Estas nos dicen qué combinaciones de elementos son permisibles y cuáles no (reglas de formación). Permiten decidir acerca de las *formas con sentidos* o *bien formadas*.
3. Se formula un conjunto de definiciones que establecen cómo se forman elementos nuevos mediante la combinación de determinadas palabras o signos ya existentes.
4. Se proveen entonces pruebas o derivaciones para el cálculo mediante una serie de enunciados *primitivos* y *reglas de inferencia* (re-

glas de transformación) que permitan las deducciones válidas. Los enunciados primitivos actúan como *axiomas*, *postulados* o *premisas* de los que se derivan otros enunciados válidos o *teoremas*.

1.2.5. Lenguaje y metalenguaje.

Si analizamos y describimos un lenguaje L, necesitamos otro lenguaje, digamos L_1, para formular lo relativo al lenguaje L o las reglas para el uso de L. En tal caso llamaremos a L el *lenguaje objeto* y a L_1 el *metalenguaje.* Todo lo que se conoce de L expresado en L_1 se denomina la metateoría de L.

Por ejemplo, si describimos en español la estructura gramatical del idioma inglés, este será el lenguaje objeto y el español el metalenguaje.

En el lenguaje objeto, los signos *denotan* (nombran, se refieren a) objetos que no son parte del lenguaje, mientras que en el correspondiente metalenguaje, los signos denotan signos del lenguaje objeto. Así, la palabra "perro" en la oración "un perro es un animal", pertenece al lenguaje objeto pues se refiere a un objeto extralingüístico; pero en la oración "perro" es un sustantivo", nos referimos a la palabra "perro" y no a un perro como animal.

En el caso de "un perro es un animal", diremos que la palabra perro está *usada*, mientras que en la segunda oración "perro" es un sustantivo: la palabra "perro" está *mencionada*.

Una convención muy extendida para distinguir entre el uso y la mención establece que, cuando se menciona, es conveniente escribir el nombre mencionado entre comillas.

De esta manera, al establecer un cálculo se requieren reglas de un metalenguaje que establecerán la sintaxis y asignaciones de verdad o falsedad, que no se pueden decidir en el propio lenguaje en tanto que el mismo cálculo es un lenguaje objeto. Iremos clarificando estas ideas conforme avancemos en el texto.

En esencia, esta es la estructura de la matemática formal, es decir, de la matemática como ciencia establecida.

Sin embargo, en los procesos de enseñanza y aprendizaje este enfoque no es recomendable, porque especialmente en los primeros años de edad, etapa preoperatoria y de las operaciones concretas, según Piaget (1967), puede constituir un obstáculo psicológico y puede conducir a la falsa creencia de que al manipular signos, sabemos matemáticas.

Las matemáticas formales tienen un alto valor intelectual, pero son comprensibles solo por mentes con un pensamiento avanzado al nivel de las operaciones formales, es decir, ubicadas en el tercer mundo popperiano: el de las ideas.

Con respecto a esto, nos remitiremos al siguiente interrogante planteado por el profesor Morris Kline, en una obra que critica el excesivo formalismo en el lenguaje para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, sobre todo en los niveles elementales (Kline, 1976, p. 17). En esta hace referencia a lo que en su momento se denominó *Matemáticas Modernas* y que se puso en boga desde la década de los sesenta del siglo pasado.

> […] Cabe preguntarnos si los jóvenes pueden apreciar el valor intelectual de la matemática formal, de igual manera que cabe preguntarse si un niño de seis años puede apreciar la música de Beethoven. Si el profesor demuestra un teorema, el alumno estaría luchando por comprenderlo en su esencia, su demostración y significado, mientras que al escucharlo libre de tales luchas no es probable que se impresione con el contenido intelectual y los logros de la mente humana. En él, el teorema y su demostración producen desconcierto y confusión (Kline, p. 15).

Para ubicarnos mejor en este aspecto, detengámonos un poco en las diversas posiciones acerca de la construcción del lenguaje matemático.

- *Conductista*: el sujeto que aprende es una tabula rasa, aprende el lenguaje por el "uso" y "la enseñanza" de la escuela y la sociedad.
- *Innatista*: el lenguaje se adquiere basado en la capacidad innata del ser humano para producirlo, y en otras habilidades que se adquieren con la práctica.
- *Cognitiva*: compendia el innatismo con la construcción de significados. El sujeto cognoscente es un asignador de significados.

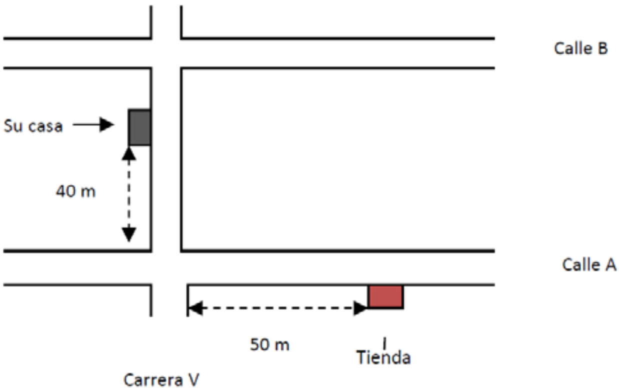
¿Con cuál de estas posiciones se identifica? ¿Por qué?

Consideremos la definición de circunferencia como *el conjunto de puntos de un plano que están a igual "distancia" de un punto fijo de dicho plano*.

Al analizar esta definición surgen muchos interrogantes. ¿Qué significa distancia? ¿Existe una sola distancia en el plano?

Si usted vive en la carrera V ubicada entre las calles A y B, a 40 metros de la calle A y la tienda más próxima se encuentra en la calle A, a 50 metros a la derecha de la carrera V, según el esquema que mostramos, ¿cuál es la *distancia* que debe recorrer de su casa a la tienda?

a) ¿Es esto realmente una distancia?



b) ¿Podemos llamarla *distancia en escuadra*?

Nota. No es posible ir en línea recta por las construcciones en cada manzana.

c) En un plano cartesiano graduado, se define

$$d_1((x,y),(0,0)) = |x| + |y|$$

(c_1) Represente $d_1((-2,1),(0,0))$

(c_2) Conociendo las propiedades del valor absoluto, represente el conjunto

$$C = \{(x,y) : |x| + |y| = 1\}$$

es decir, $C = \{(x,y) : d_1((x,y),(0,0)) = 1\}$

(c_3) ¿Cree usted posible aseverar que d_1 define una *distancia en escuadra*?

(c_4) Si d_1 define una distancia, entonces C es una circunferencia de centro (0,0) y radio 1. ¿Cuál es la representación gráfica de tal circunferencia? **Sugerencia.** Recuerde que

$$|x| = \begin{cases} x, si & x \geq 0 \\ -x, si & x < 0 \end{cases}$$

y utilice esta definición para analizar la condición $|x| + |y| = 1$ en los casos

a. $x \geq 0, y \geq 0$

b. $x \geq 0, y < 0$

c. $x > 0,\ y < 0$

d. $x < 0, y < 0$

Además, considere las condiciones resultantes de cada uno de ellos.

Si se viaja de Bogotá a Medellín, ¿se viaja en línea recta? ¿cómo se mide la distancia en este caso?

Investíguese acerca del término *distancia*.

El desconocimiento y tratamiento inadecuado del lenguaje matemático produce errores de construcción e interpretación, suele crear problemas para la comprensión conceptual de los objetos de estudio, así como respuestas deficientes a ciertos interrogantes, lo que puede producir reacciones de antipatía y rechazo hacia las matemáticas.

1.2.6. Sobre las definiciones y textos.

Algunos conceptos se introducen en el lenguaje mediante una definición. Las definiciones pueden ser formales, personales (basadas en esquemas conceptuales) o imaginarias (mentales), pero saber de memoria una definición no garantiza su comprensión. Muchas veces producen un efecto engañoso y pueden constituirse en obstáculos para el aprendizaje pues representan más que cualquier otra cosa, el conflicto entre la estructura de las matemáticas tal como la conciben los matemáticos y los procesos cognitivos de la adquisición de conceptos (Vinner, 1991).

Por ello prevenimos acerca de los peligros que entraña la concepción de que el aprendizaje de las matemáticas se produce a través de definiciones y memorización de algoritmos (procedimientos) preestablecidos, y que son esas definiciones y algoritmos los que se activan en la mente del estudiante y controlan los procesos de resolución de problemas.

En cuanto a los textos, tienen un lenguaje acabado que representa estereotipos de ciertas épocas, no solo en lo pedagógico, sino en lo curricular: estructura temática, competencias, actividades, tipos de problema (si los tienen), etc. Por esta razón, debemos usarlos con precaución luego de un análisis detallado de su contenido, enfoques, etc.

Infortunadamente, en las décadas de los sesenta y setenta del siglo XX, se entronizó un movimiento denominado *matemática moderna*, que privilegió el formalismo y la estructura lógico-matemática. Antes que el hacer matemáticas, ellos se centraban en los conceptos y no en los cálculos, los cuales pasaron a un segundo plano. Era más importante la estructura que los procedimientos para resolver problemas, los cuales constituyen la razón de ser de las matemáticas.

Este movimiento de la *nueva matemática* produjo el abandono de los procesos para concentrarse en lo formal, de la matemática que construye de manera inductiva a la matemática deductiva; reduciendo la misma a una serie de patrones en los cuales se encasillaban los objetos matemáticos, y en cada uno de los cuales se manejaban términos especiales como grupos, anillos, cuerpos, módulos, etc., así como transformaciones o morfismos, basándose en el lenguaje lógico de la teoría de conjuntos. Tales estructuras estaban (y están) determinadas por un tipo especial de funciones, las operaciones, las cuales al poseer determinadas propiedades dominan al sujeto para clasificar la estructura en la cual está inmerso.

El movimiento de la *nueva matemática* motivado y surgido por las críticas fundadas al plan tradicional, en el cual los alumnos aprendían a trabajar las matemáticas maquinalmente, memorizando procedimientos y demostraciones, preconizó que “si la matemática se enseñase lógicamente, se evidenciaría el razonamiento en que se apoya cada paso, los alumnos ya no tendrían necesidad de memoria, comprenderían las matemáticas” (Kline, 1976, p. 31).

Según este movimiento, todas las matemáticas se estudiarían con el modelo de la geometría euclidiana. Es decir, se comienza con términos primarios (no definidos), axiomas y definiciones y se demuestran conclusiones de forma deductiva, a las cuales se les llama teoremas.

No sabemos si por fortuna o por desgracia, el movimiento no alcanzó lo que pretendía y, atacado sin piedad por muchos matemáticos y educadores, cedió el paso a intentos por conciliar procedimientos creativos con una cierta dosis de formalismo que conllevaron, de acuerdo con el nivel de los estudiantes, a la creación, comprensión y comunicación de un lenguaje que, apoyándose en el natural, permitiese el desarrollo matemático de individuos y de comunidades.

Hoy es lícito combinar la lógica y la intuición, el análisis y la síntesis, lo general y lo particular, en aras de estructurar un pensamiento matemático innovador que luego se pueda formalizar. Las matemáticas formales no son el punto de partida, sino la meta a la que se aspira llegar.

Volviendo a los textos, debemos utilizarlos después de un estudio serio. Algunos de ellos, por ejemplo, ciertos textos de cálculo, todavía no han superado lo realizado en el siglo XIX. Otros se extralimitan en formalismos que poco le dicen al estudiante, ya que sus abstracciones no motivan ni inquietan a nadie con intereses juveniles: difícil encontrarle significado a tales abstracciones.

Uno de los críticos más encarnizados del movimiento de la *nueva matemática* fue el profesor Morris Kline (1908-1992), quien fuese profesor e investigador de la Universidad de Nueva York, autor de muchas publicaciones científicas en física y matemáticas, de divulgación y crítica sobre la enseñanza, el aprendizaje e historia de las matemáticas. Una de sus obras fundamentales es el libro *El fracaso de la matemática moderna. ¿Por qué Juanito no sabe sumar?* publicado en 1973, en el cual se hace un análisis detallado de los métodos anteriores de enseñanza desnudando su imperfección y a la vez se realiza una crítica de los *nuevos métodos*, probando que una enseñanza o presentación de las matemáticas desde un punto de vista formal, sin conexión con los hechos fácticos de las ciencias no matemáticas, no satisface los deseos de una abrumadora mayoría de los estudiantes. De dicho libro resaltamos algunos párrafos (Kline, op. cit.).

> El plan tradicional ha sido fielmente reproducido en miles de libros de textos. La impresión general sobre estos es que son insufriblemente pesados. La mayor parte de los autores de libros de textos parecen

> creer que una obra científica debe ser fría, sin imaginación, mecánica y seca; estos libros no tienen autor, no solo están impresos por máquinas, también están escritos por máquinas (Kline, p. 17).

"Los autores parecen decir: yo he aprendido este tema, ahora lo desafío a que usted lo aprenda" (*ibid*.).

A propósito del exagerado simbolismo, afirma:

> El simbolismo puede servir para tres fines; puede comunicar eficazmente las ideas, puede ocultar las ideas y puede ocultar la esencia de ideas. A menudo parece como si los textos modernos de matemáticas usasen el simbolismo para ocultar la pobreza de ideas. En otros casos el propósito del simbolismo es el de hacer inescrutable lo evidente y evitar así su comprensión (Kline, p. 84).

Nos preguntamos, ¿cómo diseñar un currículo de matemáticas que permita que los estudiantes vayan estructurando el lenguaje matemático desde los primeros mundos popperianos para culminar con las teorías del tercer mundo? Como dijera Devlin (2012), esto es hacer que el lenguaje matemático *haga visible lo invisible*, pero sin caer en el reduccionismo simbólico a ultranza, que puede confundirse con la propia matemática. Los símbolos son necesarios, pero atiborrar la mente de los alumnos con una profusión de símbolos puede generar rechazo y desgano.

¿Cómo se puede crear un ambiente de clases que refleje una cultura matemática real, y en donde los valores de la matemática se reflejen en la práctica cotidiana o científica?

¿Cuál es su posición con respecto a la naturaleza y proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas? Identifíquese con una de las siguientes concepciones.

1. Aprender significa acumular pedazos de información (conceptos y habilidades) arreglados en una secuencia ordenada, mediante estrategias y hechos para ser utilizados (herramientas). La enseñanza busca manejo de habilidades y consecución de resultados *correctos*; sigue estrictamente un libro de texto, busca comportamientos sumisos y considera que el estudiante es un receptor pasivo.

2. ¿Busca usted la comprensión conceptual y unificada de los conceptos matemáticos a través de un proceso de *enseñanza* basa-

do en seguimiento de un texto, con actividades y problemas adicionales, pero considera al estudiante un receptor pasivo, aunque incidentalmente realice algunas aplicaciones a modelos?

3. ¿Considera usted que las matemáticas constituyen un cuerpo dinámico del conocimiento en constante expansión? ¿Busca que el estudiante desarrolle o constituya las ideas matemáticas? ¿Desarrolla actividades propias de las matemáticas y su proyección en ciertas realidades objetivas y materiales construidas por los estudiantes? ¿Considera que el estudiante debe ser explorador, indagador y creativo, que confronte sus conjeturas y resultados, dándole así más importancia a los resultados que los estudiantes muestren en el desarrollo de las ideas matemáticas, antes que a "recitaciones" y formulaciones que nada dicen de alguna realidad?

Si está de acuerdo con (1), usted tiene una concepción instrumentalista de la enseñanza y su papel es *instructor-transmisor*. Si coincide con (2), tiene una concepción formalista y su papel es *instructor-explicador*. Si se encuentra de acuerdo con (3), usted tiene una concepción abierta y su papel es *facilitador-acompañante* en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Foro. Acerca de lo *evidente*

Discútase acerca de las siguientes frases que suelen ser utilizadas en clase e incluso por libros de texto.

- "Es evidente que…"
- "Es obvio que…"
- "Es claro que…"

¿Qué es lo evidente y cómo se manifiesta?

¿Cómo se manifiesta lo obvio?

¿Qué es claro? ¿Cómo sabemos que es claro?

Piense en los siguientes interrogantes:

1. Es evidente que $\sqrt{5^2} = |5|$

2. El factorial de un número natural se define por
   $n! = n(n-1)(n-2)...(n-n+1)$
3. Así $3!=3\bullet 2\bullet 1=6$
4. ¿Es evidente que $0!=1$?
5. ¿Se ve claramente que 10^n-1 es divisible por 9, siendo n=1, 2, 3, 4, etc.?

Aunque no es nuestra intención el traslaparnos con los aspectos didácticos, no está de más mencionar —a manera de información— algunas herramientas de análisis en didáctica de las matemáticas. Estas se enmarcan en un movimiento llamado *didáctica fundamental*, que se encamina al estudio de las condiciones bajo las cuales se constituye el saber matemático con el fin de optimizarlo, controlarlo y reproducirlo en situaciones escolares. Para ello se construyen modelos de actividades de aprendizaje fundamentándose en que "saber matemáticas" no es solamente recitar definiciones y teoremas para reconocer la ocasión de utilizarlos. Lo fundamental es el aprendizaje, como lo preconiza la siguiente cita de "saber matemáticas" (Brousseau, 2002).

> […] Saber matemáticas es ocuparse de problemas, que en un sentido amplio incluye tanto encontrar buenas preguntas como encontrar soluciones. Una buena reproducción por parte del alumno de la actividad matemática exige que este intervenga en dicha actividad, lo cual significa que *formule enunciados y pruebe proposiciones*, que construya modelos, lenguajes, conceptos, teorías (conjeturales), que los ponga a prueba e intercambie con otros, que reconozca los que están conformes a la cultura matemática y que tome los que le son útiles para continuar su actividad.

Esta cita es precisamente de Guy Brousseau, el exponente de la *teoría de las situaciones didácticas*, una iniciativa encaminada al análisis de las relaciones entre los aspectos situacionales, el contexto y la cultura, así como de las conductas cognitivas de los alumnos.

Existe una comunidad de investigadores como los grupos TME (*Theory of Mathematics Education*), PME (*Psychology of Mathematics Education*) y la Escuela Francesa de Didáctica de la Matemática, en la cual se enmarca la teoría de Brousseau y la *transposición didáctica* de Yves Chevallard (1985), según la cual las instituciones exigen un "saber a enseñar", el *saber sabio*; pero este saber debe adaptarse para ser transformado en conocimiento destinado a ser enseñado. Dentro de estas propuestas se enmarcan además las nociones de *contrato didáctico*, teoría de los *campos conceptuales* (Vergnaud, 1990), que consisten en grandes conjuntos de situaciones cuyo análisis y tratamiento requiere de varios tipos de conceptos, procedimientos y representaciones simbólicas que están conectadas entre sí.

Cabe mencionar el Grupo de Investigación en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, cuyo director es Juan B. Godino, que ha marcado una pauta sobresaliente en el campo iberoamericano.

Nos hemos permitido estas digresiones en cuanto tienen que ver con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, los cuales no pueden darse de una forma óptima sin un lenguaje adecuado, sea este verbal, escrito o simbólico. Por lo tanto, lo que atañe a las matemáticas atañe a su lenguaje.

En la construcción de un lenguaje específico para las matemáticas podemos seguir estas secuencias.

- *Percepción*: visualización espacial que conduce a una descripción verbal, clasificaciones, ordenaciones y al inicio de deducciones verbales.

- *Acciones*: conducen a la consideración de un tipo de desarrollo cognitivo relacionado con *la dualidad proceso-objeto*, lo que lleva a la noción de *procepto*.

- *Procepto*: objeto mental combinado que consiste en un proceso, un concepto generado por dicho proceso y un símbolo que se puede utilizar para significar alguno de los dos o ambos. **Ejemplo.** La simbología $f(x)=x^3-1$ representa tanto el proceso de calcular $f(x)$ para valores particulares de x, como $f(2)=2^3-1=8-1=7$; pero también representa el objeto *función*. A este tipo de proceptos se les denomina *molde.*

- *Proceptos estructura*: presentan objetos a manipular y ejecutar alguna acción, pero no incluyen procedimientos de cálculo específicos. Por ejemplo,

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x-1}$$

indica:

a) El hecho de tender a algo (un límite).
b) Puede representar el objeto límite, si existe.
c) No incluye la manera de calcularlo.

Debemos tener en cuenta algo en lo cual insistiremos de manera iterativa: los objetos matemáticos no son manipulables físicamente, deben ser representados; tales representaciones se manipulan, pero no debemos confundir un objeto matemático con su representación semiótica.

¿Qué representa $\sum_{i=1}^{\infty} x^i$?

A manera de ejercicio, tratemos de responder el test que sigue.

1. Los objetos conceptuales son:

   a) Materiales.
   b) Puramente mentales.
   c) Convencionales en un contexto.
   d) Puramente ideales.

2. Aprender matemáticas consiste en:

   a) Manipular mecánicamente una simbología estipulada.
   b) Realizar con rapidez cálculos numéricos.
   c) Resolver problemas tipo que se presentan en los libros de texto.
   d) Identificar patrones y utilizarlos para construir otras configuraciones y modelos basados en los primeros.

3. El símbolo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

es:

a) Un procepto molde.
b) Un procepto estructura.
c) Un procepto molde-estructura.
d) No es un procepto.

4. Las siguientes expresiones utilizan el signo *igual*:

(i) $3!=6$

(ii) $x^2+5x=30$

(iii) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

(iv) $6^2=36$

Dicho signo tiene la misma connotación en:

a) (i) y (ii).
b) (ii) y (iii).
c) (iii) y (iv).
d) (i) y (iv).

5. La grafía $\sqrt{a}$ es:

a) Un ícono.
b) Un índice.
c) Un símbolo.
d) Una raíz.

6. Representamos los objetos matemáticos mediante símbolos. Podemos afirmar:

   a) Los objetos matemáticos son los mismos símbolos.
   b) Si dominamos los símbolos, estamos haciendo matemáticas.
   c) Los símbolos existen realmente en el contexto considerado.
   d) Lo símbolos sufren cambios de temperatura, afecciones bronquiales, etc.

7. Se expresan los enunciados:

(i). Los lados opuestos de un paralelogramo son congruentes.

(ii). "Los ángulos opuestos de un paralelogramo son congruentes" es un teorema.

(iii). Juan es un sustantivo.

(iv). Juan vive en esta cuadra.

Podemos asegurar que:

   a) (i) y (iv) están en metalenguaje.
   b) (i) y (iii) están en metalenguaje.
   c) (ii) y (iii) están en metalenguaje.
   d) El término "Juan" se usa en (iii) y se menciona en (iv).

8. La frase "las matemáticas hacen visible lo invisible", se interpreta de la siguiente manera:

   a) Los objetos matemáticos no son visibles y los visualizamos a través de los símbolos.
   b) Los símbolos son la matemática.
   c) Podemos estudiar los objetos matemáticos sin representaciones de ellos.
   d) Si sabemos matemáticas, el lenguaje común es suficiente para explicarla.

9. La tesis materialista de la filosofía conceptual afirma:

a) Los objetos conceptuales se conciben y se les asigna existencia conceptual por una mente racional.
b) Los objetos conceptuales existen de por sí.
c) Los objetos conceptuales son idénticos a sus representaciones.
d) Los símbolos matemáticos son suficientes para comprender y difundir la matemática.

10. El lenguaje de las matemáticas es:

a) Parte del lenguaje común.
b) Complejo y artificial con sentido específico dentro de un contexto.
c) Totalmente retórico.
d) El mismo en todos los contextos y sociedades.

2. Representación del lenguaje

2.1. Los enunciados y su representación

Se ha construido un sistema formal de signos y reglas generales para su uso, con el propósito de que los enunciados de cualquier teoría puedan en lo posible expresarse y tratarse con tales signos y reglas. Estableciéndose así una *correspondencia biunívoca* entre los objetos propios de la teoría; que los conceptos de la teoría sean interpretados mediante uno y solo un signo del sistema formal.

Para el caso de las matemáticas, se crea inicialmente un cálculo no interpretado basado en la *lógica de enunciados*. Estos enunciados pueden ser declarativos o no. Un enunciado es declarativo cuando puede decidirse acerca de su verdad o falsedad en un contexto determinado. En caso contrario no es declarativo.

Los enunciados declarativos se refieren a oraciones que expresan proposiciones en el contexto. Por ejemplo, "existen infinitos números impares" es un *enunciado declarativo*, por lo tanto, representa una proposición. Sin embargo, el enunciado "te deseo un feliz año nuevo" no es declarativo y no enuncia proposición alguna.

La verdad o falsedad de un enunciado matemático no proviene de la mera observación, medición o experimentación; requiere, salvo el caso de los axiomas, de una prueba basada en argumentos válidos. La pregunta ‘‘¿qué es un argumento válido?’’ será motivo de tema posterior.

Ejercicio 1. Determine cuáles de las siguientes expresiones *enuncian* una proposición.

a) Existen infinitos números cuadrados.
b) La ecuación $x^2+2=0$ tiene una raíz real.
c) “Juan es igual a 20”.
d) ¡Váyase al diablo!
e) “10 no es número primo”.
f) Existe al menos un número primo entre 20 y 25.
g) Ningún número anterior a 2 es primo.

Desde la época de los antiguos griegos, se notó que los enunciados matemáticos pueden expresarse usando una de las formas:

1. El objeto $\boldsymbol{a}$ tiene la propiedad $\boldsymbol{P}$.
2. Todo objeto de tipo $\boldsymbol{Q}$ tiene la propiedad $\boldsymbol{P}$.
3. Existe un objeto de tipo $\boldsymbol{Q}$ que tiene la propiedad $\boldsymbol{P}$.
4. Si enunciado $\boldsymbol{A}$, entonces enunciado $\boldsymbol{B}$.

Por ejemplo,

- “7 es un número primo”.
- Todo triángulo equilátero es equiángulo.
- Existe un número par primo.
- Si $\boldsymbol{n}^2$ es un número par, entonces $\boldsymbol{n}$ es par.

Estas formas lógicas se combinan mediante conexiones como “y”, “o” y “no”, “si…entonces…”, “si…y solo si…”, “para todo” y “existe”, con algunas variantes lingüísticas. A continuación, unos ejemplos.

“Si enunciado A, entonces enunciado B”, suele expresarse también como “enunciado A implica enunciado B”.

"Enunciado A, si y solo si enunciado B", se sustituye por "enunciado A es equivalente a enunciado B", en el sentido mutual de "B dice lo mismo que A", "A significa lo mismo que B", etc.

Los términos "y", "o" y "no", "si…entonces…" y "si…y solo si…", son *términos de enlace* o *conectores* entre enunciados declarativos y permiten construir enunciados más complejos cuya verdad o falsedad dependerá de los enunciados que las constituyan.

Denominaremos *enunciado simple* a aquel en el cual no se requieran términos de enlace. Por ejemplo, "$\sqrt{2}$ es irracional".

Un *enunciado compuesto* es aquel que enlaza dos o más enunciados simples mediante conectores. Por ejemplo, los enunciados

a) "$\sqrt{2}$ es irracional y 4 es un número par"
b) No es cierto que: $(-2)^3=8$
c) Si $x>y$ entonces $2x>2y$
d) $b+a=b+c$, si y solo si, $a=c$
e) No es cierto que: $x>0$ y $x<0$

son compuestos y sus componentes son enunciados simples.

2.1.1. Notación.

Aceptamos un sistema de notación en el cual las proposiciones se indican mediante símbolos literales, denominados *variables proposicionales*, susceptibles de representar cualquier proposición. En este caso, no interesa la expresión verbal de la proposición (su enunciado), sino su significado abstracto.

Representaremos las variables proposicionales simples mediante letras minúsculas *p, q, r*, y posiblemente con subíndices enteros p_1, p_2, etc.

En aras de evitar confrontaciones epistemológicas, nos referiremos no a proposiciones, sino a *enunciados proposicionales* o simplemente *enunciados*, entendidos como enunciados proposicionales.

Para que un enunciado compuesto sea un enunciado proposicional, es decir, un enunciado con sentido contextual, debe formarse de acuerdo con ciertas reglas sintácticas que le confieran tal condición. Los enunciados construidos de acuerdo con las reglas sintácticas se denominan *fórmulas bien formadas* (fbf.). Ya tuvimos ocasión de referirnos a esto en el capítulo anterior. Así, las fbf. serán parte del metalenguaje para referirnos a los enunciados proposicionales.

2.1.2. Los signos y la sintaxis para los relatores.

2.1.2.1. El relator "y".

Esta conexión la encontramos frecuentemente en el lenguaje común y en diversas expresiones a las cuales se les atribuye el mismo significado como "pero", "también", "sin embargo". Por ejemplo, "2 es par, pero es primo" se asimila a "2 es par y 2 es primo".

Teniendo en cuenta el uso natural, requerimos que "y" enlace dos enunciados que sean verdaderos, es decir, conjugue dos verdades puesto que una forma como "3 es mayor que 1 y 1 es mayor que 2", no sería aceptada por alguien que tenga nociones de la ordenación numérica.

Se ha convenido usar el signo $\wedge$ para "y" o también "&". Por ejemplo, la expresión

$$(\pi > 3.1) \wedge (\pi < 3.2)$$

Representa que π es mayor que 3.1 y π es menor que 3.2.

Si p y q son enunciados simples, la siguiente tabla sintetiza los valores veritativos de $p \wedge q$, si indicamos "V" para el valor verdadero y "F" para falso.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
F	F	F
F	V	F
F	F	F

Regla sintáctica con respecto al metalenguaje: Si p y q son enunciados proposicionales, la fórmula $\mathcal{A} = p \wedge q$ es verdadera si y únicamente si tanto **p** como **q** son verdaderas.

En matemáticas, se utilizan las abreviaturas al estudiar las desigualdades.

f) $a \leq b \leq c$, para $(a \leq b) \wedge (b \leq c)$
g) $a \leq b < c$, para $(a \leq b) \wedge (b < c)$
h) $a < b \leq c$, para $(a < b) \wedge (b \leq c)$
i) $a < b < c$, para $(a < b) \wedge (b < c)$.

Ejercicios

1. Utilizando la regla establecida, pruebe que $\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}$ es verdadera siempre que $\boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{p}$ sea verdadera y viceversa. Y que $\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}$ es falsa cuando $\boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{p}$ es falsa.

1. ¿Es posible que $(\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}) \wedge \boldsymbol{r}$ y $\boldsymbol{p} \wedge (\boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{r})$ sean tales que una sea verdadera cuando la otra es falsa?

2.1.2.2 Uso del "no".

Si $\boldsymbol{p}$ es un enunciado, el enunciado "no es cierto $\boldsymbol{p}$" o "no $\boldsymbol{p}$" se denomina la negación de $\boldsymbol{p}$ y se representa por "$\sim\boldsymbol{p}$" o "$-\boldsymbol{p}$" o "$\tilde{p}$".

Es claro que un enunciado o es verdadero o es falso, y que no puede ser verdadero y falso en un mismo contexto. Por lo tanto, admitiremos que, si un enunciado es verdadero, su negación será falsa; si el enunciado es falso, su negación será verdadera. Sintetizamos esto en la tabla que sigue.

$\boldsymbol{p}$	$\sim\boldsymbol{p}$
V	F
F	V

2.1.2.3 El conectivo "o".

Este conectivo se asimila a la disyunción gramatical "o", la cual en el lenguaje natural ofrece una ambigüedad. Consideremos los enunciados:

a) Juan está de pie o hablando.
b) Ese perro está vivo o muerto.

En el primer caso caben las siguientes posibilidades:

- Que esté de pie y hablando.
- Esté de pie y callado.
- No está de pie, pero habla.
- Ni esté de pie, ni hable.

En el segundo enunciado solo puede ocurrir que:

- Esté vivo (luego no está muerto).
- No está vivo, luego está muerto.

Y desde el punto de vista biológico, no puede estar en las dos situaciones.

Así que nuestro "o" tiene una doble identidad en el lenguaje. Para evitarla y eliminar la ambigüedad, se establece la convención *y/o* para indicar la posibilidad de que los dos enunciados sean verdaderos, y el nombre de *excluyente* para casos como b) notándolos con símbolos $\vee$ y $\veebar$.

De esta manera, a) puede escribirse (Juan está de pie) $\vee$ (Juan está hablando), e indica *Juan está de pie* y/o *Juan está hablando.*

Mientras que el enunciado b) se escribe (Ese perro está vivo) $\veebar$ (ese perro está muerto).

De conformidad con la discusión anterior, tendremos:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F
p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

En matemáticas se utiliza normalmente, así como el enunciado compuesto B= $p \vee q$ que se conoce como *disyunción lógica*.

Ejemplo. El enunciado (2<5) $\vee$ (3=1) es verdadero, pero (3<1) $\vee$ (1=0) es falso.

2.1.3. Equivalencia lógica.

Definición 1. Si P y Q son fbf., diremos que P es lógicamente equivalente a Q y escribiremos $P \equiv Q$, si al asignarles el valor de verdad a los componentes de P, la misma asignación a los componentes de Q hace que el valor de verdad asumido por Q sea el mismo valor de verdad asumido por P.

Ejemplo. Si p y q son enunciados $p \vee q \equiv q \vee p$

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	F

Obsérvese que siempre que $p \vee q$ es verdadero, $q \vee p$ lo es, y siempre que $p \vee q$ sea falso, $q \vee p$ lo es, lo que prueba la *equivalencia*. Así, para $\mathcal{A}= p \vee q$ y B= $q \vee p$ se tiene $\mathcal{A}\equiv$B.

En la práctica, $P\equiv Q$ si sus tablas de verdad coinciden línea por línea.

Definición 2. Una fórmula P es *válida* o *tautología* si resulta verdadero para cualquier asignación de valores de verdad de sus componentes. Para indicar que P es una tautología, escribiremos

$P\equiv I.$

Ejemplo. Si p es un enunciado, el enunciado $p \vee (\sim p)$ es una tautología. Observemos

p	$\sim p$	$p \vee (\sim p)$
V	F	V
F	V	V

Así,

$\boldsymbol{p} \vee (\sim\boldsymbol{p}) \equiv \boldsymbol{I}$ (Principio del tercio excluido).

Definición 3. Una fórmula bien formada $\boldsymbol{Q}$ es una *contradicción* o *no factible* o *insatisfactible* si resulta falsa para cualquier asignación de valores de verdad de sus componentes.

Para notar que $\boldsymbol{Q}$ es una contradicción, escribiremos

$$\boldsymbol{Q} \equiv \boldsymbol{O}.$$

Ejemplo:

$\boldsymbol{P} \wedge (\sim\boldsymbol{p}) \equiv \boldsymbol{O}$ (Principio de contradicción).

p	$\sim p$	$p \wedge (\sim p)$
V	F	F
F	V	F

Ejemplo:

$\sim (\sim\boldsymbol{p}) \equiv \boldsymbol{p}$ (Doble negación o involución).

p	$\sim p$	$\sim (\sim p)$
V	F	V
F	V	F

De lo anterior se deduce que la negación de una tautología es una contradicción y la negación de una contradicción es una tautología; esto es:

$\sim\boldsymbol{I} \equiv \boldsymbol{O}$ y $\sim\boldsymbol{O} \equiv \boldsymbol{I}$

Las equivalencias juegan un papel primordial en matemáticas. Por ejemplo, decir

$|x| < 5$

es equivalente a decir

$-5 < x < 5$

Si **P** y **Q** son fórmulas bien formadas, pruebe las siguientes equivalencias lógicas:

1. $P \wedge I \equiv P$
2. $P \vee O \equiv P$
3. $P \vee I \equiv I$
4. $P \wedge O \equiv O$
5. $P \wedge P \equiv P$
6. $P \vee P \equiv P$
7. $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$

2.1.4. Agrupamiento y paréntesis.

En el lenguaje ordinario, el agrupamiento adecuado de oraciones simples que se combinan en una oración compuesta se indica por una variedad de medios o dispositivos lingüísticos: coma, punto y coma, punto, etc., y reglas sintácticas.

En el lenguaje formal, al simbolizar proposiciones, los dispositivos del lenguaje natural se traducen en un adecuado uso de paréntesis y ciertas reglas semánticas de formación.

Por ejemplo, la conjunción de dos negaciones como “Pedro no estudia en la universidad y María no estudia en la universidad”, se representaría por

$P = (\sim p) \wedge (\sim m)$

donde p significa "Pedro estudia en la universidad" y m significa "María estudia en la universidad".

Una notación como $\sim p \wedge \sim m$ generaría confusión.

Teniendo en cuenta lo anterior, notaremos los enunciados compuestos (P), (Q), etc., pero para simplificar la lectura acordamos que si un enunciado es simple, no requiere paréntesis.

Los paréntesis son como los signos de puntuación del lenguaje formal. Por ejemplo, supongamos que se tiene lo siguiente: "o x es mayor que 1 y y es igual a 2, o y es mayor que 0". Esto lo simbolizamos de la siguiente manera.

Sean **p** = "x>1" (p representa x>1)

q = "y=2"

r = "y>0"

Entonces el enunciado compuesto anterior es $(p \wedge q) \vee r$; una *disyunción*.

Si el enunciado es "x>1 y, o y=2 o y>0" tendríamos $p \wedge (q \vee r)$; una *conjunción*.

Si elaboramos tablas de verdad para A= $(p \wedge q) \vee r$ y B= $p \wedge (q \vee r)$ tendremos lo siguiente.

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V
F	V	V	F	V	V	F
V	F	F	F	F	F	F
F	V	F	F	F	V	F
F	F	V	F	V	V	F

$$(p \wedge q) \vee r \not\equiv p \wedge (q \vee r)$$

Ejercicios. Verifique las siguientes equivalencias:

1) $p\wedge (q \wedge r)\equiv(p \wedge q)\wedge r$ 2) $p \vee (q \vee r)\equiv(p \vee q)\vee r$

3) $\sim(p \wedge q)\equiv(\sim p)\vee(\sim q)$ 4) $\sim(p \vee q)\equiv(\sim p)\wedge(\sim q)$

2.1.5. Los conectivos condicional y bicondicional.

En el lenguaje común encontramos expresiones como "si hace mal tiempo cancelamos el vuelo", o "es suficiente con que haga mal tiempo para cancelar el vuelo", o "es necesario cancelar el vuelo si hay mal tiempo". Analicemos lo siguiente; el enunciado "o no hace mal tiempo o cancelamos el vuelo", ¿significa lo mismo que los anteriores? En el lenguaje natural es difícil la identificación, pues no es usual tal acepción, sin embargo, en el lenguaje formal esta es precisamente la acepción que nos permite definir el *conectivo* "si…entonces…", el cual se representa con $\Rightarrow$.

Definición 4. Si p y q son enunciados, se define

$$p \Rightarrow q :\equiv q \vee (\sim p)$$

que se lee "si p, entonces q".

De acuerdo con esta definición, podemos confeccionar la tabla de valores de verdad para este conectivo.

p	q	$\sim p$	$q \vee (\sim p)$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

Por la definición

p	q	$p\Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

En el enunciado $\boldsymbol{p \Rightarrow q}$, $\boldsymbol{p}$ se denomina el *antecedente* y $\boldsymbol{q}$ el *consecuente*.

La fórmula $\boldsymbol{p \Rightarrow q}$ no designa una *consecuencia lógica*, sino una relación de *causalidad antecedente consecuente* en el sentido de que $\boldsymbol{p}$ lleva a $\boldsymbol{q}$, puesto que si $\boldsymbol{p}$ falsa, $\boldsymbol{q}$ puede independientemente ser falsa o verdadera.

Por ejemplo, "si 1+1=2 entonces 2 es primo" es verdadera, independiente de la relación directa de causalidad entre el hecho de que 2 sea suma de 1 y 1, y el concepto de número primo.

Análogamente, "(1+1=3) ⇒ (3 es número par)" es verdadera, pero "(1+1=2) ⇒2 es impar" es falsa.

Definición 5. (**Bicondicional).** Si p y q son enunciados, se define

$$p \Leftrightarrow q :\equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

Utilizando tal definición, se puede construir la tabla de valores de verdad, la cual dejamos como ejercicio.

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p \Leftrightarrow q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Utilizando la definición se puede observar que $\boldsymbol{P \equiv Q}$ equivale a decir que $\boldsymbol{P \Leftrightarrow Q}$ es tautología.

En efecto, de la equivalencia

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p \Leftrightarrow q}$
V	V	V
F	F	V

2.1.6. Reglas de formación

En primer lugar, representaremos los enunciados simples por $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{s}$… o con $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{p}_3$… Los enunciados compuestos serán representados por ($\mathcal{A}$), (B), etc.

Establecemos las siguientes reglas de formación:

1. Un enunciado simple $\boldsymbol{p}$ es una fórmula bien formada.
2. Si ($\mathcal{A}$) es una fórmula bien formada, entonces ($\sim\mathcal{A}$) es una fórmula bien formada.
3. Si ($\mathcal{A}$) y ($\mathcal{B}$) son fórmulas bien formadas, entonces $(\mathcal{A})\wedge(\mathcal{B})$, $(\mathcal{A})\vee(\mathcal{B})$, $(\mathcal{A})\Rightarrow(\mathcal{B})$ y $(\mathcal{A})\Leftrightarrow(\mathcal{B})$ son fórmulas bien formadas.
4. Una cadena de enunciados construida mediante un número finito de combinaciones de 1., 2., y 3., y el uso adecuado de signos de agrupación, es una fórmula bien formada.

Usaremos la abreviatura fbf. para *fórmula bien formada.*

Ejemplo. $\boldsymbol{p}\Rightarrow(\boldsymbol{q}\vee\boldsymbol{r})$ es una fórmula bien formada. Si asignamos $\boldsymbol{p}\leftrightarrow(\mathcal{A})$, $\boldsymbol{q}\leftrightarrow(\mathcal{B})$ y $\boldsymbol{r}\leftrightarrow(\mathcal{W})$, la fórmula $\boldsymbol{p}\Rightarrow(\boldsymbol{q}\vee\boldsymbol{r})$ será $(\mathcal{A})\Rightarrow((\mathcal{B})\vee(\mathcal{W}))$, que es una fórmula bien formada, ya que $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{W}$ son fórmulas bien formadas; $(\mathcal{A})\vee(\mathcal{W})$ lo es y, por lo tanto, $\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{A})\vee(\mathcal{W})$ es una fbf.

Las fórmulas bien formadas eliminan la ambigüedad en los enunciados compuestos y en las expresiones matemáticas; tal es el caso de una expresión como $\boldsymbol{p}\wedge\boldsymbol{q}\vee\boldsymbol{r}$ en la cual no identificamos al relator principal y puede significar $(\boldsymbol{p}\wedge\boldsymbol{q})\vee\boldsymbol{r}$ o $\boldsymbol{p}\wedge(\boldsymbol{q}\vee\boldsymbol{r})$.

Ejemplo: el enunciado "si x es menor que 2 entonces x es igual a 1 o x es igual a 0" se forma

$(x<2)\Rightarrow(x=1\vee x=0)$

"Si x es menor que 2, entonces x es igual a 1; y x es igual a 0" se forma

$((x<2)\Rightarrow(x=1))\wedge(x=0)$

Ejercicios. Simbolice las proposiciones cuyos enunciados se indican a continuación

1. y=4, y si $x<y$ entonces $x<3$.
2. o $x>5$ y $x<7$, o x no es igual a 6.
3. Si $x+3>5$ y $y-2>x$ entonces $y>4$.

En los ejercicios (4) al (10) se ha escrito el nombre de cada proposición molecular correspondiente a la fórmula derecha; agregue los paréntesis necesarios.

Las denominadas leyes básicas del cálculo de enunciados

4. Condicional $p \Rightarrow r \wedge s$
5. Condicional $p \vee q \Rightarrow r$
6. Conjunción $p \Rightarrow q \wedge r$
7. Disyunción $p \Rightarrow r \vee q$
8. Conjunción $p \wedge q \Rightarrow r$
9. Disyunción $q \Rightarrow r \vee (\sim s)$
10. Disyunción $x>0 \vee x\neq 0 \wedge y=z$

Para evitar la proliferación de paréntesis como en las fórmulas $(p \wedge q) \Rightarrow r$, $p \Rightarrow (q \vee r)$, $(\sim p) \wedge q$, se establecen algunas convenciones.

- El $\Rightarrow$ es más fuerte que los demás términos de enlace $\wedge$, $\vee$ y $\sim$.

  Así, $(p \wedge q) \Rightarrow r$ puede escribirse $p \wedge q \Rightarrow r$, en lugar de $p \Rightarrow (q \vee r)$ se escribe $p \Rightarrow q \vee r$, pero en $(p \Rightarrow q) \vee r$ no es posible eliminar el paréntesis pues el término de enlace dominante es $\vee$.

- El bicondicional $\Leftrightarrow$ es más fuerte que $\Rightarrow$.

  Ejemplo: $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((\sim q) \Rightarrow (\sim p))$, se abrevia $p \Rightarrow q \Leftrightarrow (\sim q) \Rightarrow (\sim p)$.

- El ~ es el más débil de los términos de enlace; así, $(\sim p) \vee q$ se abrevia $\sim p \vee q$; según este convenio $(\sim q) \Rightarrow (\sim p)$ se abrevia como $\sim q \Rightarrow \sim p$, pero $\sim (p \wedge q)$ no se presta para eliminar el paréntesis ya que nos dice que toda la fórmula $(\mathcal{A}) = (p \wedge q)$ está negada.

2.1.7. Equivalencias lógicas básicas.

La siguiente tabla recoge equivalencias lógicas que pueden considerarse básicas para el desarrollo de un cálculo formal de enunciados o proposicional. Utilizaremos mayúsculas para fórmulas.

Muchas de ellas, si no todas, se han verificado en las secciones anteriores para enunciados simples y las trasladamos al metalenguaje, siendo conocidas por los nombres que se indican para cada una o paquete de algunas de las mismas.

LEYES BÁSICAS

1.	$P \wedge P \equiv P$	$P \vee O \equiv P$	Identidad
	$P \wedge O \equiv O$	$P \vee I \equiv I$	
2.	$P \wedge P \equiv P$	$P \vee P \equiv P$	Idempotencia
3.	$\sim (\sim P) \equiv P$		Involución
4.	$\sim O \equiv I$	$\sim I \equiv O$	Complemento
5.	$P \wedge (\sim P) \equiv O$		Contradicción
6.	$P \vee (\sim P) \equiv I$		Tercio excluso
7.	$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$	$P \vee Q \equiv Q \vee P$	Conmutativas
8.	$P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \vee R$		Asociativas
	$P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$		
9.	$\sim (P \wedge Q) \equiv (\sim P) \vee (\sim Q)$		De Morgan
	$\sim (P \vee Q) \equiv (\sim P) \wedge (\sim Q)$		
10.	$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$		Distributivas
	$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$		

Utilizando estas leyes básicas podemos realizar cálculos con proposiciones de la misma manera que realizamos cálculos algebraicos utilizando las leyes de la suma y de la multiplicación en un contexto determinado.

Ejemplo 1. Simplifique $P \vee (\sim P \vee Q)$.

Solución:

$$\begin{aligned} P \vee (\sim P \vee Q) &\equiv (P \vee \sim P) \vee (P \vee Q) && \text{[Distributiva]} \\ &\equiv I \vee (P \vee Q) && \text{[Tercio excluso]} \\ &\equiv (P \vee Q) \vee I && \text{[Conmutativa]} \\ &\equiv I && \text{[Identidad]} \end{aligned}$$

Ejemplo 2. Encuentre una fórmula equivalente a $\sim (P \Rightarrow Q)$

Solución:

$$\begin{aligned} \sim (P \Rightarrow Q) &\equiv \sim (Q \vee (\sim P)) && \text{[Definición de } \Rightarrow\text{]} \\ &\equiv (\sim Q) \wedge (\sim (\sim P)) && \text{[Morgan]} \\ &\equiv (\sim Q) \wedge P && \text{[Involución]} \\ &\equiv P \wedge (\sim Q) && \text{[Conmutativa]} \end{aligned}$$

En consecuencia,
$\sim (P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge (\sim Q)$

Ejemplo 3. Demuestre que $(P \Rightarrow Q) \equiv (\sim Q \Rightarrow \sim P)$

Demostración:

$$P \Rightarrow Q \equiv Q \vee (\sim P) \qquad \text{[Definición de } \Rightarrow\text{]}$$

$\equiv \sim(\sim Q) \vee (\sim P)$	[Involución]
$\equiv (\sim P) \vee \sim(\sim Q)$	[Conmutativa]
$\equiv (\sim Q) \Rightarrow (\sim P)$	[Definición de ⇒]

Ejemplo 4. Pruebe que $P \Rightarrow P \vee Q$ es una tautología.

Demostración:

$P \Rightarrow P \vee Q$	$\equiv (P \vee Q) \vee (\sim P)$	[Definición de ⇒]
	$\equiv (\sim P) \vee (P \vee Q)$	[Conmutativa]
	$\equiv ((\sim P) \vee P) \vee Q$	[Asociativa]
	$\equiv I \vee Q$	[Tercio excluso]
	$\equiv Q \vee I$	[Conmutativa]
	$\equiv I$	[Identidad]

Ejemplo 5. Pruebe que $(P \Rightarrow Q) \wedge P \Rightarrow Q$ es una tautología.

Demostración:

$$
\begin{aligned}
(P \Rightarrow Q) \wedge P \Rightarrow Q \quad & \equiv (Q \vee (\sim P)) \wedge P \Rightarrow Q \\
& \equiv P \wedge (Q \vee (\sim P)) \Rightarrow Q \\
& \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge \sim P) \Rightarrow Q \\
& \equiv (P \wedge Q) \vee O \Rightarrow Q \\
& \equiv P \wedge Q \Rightarrow Q \\
& \equiv Q \vee \sim (P \wedge Q)
\end{aligned}
$$

$$\equiv Q \vee (\sim P \vee \sim Q)$$

$$\equiv (Q \vee \sim P) \vee (\sim Q)$$

$$\equiv (\sim P \vee Q) \vee (\sim Q)$$

$$\equiv (\sim P) \vee (Q \vee \sim Q)$$

$$\equiv (\sim P) \vee I$$

$$\equiv I$$

Ejemplo 6. Pruebe la ley de absorción $P \vee (P \wedge Q) \equiv P$.

Demostración

$P \vee (P \wedge Q) \equiv (P \wedge \mathrm{I}) \vee (P \wedge Q)$	(Identidad, $(P \wedge \mathrm{I}) \equiv P$)
$\equiv P \wedge (\mathrm{I} \vee Q)$	(Distributiva)
$\equiv P \wedge \mathrm{I}$	(Identidad, $\mathrm{I} \vee Q \equiv \mathrm{I}$)
$\equiv P$	(Identidad)

Ejercicios

1. Exprese la razón que justifique los pasos en la demostración del Ejemplo 5.

¿Puede hacer otra demostración?

2. Demuestre:

   a. $P \wedge (P \vee Q) \equiv P$

   b. $P \wedge (\sim Q) \Rightarrow O \equiv P \Rightarrow Q$

3. Demuestre que las siguientes formas proposicionales son tautologías.

a. $P \Rightarrow P$

b. $(P \Rightarrow Q) \wedge \sim Q \Rightarrow (\sim P)$

c. $(P \vee Q) \wedge (\sim P) \Rightarrow Q$

d. $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

e. $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \vee R \Rightarrow Q \vee R)$

f. $P \wedge Q \Rightarrow P$, $P \wedge Q \Rightarrow Q$

g. $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \wedge R \Rightarrow Q \wedge R)$

h. $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow Q \vee R)$

i. $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\sim P \vee \sim R \Rightarrow \sim Q \vee \sim R)$

2.2. La deducción lógica

Una de las funciones esenciales del cálculo proposicional consiste en establecer de manera precisa reglas lógicas mediante las cuales podamos decidir cómo con un conjunto de fórmulas proposicionales $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$,…$\boldsymbol{P}_N$ podremos obtener otra fórmula $\boldsymbol{P}$ y si esta fórmula emana correctamente de las fórmulas $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$,…$\boldsymbol{P}_N$.

Las fórmulas dadas $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$,…$\boldsymbol{P}_N$ se denominan *premisas*; las reglas en cuestión son *reglas de inferencia*, y $\boldsymbol{P}$ es una *fórmula deducida* o conclusión.

La sucesión de pasos lógicos que van desde las premisas a la conclusión se denomina *deducción*.

Cuando después de un análisis exhaustivo, decidimos que efectivamente no hay errores, podemos garantizar la validez de la deducción y de la conclusión: se tiene entonces una demostración o prueba. En este caso se dice que la conclusión $\boldsymbol{P}$ se deduce lógicamente de las premisas $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$,…$\boldsymbol{P}_N$.

En la deducción, adjuntamos las premisas $\boldsymbol{P}_1 \wedge \boldsymbol{P}_2 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{P}_N$ y al verificarse la validez de la conclusión, escribiremos

$\boldsymbol{P_1} \wedge \boldsymbol{P_2} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{P_N}. \vDash \boldsymbol{P}$.

El propósito de esta sección es establecer las reglas de inferencia para las deducciones lógicamente válidas.

2.2.1. Implicación tautológica.

Definición 6. Diremos que la fórmula bien formada $\boldsymbol{A}$ implica tautológicamente a la fórmula bien formada $\boldsymbol{B}$, si la fórmula $\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}$ es una tautología. En este caso escribiremos $\boldsymbol{A} \vDash \boldsymbol{B}$.

Ejemplo: $\boldsymbol{P} \vDash P \vee \boldsymbol{Q}$ ya que $\boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q}$ es una tautología. Obtenemos así una regla de inferencia, “de $\boldsymbol{P}$ se deduce lógicamente $\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q}$”.

El ejemplo anterior nos muestra la manera de obtener reglas de inferencia a partir de tautologías conocidas. Algunas de esas reglas se indican a continuación, enunciándolas verbal y simbólicamente, asignándoles nombres que obedecen a contextos históricos convencionales.

2.2.1.1. Regla de modus ponendo ponens (MPP).

La fórmula $(P \Rightarrow Q) \wedge P \Rightarrow Q$ es una tautología; lo que nos dice que $(P \Rightarrow Q) \wedge P \vDash Q$
esto es, “de las premisas $\boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{Q}$ y $\boldsymbol{P}$ se deduce $\boldsymbol{Q}$”.

Esta regla, una de las más utilizadas en las matemáticas, deriva su nombre de la locución latina *ponere* que significa afirmar, lo que nos dice que cuando una premisa es condicional $\boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{Q}$ y la otra asume el antecedente $\boldsymbol{P}$, la conclusión $\boldsymbol{Q}$ se deriva de ellas.

Algunos autores suelen disponer las premisas en columnas y enumerarlas, enunciando la conclusión al final.

1.	$\boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{Q}$	(p)	
2.	$\boldsymbol{P}$	(p)	(MPP)
$\vDash$	$\boldsymbol{Q}$	(conclusión)	

2.2.1.2. Regla de adjunción lógica (AL).

Esta regla nos dice lo que afirmamos anteriormente, que dadas las premisas P_1 y P_2, la conjunción $P_1 \wedge P_2$ es válida al considerarse verdaderas P_1 y P_2 por separado.

La escribimos "de las premisas P_1 y P_2 se deduce $P_1 \wedge P_2$"; de "Pedro estudia" y "Pedro juega fútbol", se deduce "Pedro estudia y Pedro juega fútbol".

2.2.1.3. Regla de adición (A).

Ya vimos en un ejemplo esta regla. "De la premisa P se deduce $P \vee Q$". Así, de "$x>0$" deducimos "$x>0$" ∨ "$x^2=1$". Escribimos:

1. P (p)

$\vDash$ $P \vee Q$ (Conclusión) (A)

2.2.1.4. Regla de simplificación lógica (SL).

Las tautologías $P \wedge Q \Rightarrow P$ y $P \wedge Q \Rightarrow Q$ nos permiten expresar la regla "de $P \wedge Q$ deducimos cualquiera de sus componentes".

2.2.1.5. Regla de modus tollendo tollens (MTT).

Recordando que la fórmula $(P \Rightarrow Q) \wedge \sim Q \Rightarrow (\sim P)$ podemos concluir

$$(P \Rightarrow Q) \wedge \sim Q \vDash (\sim P)$$

es decir, "de las premisas $P \Rightarrow Q$ y $\sim Q$ se deduce $\sim P$".

De otra manera,

1. $P \Rightarrow Q$ (p)
2. $\sim Q$ (p)

$\vDash$ $\sim P$ (Conclusión)

El nombre proviene de *tollere* que significa negar; negando el consecuente, se niega el antecedente del condicional.

Ejemplo 1. La notación ***a***≠***b*** signada ~(***a***=***b***).

"Si x+5=8, entonces x =3" y "x≠3". En consecuencia, "x+5≠ 8".

En símbolos:

1.	$x+5=8 \Rightarrow x=3$	(p)
2.	$\sim(x=3)$	(p)
$\vDash$	$\sim(x+5=8)$	(conclusión)

2.2.1.6. Regla de modus tollendo ponens (MTP).

Las tautologías $(P \vee Q) \wedge (\sim P) \Rightarrow Q$ y $(P \vee Q) \wedge (\sim Q) \Rightarrow P$ nos conducen a esta regla.

$$(P \vee Q) \wedge (\sim P) \vDash Q$$

$$(P \vee Q) \wedge (\sim Q) \vDash P$$

O simbólicamente:

1.	$P \vee Q$	(p)
2.	$\sim Q$	(p)
$\vDash$	P	(Conclusión)

Ejemplo 2. "o x>5 o x <2" pero ~ (x<3) en conclusión "x>5".

2.2.1.7. Regla del silogismo hipotético (SH).

Prueba que $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$ es una tautología. Si no lo has probado, adelante.

Podemos entonces enunciar la *regla de silogismo hipotético*.

"De las premisas $P \Rightarrow Q$ y $Q \Rightarrow R$ deducimos $P \Rightarrow R$".

De otra manera:

1.	$P \Rightarrow Q$	(p)	
2.	$Q \Rightarrow R$	(p)	(SH)
$\vDash$	$P \Rightarrow R$		

2.2.1.8. Regla del silogismo disyuntivo (SD).

La fórmula

$$(P \Rightarrow Q) \wedge (R \Rightarrow S) \wedge (P \vee R) \Rightarrow (Q \vee S)$$

es una tautología. Con base en ella enunciamos la *regla del silogismo disyuntivo*.

"De las premisas $P \Rightarrow Q$, $R \Rightarrow S$ y $P \vee R$, se deduce que $Q \vee S$".

O

1.	$R \Rightarrow S$	(p)	
2.	$P \vee R$	(p)	(SD)
$\vDash$	$Q \vee S$		

2.2.1.9 Reglas de equivalencia.

Estas reglas nos dicen que:

a) Si $A \equiv B$, se tiene que $A \vDash B$ y $B \vDash A$.

Por ejemplo, de $p \wedge q$ se deduce $q \wedge p$. De $p \vee q$ se deduce $q \vee p$.

b) Si $A \equiv B$ y A es parte de una fórmula $\mathcal{A}$, entonces la aparición de A en $\mathcal{A}$ se puede sustituir por B, surgiendo una nueva fórmula $B \equiv A$.

El proceso de obtener B al sustituir A por B en $\mathcal{A}$ se nota $B \equiv A(B/A)$

Ejemplo: $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R) \vDash P \Rightarrow (R \vee \sim Q)$ $\quad (R \vee \sim Q / Q \Rightarrow R)$

2.2.1.10. Regla de sustitución por interpretación.

Una fórmula A que se aparezca en una fórmula $\mathcal{A}$ puede sustituirse por una fórmula B siempre que la misma sustitución se efectúe en cada una de las apariciones de A en $\mathcal{A}$.

Ejemplo: Sea $\mathcal{A} := P \vee P \Rightarrow P$ entonces

1) $\mathcal{A}(\sim P / P) := (\sim P) \vee (\sim P) \Rightarrow (\sim P)$ (Sustitución de P por $\sim P$ en $\mathcal{A}$).

2) $\mathcal{A}(P \Rightarrow Q / P) := (P \Rightarrow Q) \vee (P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$ (Sustitución de P por $P \Rightarrow Q$ en $\mathcal{A}$).

2.2.1.11. Reglas de premisa.

El orden y la forma en que se combinan premisas no es importante, lo que interesa es vislumbrar qué premisas se pueden combinar para obtener una conclusión y, una vez obtenida, podemos tomarla como una nueva premisa. Tenemos así las siguientes reglas.

1. **Regla P.** Podemos utilizar una premisa en cualquier paso de una deducción.

2. **Regla T.** Si una fórmula P se deduce tautológicamente de algunas premisas, podemos introducir P en la deducción como una nueva premisa.

2.2.1.12. Regla de tautología.

Una tautología puede usarse como premisa en una deducción.

Con estas reglas podemos elaborar deducciones formales y pruebas de validez de sus conclusiones.

Ejemplo 3. Analicemos el siguiente argumento.

"Si estudio o soy un genio, entonces aprobaré el curso. Si apruebo el curso, entonces pasaré al siguiente curso. No pasaré al siguiente curso. Entonces no soy un genio".

Para determinar el hecho de que las premisas implican lógicamente la conclusión, procedemos de la siguiente manera.

En primer lugar, representamos los enunciados simples que aparecen en las premisas:

p := "estudio"

q := "soy un genio"

r := "aprobaré el curso"

s := "pasaré al siguiente curso"

En segundo lugar, representaremos las premisas y trabajaremos con ellas.

1.	$p \vee q \Rightarrow r$	(p)
2.	$r \Rightarrow s$	(p)
3.	$\sim s$	(p)
4.	$\sim r$	(MTT, 2,3)

5. $\sim(p \vee q)$ (MTT, 1,4)

6. $(\sim p) \wedge (\sim q)$ (Morgan, 5)

7. $\sim q$ (SL, 6)

Por lo tanto, la conclusión se deduce lógicamente de las premisas.

Los nombres y números entre paréntesis indican la regla utilizada y las premisas a las cuales se aplica.

Ejemplo 4. Trate de probar formalmente que la deducción conlleva una conclusión válida.

Si $p \Rightarrow (q \vee r)$, $q \Rightarrow s$, $r \Rightarrow t$ y p ; entonces $s \vee t$.

Demostración:

1. $p \Rightarrow q \vee r$ (p)

2. $q \Rightarrow s$ (p)

3. $r \Rightarrow t$ (p)

4. p (p)

5. $q \vee r$ (MPP, 1,4)

6. $s \vee t$ (SD, 2,3,5)

Luego las cuatro premisas implican la conclusión $s \vee t$.

Ejemplo 5. (En metalenguaje).

Demostrar P

1. $\sim R$ (p)

2. $\sim P \Rightarrow Q$ (p)

3. $Q \Rightarrow R$ (p)

4. $\sim P \Rightarrow R$ (SH, 2,3)

5.	$\sim(\sim P)$	(MTT, 4,1)
6.	P	(Involución, 5)

Ejemplo 6. Demostrar $y+8<12$

1.	$x+8=12 \vee x \neq 4$	(p)
2.	$x=4 \wedge y<x$	(p)
3.	$x+8=12 \wedge y<x \Rightarrow y+8<12$	(p)
4.	$x=4$	(SL, 2)
5.	$x+8=12$	(MTP, 1,4)
6.	$y<x$	(SL, 2)
7.	$x+8=12 \wedge y<x$	(AL, 5,6)
8.	$y+8<12$	(MPP, 3,7)

Ejemplo 7. Demostrar $G \Rightarrow B$

1.	$C \Rightarrow (D \wedge B)$	(p)
2.	$\sim G \vee C$	(p)
3.	D	(p)
4.	G	(p)
5.	$\sim(\sim G)$	(Involución)
6.	C	(MTP, 2,6)
7.	$D \wedge B$	(MPP, 1,6)
8.	B	(SL, 7)

9. $B \vee (\sim G)$ (A, 7)

10. $G \Rightarrow B$ (Equivalencia)

Ejemplo 8. Demostrar $q \vee r$

1. $p \Rightarrow q$ (p)
2. $p \vee r$ (p)
3. $r \Rightarrow r$ (Tautología)
4. $q \vee r$ (SD, 1,2,3)

Ejemplo 9. "Si obtengo el cargo y trabajo duro, me ascenderán. Si me ascienden, ganaré dinero y seré feliz. No seré feliz, por lo tanto, o no obtendré el cargo, o no trabajaré duro".

Hagamos:

c:= "obtengo el cargo"

t:= "trabajo duro"

a:= "me ascenderán"

d:= "ganaré dinero"

f:= "seré feliz"

El razonamiento en lenguaje formal es

1. $c \wedge t \Rightarrow a$ (p)
2. $a \Rightarrow d \wedge f$ (p)
3. $\sim f$

$\vDash$ $(\sim c) \vee (\sim t)$

Demostración:

1.	$c \wedge t \Rightarrow a$	(p)
2.	$a \Rightarrow d \wedge f$	(p)
3.	$\sim f$	(p)
4.	$c \wedge t \Rightarrow d \wedge f$	(SH, 1,2)
5.	$\sim f \vee \sim d$	(A,3)
6.	$\sim \left(f \wedge d \right)$	(Morgan, 5)
7.	$\sim \left(d \wedge f \right)$	(Conmutativa, 6)
8.	$\sim \left(c \wedge t \right)$	(MTT, 4,7)
9.	$\left(\sim c \right) \vee \left(\sim t \right)$	(Morgan, 8)

Ejercicios

En los ejercicios (1) al (5), exprese cada razonamiento en notación lógica utilizando las variables sugeridas en orden de aparición. Luego, proporcione una demostración, en caso de ser posible.

1. Si tus amigos no llegan, o está lloviendo, entonces la fiesta fracasará. En efecto, está lloviendo. En consecuencia, la fiesta fracasará (***a***, ***l***, ***f***).

2. Si no hay subsidios del gobierno para la agricultura, entonces habrá controles gubernamentales sobre la agricultura. Si hay controles gubernamentales sobre la agricultura, entonces no hay depresión agrícola. Hay depresión o sobreproducción agrícola. Entonces, hay subsidios del gobierno para la agricultura (***s***, ***c***, ***d***, ***e***).

3. Si el gobierno es injusto, hay represión. Si el gobierno es justo, entonces hay libertad de expresión y el gobierno es débil. El gobierno no es débil. En consecuencia, hay represión (***j***, ***r***, ***l***, ***d***).

4. O el golpe de estado es justo, o es un atentado contra la democracia. Si el pueblo estaba con el gobierno y este fue elegido democráticamente, el golpe de estado es injusto. De hecho, el pueblo estaba con el gobierno. El gobierno fue elegido democráticamente. En consecuencia, el golpe de estado es un atentado a la democracia (***j***, ***a***, ***p***, ***d***).

5. Si el reloj está adelantado, entonces el vigilante llegó antes de las diez y vio partir el carro de Manuel. Si Manuel dice la verdad, entonces el vigilante no vio partir su carro. O Manuel dice la verdad o estaba en el edificio en el momento del crimen. El reloj está adelantado. Por lo tanto, Manuel estaba en el edificio en el momento del crimen (***a***, ***v***, ***p***, ***m***, ***e***).

Para los ejercicios (6) a (10) las premisas están dadas de forma simbólica. Dar una deducción completa de la proposición que se quiere demostrar.

6. Demostrar $\sim T$

1.	$P \Rightarrow S$	(p)
2.	$P \wedge Q$	(p)
3.	$S \wedge R \Rightarrow T$	(p)
4.	$Q \Rightarrow R$	(p)

7. Demostrar $T \vee S$

1.	$Q \vee T$	(p)
2.	$Q \Rightarrow R$	(p)
3.	$\sim R$	

8. Demostrar $R \wedge (P \vee Q)$

1.	$P \vee Q$	(p)
2.	$Q \Rightarrow R$	(p)
3.	$P \Rightarrow T$	(p)

4. $\sim T$

9. Demuéstrese $(\sim T) \wedge S$

1. $P \Rightarrow \sim T$ (p)
2. $P \vee R$ (p)
3. $P \Rightarrow \sim Q$ (p)
4. $T \Rightarrow Q$ (p)
5. S

10. Demuéstrese $\sim (R \wedge \sim T)$

1. $(R \wedge S) \vee P$ (p)
2. $Q \Rightarrow \sim P$ (p)
3. $T \Rightarrow \sim P$
4. $Q \vee T$

Dar una demostración formal de cada uno de los ejercicios del (11) al (14).

11. Demostrar $x=2$

1. $x < 3 \vee x > 4$ (p)
2. $x < 3 \Rightarrow x \neq y$ (p)
3. $x > 4 \Rightarrow x \neq y$ (p)
4. $x < y \vee x \neq y \Rightarrow x \neq 4 \wedge x = 2$ (p)

12. Demostrar $y \nless 4 \wedge x < y$

1. $x > y \vee x < 4$ (p)
2. $x < 4 \Rightarrow x < y \wedge y \nless 4$
3. $x > y \Rightarrow x = 4$
4. $x \neq y$

Nota: $x \nless 4$ significa $\sim(x < 4)$.

13. Demostrar $xy \neq 0$

1. $y>x \Leftrightarrow x=0$
2. $xy = 0 \Leftrightarrow x=0$
3. $y \ngtr x$

Sugerencia: $A \Leftrightarrow B$ representa $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$, así

$A \Leftrightarrow B \vDash A \Rightarrow B$

$A \Leftrightarrow B \vDash B \Rightarrow A$

14. Demostrar $\sim(x = y \vee y \ngtr 1)$

1. $y \neq 1 \wedge y \nless 1$ (p)
2. $y \ngtr 1 \Rightarrow y<1 \vee y=1$ (p)
3. $x = 3 \vee x > 3$ (p)
4. $x > 3 \Rightarrow x \neq y$ (p)
5. $x = 3 \Rightarrow x \neq y$ (p)

2.2.2. Otras reglas de inferencia.

2.2.2.1. Regla de la prueba condicional.

En primer lugar, probemos que P, Q y R son fórmulas bien formadas.

$$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R) \equiv (P \wedge Q) \Rightarrow R$$

Lo que nos dice que o importamos Q al antecedente, o lo exportamos como antecedente de consecuente, que en este caso es condicional. Demostremos la equivalencia.

$$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R) \equiv (Q \Rightarrow R) \vee (\sim P) \qquad [\text{Def}\Rightarrow]$$

$$\equiv (R \vee (\sim Q)) \vee (\sim P) \qquad [\text{Def}\Rightarrow]$$

$\equiv R \vee \left(\left(\sim Q \right) \vee \left(\sim P \right) \right)$	[Asociativa]
$\equiv R \vee \left(\sim \left(Q \wedge P \right) \right)$	[Morgan]
$\equiv Q \wedge P \Rightarrow R$	[Def⇒]
$\equiv P \wedge Q \Rightarrow R$	[Conmutativa]

Entonces se tiene que si $P \wedge Q \vDash R$, se tiene $P \vDash (Q \Rightarrow R)$; esto es, si R se puede deducir de $P \wedge Q$, equivale a que $Q \Rightarrow R$ puede deducirse de P únicamente.

En el caso de que P sea de la forma $P = P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n$, tendremos $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \wedge Q \vDash R$ si y solo si $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \vDash (Q \Rightarrow R)$.

Esto nos conduce a la *regla de la prueba condicional* o (RPC). "Si al adjuntar la fórmula Q a un conjunto $\mathcal{A}$ de premisas se deduce R, entonces del conjunto de premisas $\mathcal{A}$ se deduce $Q \Rightarrow R$".

Esta regla es muy conveniente cuando la conclusión es de forma $Q \Rightarrow R$ o $Q \vee R$, dado que
$Q \vee R \equiv \sim Q \Rightarrow R$.

Ejemplo 1. Demostrar $P \Rightarrow \left(S \vee T \right)$, dadas las premisas:

1.	$P \Rightarrow \left(Q \vee R \right)$	(p)
2.	$R \Rightarrow T$	(p)
3.	$Q \Rightarrow S$	(p)

Como la conclusión es una condicional, introducimos su antecedente como una nueva premisa y realizamos la deducción.

1.	$P \Rightarrow \left(Q \vee R \right)$	(p)
2.	$R \Rightarrow T$	(p)

3.	$Q \Rightarrow S$	(p)
4.	P	(p*)
5.	$Q \vee R$	(MPP, 1,4)
6.	$T \vee S$	(SH, 2,3,5)
7.	$P \Rightarrow TS$	(RPC, 4,5,6)

Ejemplo 2. "Si Pepe está en la cárcel, entonces no es una molestia para su familia. Si no está en la cárcel, entonces no es un problema; si no es un problema, entonces está en el ejército. Si está borracho, es una molestia para su familia. En consecuencia, o no está borracho o está en el ejército". (***C***, ***M***, ***P***, ***E***, ***B***)

Debemos demostrar que $(\sim B) \vee E$ equivale a $B \Rightarrow E$, por lo que acudimos a la prueba condicional:

1.	$C \Rightarrow \sim M$	(p)
2.	$\sim C \Rightarrow \sim P$	(p)
3.	$\sim P \Rightarrow E$	(p)
4.	$B \Rightarrow M$	(p)
5.	B	(p*)
6.	M	(MPP, 4,5)
7.	$\sim C$	(MTP, 1,6)
8.	$\sim P$	(MPP, 2,7)
9.	E	(MPP, 3,8)
10.	$B \Rightarrow E$	(PC, 5,6,2,8,9)
11.	$E \vee (\sim B)$	(Def. de condicional)
12.	$(\sim B) \vee E$	(Conmutativa)

Ejemplo 3. Demostrar $P \vee Q$

1.	$\sim S \Rightarrow Q$	(p)
2.	$(\sim R) \vee S \Rightarrow P$	(p)
3.	$\sim P$	(p*)
4.	$\sim((\sim R) \vee S)$	(MTP, 2,3)
5.	$\sim(\sim R) \vee \sim S$	(Morgan, 4)
6.	$R \wedge (\sim S)$	(Involución)
7.	$\sim S$	(SL, 6)
8.	Q	(MPP, 1,7)
9.	$\sim P \Rightarrow Q$	(PC, 3,8)
10.	$P \vee Q$	(Equivalencia)

Ejercicios

1. Demuéstrese $\sim A \Rightarrow \sim G$

1.	$S \vee G \Rightarrow P$	(p)
2.	$P \Rightarrow A$	(p)

2. Demostrar $x \not> y \vee x + y \not> 7$

1.	$x > y \Rightarrow x - y = 2$	(p)
2.	$x + y = 7 \Rightarrow x < 4$	
3.	$x - y = 2 \Rightarrow x \not< 4$	

3. Demuéstrese $S \Rightarrow R$

1.	$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$	(p)
2.	$P \vee (\sim S)$	(p)

3. Q

4. Demuestre $P \Rightarrow (S \vee T)$

1. $P \Rightarrow (Q \vee R)$ (p)

2. $Q \Rightarrow S$ (p)

3. $R \Rightarrow T$ (p)

2.2.2.2. Regla de la reducción al absurdo (RRA).

Consistencia de premisas

Dado un conjunto de premisas, decimos que son inconsistentes si al combinarlas deductivamente se obtiene una contradicción.

Por ejemplo, consideremos las premisas $P \Rightarrow Q$, $P \wedge (\sim Q)$.

Obtenemos:

1.	$P \Rightarrow Q$	(p)
2.	$P \wedge (\sim Q)$	(p)
3.	P	(SL, 2)
4.	$\sim Q$	(SL, 2)
5.	Q	(MPP, 1,3)
6.	$(\sim Q) \wedge Q$	(AL, 4,5)
7.	O	(Complemento, 6)

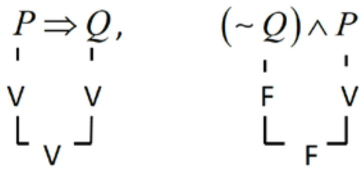
Así, el conjunto de las premisas (1) y (2) es inconsistente.

Simbólicamente el conjunto de premisas $P_1, P_2, \ldots, P_n$ es inconsistente si $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \vDash O$.

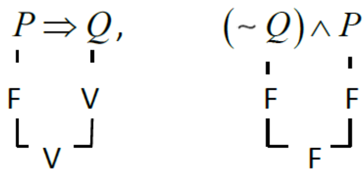
Cuando un conjunto de premisas es inconsistente no es posible asignar valores de verdad a sus componentes de tal forma que todas las premisas resulten verdaderas.

Consideremos las dos premisas $P \Rightarrow Q$, $(\sim Q) \wedge P$.

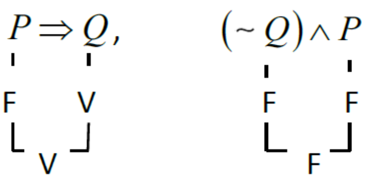
En primer lugar, P :="V", Q:="V", entonces



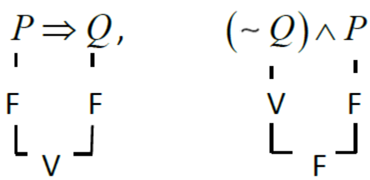
Para P :="F", Q:="V"



Para P :="F", Q:="V"



Si se asignan P :="F", Q:="F"



Observamos que siempre, en cualquier caso, una premisa es falsa. Esto nos permite afirmar que un conjunto de premisas es *inconsistente* si para cualquier asignación de valores de verdad a las componentes, al menos una de las premisas resulta falsa.

En consecuencia, un conjunto de premisas es *consistente* si para alguna asignación de valores de verdad a sus componentes, todas resultan verdaderas.

Ejemplo 1. Pruebe que el siguiente conjunto de premisas es consistente.

1) $P \Rightarrow Q$ (p)

2) $R \wedge P$ (p)

3) $R \Rightarrow S$ (p)

Hagamos $R :=$"V", $P :=$"V", $Q :=$"V" y $S :=$"V", entonces

$$\begin{array}{ccc} P & \Rightarrow & Q, \\ \mathrm{V} & & \mathrm{V} \\ & \mathrm{V} & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} R & \wedge & P, \\ \mathrm{V} & & \mathrm{V} \\ & \mathrm{V} & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} R & \Rightarrow & S \\ \mathrm{V} & & \mathrm{V} \\ & \mathrm{V} & \end{array}$$

lo que prueba la consistencia.

Resumen. Para investigar si un conjunto de premisas es consistente o no, utilice las reglas de inferencia; si deriva una contradicción, las premisas son *inconsistentes*. Si no, trate de hallar una asignación de valores de verdad para la cual todas resulten verdaderas, en cuyo caso son *consistentes*.

Ejemplo 2. Determinar la consistencia o no, de las premisas enunciadas.

"Si el contrato es legal, la empresa está jurídicamente comprometida. Si la empresa está jurídicamente comprometida, se va a la quiebra. Si el banco le hace un préstamo cuantioso, no quebrará. De hecho, el contrato es legal y el banco le hará un préstamo cuantioso".

Representemos las premisas:

1.	$L \Rightarrow J$	(p)
2.	$J \Rightarrow Q$	(p)
3.	$B \Rightarrow \sim Q$	(p)
4.	$L \wedge B$	(p)
5.	B	(SL, 4)
6.	L	(SL, 4)
7.	$\sim Q$	(MMP, 3,5)
8.	$\sim J$	(MTP, 2,7)
9.	J	(MPP, 1,6)
10.	$J \wedge \left(\sim J\right)$	(AL, 8,9)
11.	O	(Complemento)

Así que las premisas son inconsistentes.

Interpretaciones

Una fórmula se dice *interpretada* cuando se hacen corresponder enunciados con sentido en cierto contexto.

Por ejemplo, para $P \Rightarrow Q$ una interpretación en un contexto numérico es

P := "2+3=5" y Q :="4+6=10"

Así, la interpretación es

"2+3=5"⇒"4+6=10"

que es verdadera.

Un *modelo* para una fórmula es una interpretación para la cual dicha fórmula es verdadera en el contexto escogido.

La interpretación anterior es un modelo para la fórmula $P \Rightarrow Q$.

Una interpretación para $P \Rightarrow Q$ y $P \wedge Q$ puede ser

P := "1+1=2" y Q :="1+2=3"

que será

"1+1=2"⇒"1+2=3" (Verdadera)

(1+1=2) ∧ (1+2=3) (Verdadera)

Decimos que esta interpretación es un modelo para el conjunto de premisas.

Diremos que un conjunto de premisas es consistente si existe un modelo para dicho conjunto. Un conjunto de premisas es consistente cuando es posible determinar una asignación para la cual todas resultan verdaderas.

Así, las premisas $P \Rightarrow Q$ y $P \wedge Q$ son consistentes.

Regla de reducción al absurdo

Si P es una premisa y O es una contradicción, tenemos la siguiente equivalencia:

$$P \wedge (\sim Q) \Rightarrow O \equiv P \Rightarrow Q$$

Esta equivalencia se dejó a demostrar y si no lo ha hecho, realícela.

En el caso de que la premisa sea una conjunción $\mathcal{A} = P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n$, tenemos

$$\mathcal{A} \wedge (\sim Q) \Rightarrow O \equiv \mathcal{A} \Rightarrow Q.$$

Esto nos permite enunciar la regla de prueba indirecta por reducción al absurdo. "Para probar que un conjunto de premisas $\mathcal{A}$ implica una fórmula Q, introduzca $\sim Q$ como una nueva premisa; si esta perturba al conjunto $\mathcal{A}$ haciéndolo inconsistente, asuma que $\mathcal{A} \vDash Q$".

Ejemplo 3. Demuéstrese D.

1. $\sim A \Rightarrow B$ (p)

2. $C \Rightarrow B$ (p)

3. $C \vee \sim A$ (p)

4. $\sim B \vee D$ (p)

5. $\sim D$ (p^*)

6. $\sim B$ (MTP, 4,5)

7. $\sim C$ (MTT, 2,6)

8. $\sim A$ (MTP, 3,7)

9. B (MPP, 1,8)

10. $B \wedge (\sim B)$ (AL, 3,7)

11. O (Complemento)

12. D (RRA, 1,5)

Ejemplo 4. "Si diez mil millones de pesos son suficientes, entonces Juan será elegido. O los partidarios aportan lo suficiente, o Juan no será elegido. No es cierto que sean suficientes diez mil millones de pesos y que los partidarios vengan a aportar lo suficiente. En consecuencia, no son suficientes diez mil millones de pesos".

Demostrar $\sim D$.

1. $D \Rightarrow E$ (p)

2. $A \vee \sim E$ (p)

3. $\sim (D \wedge A)$ (p)

4. D (p^*) (Negación de la conclusión)

5. E (MPP, 1,6)

6. $\sim D \vee \sim A$ (Morgan, 3)

7. $\sim A$ (MTP, 4,6)

8. $\sim E$ (MTP, 2,7)

9. $E \wedge (\sim E)$ (AL, 5,8)

10. O (Complemento)

11. $\sim D$ (RRA)

Ejercicios

Demuestre cada conclusión por el método de reducción al absurdo.

1. Si $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$, $P \vee (\sim S)$ y $Q \wedge S$ entonces R.
2. Si $P \Rightarrow Q \vee R$, $Q \Rightarrow S$ y P, entonces $R \vee S$.
3. Si $P \Rightarrow Q$, $R \Rightarrow (P \wedge S)$, $(Q \wedge S) \Rightarrow (P \wedge T)$, y $\sim T$ entonces $P \Rightarrow (\sim R)$.
4. Si $P \vee (Q \Rightarrow R)$, $Q \vee R$ y $R \Rightarrow P$, entonces P.
5. A continuación, se presentan conjuntos de premisas. Determine cuál es consistente. Si el conjunto es inconsistente, deduzca una contradicción; además construya una interpretación que lo pruebe. Si es consistente, construya un modelo que pruebe esto.
   a) Si el contrato es legal, debemos cumplirlo. Si debemos cumplirlo, entonces vamos a la quiebra. Quebraremos o conseguiremos un préstamo bancario. Sin embargo, no conseguiremos un préstamo bancario. (***l***, ***c***, ***q***, ***p***)
   b) Si Juan cometió el crimen, entonces estaba en el apartamento de la víctima y salió a las 10 p.m. Juan estaba en el apartamento de la víctima y habló con ella. O Juan habló con la víctima o no salió a las 10 p.m. (***j***, ***a***, ***s***, ***e***)

6. Determine la consistencia o la inconsistencia de cada conjunto de premisas.

   c)

   1. $P \Rightarrow Q$ (p)

2. $Q \Rightarrow R$ (p)

3. $S \Rightarrow \sim R$ (p)

4. $P \wedge S$ (p)

d)

1. $P \Rightarrow Q$ (p)

2. $Q \Rightarrow R$ (p)

3. $\sim P \wedge R$ (p)

7. En los ejercicios que siguen, demuestre por reducción al absurdo.

e) Demostrar R

1. $\sim (P \wedge Q)$ (p)

2. $\sim R \Rightarrow Q$ (p)

3. $P \vee R$ (p)

f) Demostrar $(\sim S) \vee (\sim T)$

1. $S \Rightarrow P$ (p)

2. $P \Rightarrow R$ (p)

3. $R \Rightarrow (\sim T)$ (p)

g. Demostrar $(\sim P) \vee Q$

1. $S \vee T$

2. $S \Rightarrow \sim P$

3. $T \Rightarrow Q$

h. Demostrar R

1. $(T \wedge R) \Rightarrow \sim S$

2. $\sim T \Rightarrow S$

3. $S \Rightarrow R$

8. Utilice la regla RAA para demostrar la conclusión en cada caso.

i) Si diez mil millones son suficientes, entonces Juan será elegido concejal. O los partidarios colaboran con la mitad del dinero o Juan no será elegido. Pero no es cierto que sean suficientes diez mil millones y que los partidarios colaboren con la mitad del dinero. En consecuencia, no son suficientes diez mil millones. (***D***, ***C***, ***P***)

j) Si no tienes conciencia social, entonces no quieres la paz. Si no eres campesino, no sufres la violencia. Si no quieres la paz, no eres campesino. O no tienes conciencia social, o no eres campesino. Si eres un burgués, estás de parte de los que predican la guerra. En consecuencia, o no eres campesino o estás de parte de los que predican la guerra. (***S***, ***P***, ***C***, ***V***, ***B***, ***G***)

2.2.2.3. Conclusiones no válidas.

Algunos razonamientos pueden concluir en una fórmula que, siendo verdadera, no es consecuencia lógica de las premisas, en cuyo caso decimos que el razonamiento no es válido o que es *falaz*.

De acuerdo con el sentido de la implicación tautológica, si las premisas son verdaderas, la conclusión ha de ser verdadera y puede deducirse de aquellas. Luego, un razonamiento es falaz (una falacia) si existe una interpretación en la que las premisas son verdaderas y la conclusión falsa.

Ejemplo 1. Si usted nació en Barranquilla, entonces usted es colombiano. Usted es colombiano. Por lo tanto, usted nació en Barranquilla.

Demostrar ***B*** simbólicamente:

1. $\boldsymbol{B \Rightarrow C}$

2. $\quad$ ***C***

Si acudimos a las *reglas de inferencia* conocidas, no encontraremos alguna que pueda utilizarse, por lo que se nos ocurre ensayar interpretaciones.

Tomemos ***B*** := “F” y ***C*** := “V”, entonces

$$\underbrace{\underset{\substack{|\\ \mathrm{F}}}{\boldsymbol{B}} \Rightarrow \underset{\substack{|\\ \mathrm{V}}}{\boldsymbol{C}}}_{\mathrm{V}} \qquad\qquad \underset{\substack{|\\ \mathrm{V}}}{\boldsymbol{C}}$$

Conclusión

$$\underset{\substack{|\\ \text{“F”}}}{\boldsymbol{B}}$$

Por consiguiente, la conclusión ***B*** no se deduce de las premisas.

Para verificar que un razonamiento es *inválido*, se busca una interpretación de este para la cual las premisas resulten verdaderas y la conclusión falsa.

Ejemplo 2. Si este es el mes de noviembre, el próximo mes será diciembre. Este mes no es noviembre. Por lo tanto, el próximo mes no será diciembre.

Aunque realmente el razonamiento parece correcto, es lógicamente inválido.

1. $\quad \boldsymbol{N} \Rightarrow \boldsymbol{D} \qquad$ (p)

2. $\quad \sim \boldsymbol{N} \qquad$ (p)

$\models \quad \sim \boldsymbol{D}$

Tomemos la siguiente interpretación. ***D*** := “V”, ***N*** := “F”

Obtenemos

$$N \Rightarrow D \qquad\qquad \sim N \quad \sim D$$

$$\underbrace{F \qquad V}_{V} \qquad\qquad V \qquad F$$

El razonamiento lógico es más exigente que el razonamiento del "sentido común" y lo que algunas veces parece evidente, lógicamente, es falaz.

Un razonamiento lógico puede ser válido o no válido. Para determinar su validez o invalidez seguimos el siguiente procedimiento:

1. Represente simbólicamente las premisas y la conclusión.

   a) Si a través de una deducción lógica, mediante reglas de inferencia válidas, obtiene la conclusión, el razonamiento es válido.

   b) Si no vislumbra la conclusión, ensaye una interpretación para la cual las premisas resulten verdaderas y la conclusión falsa, en cuyo caso esta no se deduce de las premisas y el razonamiento no es válido.

Ejemplo 3. Verificar la validez del siguiente razonamiento. "Si la paz llega pronto, habrá tranquilidad. O habrá tranquilidad, o inseguridad. La paz llega pronto. Por lo tanto, no habrá inseguridad".

Demostrar $\sim N$

1.	$P \Rightarrow T$	(p)
2.	$T \vee N$	(p)
3.	P	(p)

Intentemos deducir la conclusión y nos hallamos con una o más barreras.

4.	T	(MPP, 1,3)

Pero de $T \vee N$ y T no obtenemos conclusión alguna y lo mismo sucede con $P \Rightarrow T$ y T.

Intentemos por RRA.

1.	$P \Rightarrow T$	(p)
2.	$T \vee N$	(p)
3.	P	(p)
4.	N	(p*)

Y observamos una situación similar.

Tratemos de buscar una asignación para la cual las premisas resulten verdaderas y la conclusión falsa.

P := "V", T := "V" N := "V"

$P \Rightarrow T$,	$T \vee N$,	P	$\sim N$
V V	V V ,	V	F
F	V		

Luego, el razonamiento no es válido.

Ejercicios

1. En los ejercicios que siguen, determinar la validez del razonamiento dando una deducción de la conclusión o una interpretación que demuestre su invalidez.

   a) Demostrar S

1.	$Q \Rightarrow R$	(p)
2.	$P \Rightarrow Q$	(p)
3.	$P \vee T$	(p)
4.	$T \Rightarrow S$	(p)
5.	$\sim R$	

b) Demostrar $\sim S$

1.	$P \wedge S \Rightarrow Q$	(p)
2.	$(\sim Q) \wedge P$	(p)

c) Demostrar Q

1.	$Q \Rightarrow P$	(p)
2.	$\sim P \Rightarrow R$	(p)
3.	$\sim R$	(p)

2. Los siguientes razonamientos pueden ser válidos o no. Demuestre su validez o evidencie su invalidez.

    a) Si Juan gana las elecciones, entonces Manuel está derrotado. Si Juan gana las elecciones, entonces Miguel también está derrotado. Manuel está derrotado y Miguel está derrotado. Por lo tanto, Juan gana las elecciones. (***J***, ***M***, ***G***)

    b) Si los precios son altos, entonces los salarios deben ser altos o hay control de precios. Si hay control de precios no hay inflación. Pero hay inflación, luego los salarios deben ser altos. (**A**, **S**, **C**, **I**)

    c) Si el programa no falla, entonces debe empezar y terminar. El programa empezó y falló. Por lo tanto, el programa no terminó. (***P***, ***F***, ***E***, ***T***)

    d) Si estudio medicina, gastaré mucho dinero. Si estudio negocios internacionales, entonces viajaré mucho. Si gasto mucho dinero o viajo mucho, no conseguiré lo que quiero. Por lo tanto, si consigo lo que quiero, no estudié medicina ni estudié negocios internacionales.

2.2.3. Métodos de prueba en matemáticas.

La matemática se caracteriza por el énfasis permanente en la lógica y las demostraciones. Un resultado matemático no establecido aún se valida mediante una prueba generalmente deductiva. Aunque existen otros tipos de prueba, las matemáticas se han tornado en eminentemente deductivas. Las demostraciones que se emplean en el trabajo matemático utilizan el mismo esquema lógico que el de cálculo proposicional, pero generalmente se presentan de una manera diferente al formato presentado en las secciones anteriores.

Tipos de demostración

2.2.3.1. Demostración directa.

En este tipo se demuestra que las hipótesis o premisas implican la conclusión.

Si $P_1, P_2, \ldots, P_n$ son las premisas y la conclusión es Q, tenemos el esquema

$P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \vDash Q$.

2.2.3.2. Demostración indirecta por contraposición o contrarreciprocidad.

Se fundamenta en $P \Rightarrow Q \equiv (\sim Q) \Rightarrow (\sim P)$.

Si $P_1, P_2, \ldots, P_n$ son las premisas, para probar $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \vDash Q$ se prueba que

$\sim Q \vDash \sim(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n)$.

Ejemplo 1. Supongamos que se nos pide demostrar que si $m+n \geq 34$, siendo ***m*** y ***n*** números naturales, entonces $m \geq 17$ o $n \geq 17$; es decir

$m+n \geq 34 \Rightarrow m \geq 17 \vee n \geq 17$.

Para demostrarlo por contrarreciprocidad, el argumento tal y como lo hemos venido haciendo sería, negamos el consecuente.

Recordando que $\sim (a \geq b) \equiv a < b$ y que si $a \leq b$ y $c \leq d \Rightarrow a+c \leq b+d$.

$$\begin{aligned} \sim (m \geq 17 \vee n \geq 17) &\Rightarrow \sim (m \geq 17) \wedge \sim (n \geq 17) && \text{(Morgan)} \\ &\Rightarrow m < 17 \wedge n < 17 && \text{(Negación)} \end{aligned}$$

$\Rightarrow m+n<34$ (Suma miembro a miembro)

$\Rightarrow \sim(m+n\geq 34)$ (Equivalencia)

Usualmente, este argumento se expresa en los libros de la siguiente manera. Demostremos la contrapositiva.

$\sim(m\geq 17 \vee n\geq 17)$ implica $m+n\ngeq 34$. Partiendo de $\sim$ $(m\geq 17 \vee n\geq 17)$, la ley de Morgan nos dice que $m\ngeq 17 \wedge n\ngeq 17$, esto es $m<17$ y $n<17$; por la propiedad de las desigualdades que dice que si $a<b$ y $c<d \Rightarrow a+c<b+d$, se obtiene $m+n<34$. Pero esto significa que $m+n\ngeq 34$.

Ejemplo 2. Demuéstrese que si el cuadrado de un número natural n es par, entonces n es par.

Recordemos que n es par si existe un número natural k tal que $n=2k$.

Debemos probar "si n^2 es par, entonces n es par". Para ello probemos que "si n no es par, entonces n^2 no es par".

Decir que n es par, equivale a afirmar que n no es impar; esto es de la forma $n=2k+1$ para algún número natural k.

Así, debemos probar lo siguiente.

"Si $n=2k+1$, entonces $n^2=2r+1$ para algún número natural r".

Demostración:

Consideremos $n=2k+1$ para algún número natural k, entonces
$n^2=(2k+1)^2=(2k)^2+2(2k)+1$,
entonces $n^2=4k^2+4k+1=2k(2k+2)+1$.
Tomando $r=k(2k+2)$, el cual es un número natural, obtenemos
$n^2=2r+1$, es decir n^2 es impar.

Hemos probado "si n es impar, entonces n^2 es impar" lo que equivale a "si n^2 no es impar (par), entonces n no es impar (par)".

2.2.3.3. Demostración indirecta por reducción al absurdo.

Como hemos visto, se reduce a probar

$$(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \wedge (\sim Q) \Rightarrow O$$

donde O es una contradicción, lo que nos asegura que

$$P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \vDash Q$$

Y hemos mostrado algunos ejemplos dentro del cálculo de los enunciados.

Ejemplo 3. Para la demostración que sigue tendremos en cuenta las siguientes premisas.

1. Toda fracción puede expresarse en la forma p/q donde p y q no tienen divisores comunes excepto el número 1.
2. Si $a = b$, entonces $a^2 = b^2$.
3. $\left(p/q\right)^2 = p^2/q^2$
4. Un número irracional no puede expresarse como cociente de números enteros.

Demuéstrese que $\sqrt{2}$ es irracional; esto es, si $x^2 = 2$, entonces x es irracional.

Demostración. (Por reducción al absurdo). Supongamos que $x = \sqrt{2}$ es racional. Esto es, existen dos números enteros p y q sin divisores comunes diferentes de 1 tales que $x = \dfrac{p}{q}$, entonces $x^2 = \dfrac{p^2}{q^2} = 2$; en consecuencia, $p^2 = 2q^2$, q^2 entero, lo que significa que p^2 es par, y por lo tanto, p es par. Luego, $p = 2k$ para algún entero k. Elevando al cuadrado, $p^2 = 4k^2$, pero $p^2 = 2q^2$, luego $2q^2 = 4k^2$ y simplificando $q^2 = 2k^2$, es decir q^2es par y por tanto q es par.

Hemos probado que p es par y q es par, y en consecuencia 2 es un divisor común de p y q y $2 \neq 1$, lo que contradice el hecho de que p y q no tienen divisores comunes diferentes de 1.

Así, al suponer que $\sqrt{2} = p/q$ siendo p y q enteros, nos lleva a una contradicción; por lo tanto, $\sqrt{2}$ no es racional, es decir, es irracional.

2.2.3.4. Demostración cuando el antecedente es disyuntivo.

Algunas veces pueden presentarse situaciones como aquellas en las que debe probarse

$$P_1 \vee P_2 \vee \ldots \vee P_n \Rightarrow Q.$$

En este caso se prueba que

$$(P_1 \Rightarrow Q) \wedge (P_2 \Rightarrow Q) \wedge \ldots \wedge (P_n \Rightarrow Q);$$

esto se deduce de la siguiente equivalencia

$$\begin{aligned} P_1 \vee P_2 \Rightarrow Q &\equiv \sim (P_1 \vee P_2) \vee Q \\ &\equiv (\sim P_1 \wedge \sim P_2) \vee Q \\ &\equiv (\sim P_1 \vee Q) \wedge (\sim P_2 \vee Q) \\ &\equiv (P_1 \Rightarrow Q) \wedge (P_2 \Rightarrow Q), \text{ la cual podemos generalizar.} \end{aligned}$$

Ejemplo 4. Si x es un número real, el valor absoluto de x se nota por $|x|$ y se define mediante

$$|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$$

Demuéstrese que para cualesquiera números reales x , y , $|xy| = |x||y|$.

Para la demostración debemos considerar los siguientes casos:

$x \geq 0 \wedge y \geq 0$ o $x \geq 0 \wedge y < 0$ o $x < 0 \wedge y \geq 0$ o $x < 0 \wedge y < 0$

Así podemos probar

$(x \geq 0 \wedge y \geq 0) \vee (x \geq 0 \wedge y < 0) \vee (x < 0 \wedge y \geq 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0)$

$\Rightarrow |xy| = |x||y|$

Debemos probar:

1. $(x \geq 0 \wedge y \geq 0) \Rightarrow |xy| = |x||y|$
2. $(x \geq 0 \wedge y < 0) \Rightarrow |xy| = |x||y|$
3. $(x < 0 \wedge y \geq 0) \Rightarrow |xy| = |x||y|$
4. $(x < 0 \wedge y < 0) \Rightarrow |xy| = |x||y|$

Demostración:

1. Sea $x \geq 0 \wedge y \geq 0$, entonces $|x| = x$, $|y| = y$ y $xy \geq 0$. Por lo tanto, $|xy| = |x||y|$.

2. Si $x \geq 0 \wedge y < 0$, entonces $|x| = x$, $|y| = -y$ y $xy \leq 0$. Tenemos $x > 0$, en cuyo caso $xy < 0$; por lo tanto, $|xy| = -(xy) = x(-y) = |x||y|$.
3. Ejercicio.
4. Ejercicio.

Ejercicios

1. Demuéstrese (3) y (4) del ejemplo 4.
2. Demuéstrese que si n es entero y n^2 es impar, entonces n es impar.
3. Demuéstrese por reducción al absurdo que hay un número infinito de primos positivos. Recuerde que un número entero p es primo si únicamente tiene dos divisores. ¿Cuáles? Además, cada número que no es primo (compuesto) es divisible por alguno de los primos menores que él. Supóngase que solo hay un número finito de primos $p_1, p_1, ..., p_n$ y que cualquier p mayor que cada uno de ellos no es primo; trabaje con esta hipótesis y llegue a una conclusión.
4. Demuestre que para dos números reales cualesquiera x, y entonces $|x+y| \leq |x| + |y|$.
5. Demuestre que si x, y son números reales, $xy = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$.
6. En geometría plana euclidiana se conocen:
    1. Dos rectas son paralelas si coinciden en todos sus puntos o no tienen puntos en común.
    2. Si dos rectas se intersecan o cortan, lo hacen en uno y solo en un punto.
    3. Dada una recta del plano y un punto que no yace en dicha recta, por tal punto se traza una y solo una paralela a la recta en cuestión.

Demuéstrese que si dos rectas a y b son paralelas y otra recta c corta a a en un punto, entonces c corta a b.

2.3. Cálculo de predicados

2.3.1. Representación del lenguaje natural.

El lenguaje construido en las secciones anteriores tiene sus limitaciones en lo que a la lengua natural respecta. Desde Aristóteles, un razonamiento como el siguiente —denominado silogismo— se considera, en efecto, válido.

"Todos los hombres son mortales. Sócrates es hombre. Por lo tanto, Sócrates es mortal".

Sin embargo, la representación que hasta el momento poseemos no permite determinar su validez o invalidez.

Si representamos "todos los hombres son mortales" por ***M***, "Sócrates es hombre" por ***H*** y "Sócrates es mortal" por ***S***, nuestras premisas son:

1.	***M***	(p)
2.	***H***	(p)

de las cuales a menos que hagamos un acto de fe, no vemos cómo pueda concluirse ***S***, pues no hay en apariencia términos de enlace como $\wedge, \vee, \sim, \Rightarrow, \Leftrightarrow$.

Esto pone de manifiesto que se requieren nuevas representaciones del lenguaje natural en aras de incorporarlo al lenguaje formal.

Para subsanar esta falencia acudimos a otras nociones lógicas como individuos, predicados y cuantificadores.

Un conjunto de enunciados en cierto contexto afirma o niega propiedades de ciertos objetos del contexto o señala relaciones entre esos objetos.

Los objetos varían de un contexto a otro. En la aritmética son números, en la ictiología son peces, etc.

Un *individuo* es un objeto de un determinado contexto. La totalidad de individuos del contexto se denomina *dominio* o *universo del contexto*.

Denominamos *predicado* a lo que designa propiedades a los objetos del dominio o establece relaciones entre ellos. Los predicados pueden ser variables o constantes. Por ejemplo, $P(x)$= "x es un…" no especifica qué es x. Cuando especificamos un dominio, por ejemplo, el conjunto de los números naturales, establecemos una interpretación como "x es un número primo".

Los individuos se clasifican en variables individuales o simplemente variables, y constantes individuales o constantes. Por ejemplo, en el dominio de las ciudades de Colombia, la expresión "cierta ciudad" es una variable, en tanto que "Barranquilla" es un término constante. Así, una variable es un objeto no especificado de un dominio y normalmente se representa con una letra ***x***, ***y***, ***z***…, u otro símbolo como □…

Las variables son indeterminadas. Así, cuando decimos "considérese un número entero", podemos escribir "sea ***x*** un número entero", o "sea □ un número entero", donde el espacio a llenar debe ser un número entero y no otra cosa.

Al ser determinadas, las constantes se muestran unívocamente. Por lo general, se notan por letras como ***a***, ***b***, ***c***, etc., reservando las últimas del alfabeto común para las variables.

Los predicados se simbolizan por letras mayúsculas y paréntesis que encierran el o los individuos a quienes se hace referencia. Por ejemplo, "***x*** es un número entero" predica de ***x*** la propiedad "es un número entero" que podemos simbolizar como ***P*** y escribimos $P(x)$. Así, $P(5)$ significa "*5* es un número entero", que es verdadero. Este tipo de predicados se denomina *unario*.

Si consideramos el dominio formado por los números enteros, la expresión "x es mayor que y" establece un vínculo entre las variables "… es mayor que…", el cual es un predicado binario que podemos representar por ***M***, de tal forma que $M(x, y)$ significa "x es mayor que y".

Cuando se sustituyen las variables por constantes, se obtienen enunciados verdaderos o falsos. Por ejemplo, $M(5,3)$ es verdadero, pero $M(1,2)$ es falso.

Cuando hay más de dos variables afectadas por un predicado, este se denomina *predicado n-ario*, según el número de variables.

Gran parte del lenguaje, especialmente en matemáticas, se fundamenta en las formas:

1. Hay un individuo ***x*** que tiene la propiedad ***P***.
2. Todos los individuos (en un dominio dado) tienen la propiedad ***P***.

La forma (1) puede expresarse como "existe un individuo ***x*** que tiene la propiedad ***P***", y se nota $(\exists x)P(x)$.

El símbolo ∃ se denomina *cuantificador existencial* o *particular*.

La forma (2) se escribe $(\forall x)P(x)$.

El símbolo ∀ se lee "para todo" y se denomina *cuantificador universal*.

Estamos en condiciones de representar enunciados como

"Todo ***x*** que tiene la propiedad ***P*** tiene la propiedad ***Q***"

en la forma $(\forall x)\big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big)$

Ejemplo 1. "Todos los hombres son mortales" puede representarse por $(\forall x)\big(H(x) \Rightarrow M(x)\big)$ donde ***N***:= "… es hombre" y ***M***:= "…es mortal".

Ejemplo 2. Representemos el enunciado "algunos hombres son ricos" por $(\exists x)\big(H(x) \wedge R(x)\big)$, donde ***R***:= "… es rico".

Ejemplo 3. "Ningún político dice la verdad" nos dice que "no es cierto que existan políticos que digan la verdad", es decir,

$$\sim (\exists x)\big(P(x) \wedge V(x)\big)$$

donde ***P***:= "… es político" y ***V***:= "… dice la verdad".

¿Puede expresar lo anterior $(\forall x)\big(P(x) \Rightarrow \sim V(x)\big)$? Es decir, "cualquiera que sea político entonces no dice la verdad".

Ejemplo 4. Supongamos que $P(x)$:= "*x* es honesto" y $Q(x)$:= "*x* es inteligente" y "Pedro"=*a*; la expresión $P(a) \wedge Q(a)$ significa "Pedro es honesto e inteligente".

Ejemplo 5. "Todos los hombres son mortales. Sócrates es un hombre. Por lo tanto, Sócrates es mortal". Este razonamiento podemos representarlo:

1. $(\forall x)(H(x) \Rightarrow M(x))$ (p)
2. $H(s)$ (p)

---.

$\vDash$ $M(s)$

donde ***H***:= "… es hombre", ***M***:= "… es mortal" y ***s***:= "Sócrates".

Ejercicios

Escriba los siguientes enunciados del lenguaje cotidiano en la notación lógica de individuos, predicados y cuantificadores.

1. Todos los políticos dicen mentiras.
2. Algunas personas son bondadosas.
3. Ningún perro vuela.
4. María es bonita pero no es seria.
5. "El 2 es número primo y es par".
6. No todos los inteligentes son honestos.
7. Algunos perros son buenos rastreadores.
8. Todos los perros ladran y buscan los árboles para miccionar.

2.3.2. Alcance de cuantificadores.

El alcance de un *cuantificador* que aparece en una fórmula es el cuantificador y la fórmula mínima que sigue al cuantificador. Para ello el uso de paréntesis es un indicador del alcance.

Ejemplo 1. En la fórmula $(\exists x)\big(P(x) \wedge S(x)\big)$, el alcance del cuantificador está indicado por la línea bajo la fórmula.

$$\underbrace{(\exists x)\big(P(x) \wedge S(x)\big)}$$

Pero en $(\exists x)\big(P(x)\big) \wedge S(x)$, el alcance es $\underbrace{(\exists x)\big(P(x)\big)} \wedge S(x)$.

En $(\forall x)\big[(\exists y)(x > y)\big]$, el alcance de ∀ es $\underbrace{(\forall x)\big[(\exists y)(x > y)\big]}$, mientras que el alcance de ∃ es $(\forall x)\big[\underbrace{(\exists y)(x > y)}\big]$.

Se suele hablar de apariciones libres y apariciones ligadas. Una aparición de cierta variable en una fórmula es *ligada* si está bajo el alcance de un cuantificador en una fórmula, si no es el caso, es una *aparición libre*.

Ejemplo 2. En $(\exists x)\big(P(x)\big) \wedge S(x)$, la primera aparición de ***x*** es ligada y la segunda es libre. Esto significa que la primera aparición puede tomar valores individuales del dominio, mientras que la segunda no.

Ejemplo 3. Si P designa un predicado binario, $(\forall x)P(x, y)$ tienen una variable ligada: ***x*** en tanto que ***y*** es libre.

El uso de paréntesis determina no solo la decisión acerca de si una aparición de cierta variable es libre, sino el sentido gramatical.

Ejemplo 4. Consideremos que ***E***:= "… es par", ***F***:= "… es impar" en el dominio de los números naturales, la forma

$$(\forall x)\big(E(x) \vee F(x)\big)$$

significa que cualquier número natural es par o impar, o ambas cosas, lo cual es verdadero. Sin embargo,

$$(\forall x)\big(E(x)\big) \vee (\forall x)\big(F(x)\big)$$

significa "o todos los naturales son pares" o "todos son impares", lo cual es falso, así que el significado cambia.

El enunciado $(\exists x)\big(E(x) \wedge F(x)\big)$ significa "existe un número natural que es par e impar", lo cual es falso.

Pero $(\exists x)\big(E(x)\big) \wedge (\exists x)\big(F(x)\big)$ significa "existen naturales pares" y "existen naturales impares", lo cual es evidentemente verdadero.

Ejemplo 5. $(\exists x)(x < 5 \wedge x > 3)$ significa que hay un número que es a la vez menor que 5 y mayor que 3. Sin embargo, $(\exists x)(x < 5) \wedge (\exists x)(x > 3)$ nos dice que hay números menores que 5 y hay números mayores que 3.

2.3.3. Construcción de un lenguaje formal.

Definición 1. Un lenguaje formal de primer orden *L* consta de:

- Constantes individuales y variables individuales
- Predicados o *relatores n-arios*
- Functores o funciones
- Términos de enlace constante o conectivos lógicos
- Cuantificadores

- Reglas sintácticas de formación.
- Un descriptor ":" o " | " que se lee "tal que".
- Reglas deductivas.

Definición 2. Un símbolo predicado o relator expresa una propiedad de individuos o una relación entre individuos. Un predicado n-ario es de la forma $P^n(t_1, t_2, ..., t_n)$ donde $t_1, t_2, ..., t_n$ son términos. El número n se denomina *rango* del predicado e indica el número de términos requeridos para que la expresión lingüística tenga sentido.

Definición 3. Una función n-aria o functor es un signo que, complementado con nombres de objetos, nombra otro objeto. Notaremos las funciones por f^n., y al igual que con los predicados, n indica el rango del functor.

Ejemplo, la función $\mathrm{f}^2(p, q) = p \wedge q$.

Definición 4. Una cadena de signos del lenguaje es una sucesión finita de signos, repetidos o no, y escritos en cierto orden.

Por ejemplo, $P^n(t_1, t_2, ..., t_n)\forall Q(\mathrm{f}(x))$ es una cadena.

Definición 5. Las cadenas válidas de símbolos se denominan *términos* y se construyen mediante las siguientes reglas:

- Toda variable o constante individual es un término.
- Si $t_1, t_2, ..., t_n$ son términos y f^n una función n-aria, $\mathrm{f}^n(t_1, t_2, ..., t_n)$ es un término.
- Si $t_1, t_2, ..., t_n$ son términos y P^n es un predicado n-ario, $P^n(t_1, t_2, ..., t_n)$ es un término.

- Un término se obtiene únicamente por las condiciones anteriores.

Definición 6. Un átomo o *fórmula atómica* es una cadena de forma $P^n\left(t_1,t_2,...,t_n\right)$ donde $t_1,t_2,...,t_n$ son términos.

Definición 7. Una cadena de átomos es una fórmula bien formada (fbf.), de conformidad con las siguientes especificaciones:

- Cada átomo es una fbf.
- Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son fbf., entonces ($\mathcal{A}$), ($\mathcal{B}$), $\sim$ ($\mathcal{A}$), ($\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$), ($\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$), ($\mathcal{A}$) $\Rightarrow$ ($\mathcal{B}$) y ($\mathcal{A}$)$\Leftrightarrow$($\mathcal{B}$) son fbf.
- Si $\mathcal{A}$ es una fbf. y x es una variable libre en $\mathcal{A}$, entonces $\left(\forall x\right)\mathcal{A}$ y $\left(\exists x\right)$ $\mathcal{A}$ son fórmulas bien formadas.
- Una fórmula es bien formada si se construye mediante una sucesión finita de fórmulas comprendidas en las condiciones anteriores.

Ejemplo 1. Consideremos la fórmula $\mathcal{A}=\left(\forall x\right)\left(P\left(x\right)\wedge Q\left(x\right)\right)$.

Esta es una fbf. si analizamos sus átomos como se muestra a continuación: $\mathcal{B}$= $P\left(x\right)$ es una fbf. al ser x un término y P un predicado unario; análogamente $\mathcal{C}$= $Q\left(x\right)$ es una fbf., y por lo tanto, $\mathcal{D}$= $\mathcal{B}\wedge\mathcal{C}$ es una fbf. en la cual la variable es libre. En consecuencia, $\left(\forall x\right)\mathcal{D}$ es una fbf.

Si todas las variables de una condición son ligadas, decimos que se tiene una fórmula cerrada u oración, es decir un enunciado que es verdadero o falso en el dominio en cuestión.

Consideramos el dominio $\boldsymbol{D}$ de un contexto como un *conjunto* y variables de condiciones α, β, γ, etc.

Definición 8. Si $\alpha\left(x\right)$ es una condición en un dominio $\boldsymbol{D}$, la clase de todos los individuos en $\boldsymbol{D}$ para los cuales $\alpha\left(x\right)$ es verdadera se denomina la extensión de α; la notamos

$$A=\left\{x\in D:\alpha\left(x\right)\right\}$$

y es "el conjunto de todos los individuos en el dominio que verifican α".

Notamos $\alpha(x) \leftrightarrow x \in A$.

Si los únicos individuos que satisfacen α son $a_1,\ a_2,\dots,a_n$, escribimos $A=\{a_1,\ a_2,\dots,a_n\}$.

Puede ocurrir que una condición α sea de tal manera que sea difícil decidir acerca de objetos que la cumplan, o que inclusive esos objetos no existan. Un biólogo puede pensar y expresar la idea de que existan serpientes con patas aunque no esté seguro de ello; un matemático puede encontrar en el transcurso de una demostración que por ejemplo $x<5$ y más adelante, bajo las mismas hipótesis que $x \geq 6$, lo cual no es posible. Así pues, resulta necesario asignarle una extensión a tales condiciones de incertidumbre o contradictorias; decimos que su extensión es vacía, en símbolos Φ.

Definición 9. Una interpretación de una fórmula $\mathcal{A}$ se logra de la siguiente manera:

- Tomar una clase no vacía como dominio.
- Asociar a cada letra c de constante un elemento fijo c_I del dominio.
- Asignar a cada letra funcional una función específica del dominio.
- Asignar a cada letra de predicado un valor "verdadero o falso" en el dominio.

Ejemplo 2. Consideremos la fórmula
$(\forall x)((P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow R(\mathrm{f}(x))) \wedge Q(a)$.
Fijemos como dominio el conjunto de los números naturales. Asignamos:

$P(x)=$ "x es primo",

$Q(x)=$ "x es impar",

$R(x)=$ "$x \geq 4$".

$\mathrm{f}(x)=x^3$,

$a=5$.

La interpretación será "todo número primo o impar tiene cuadrado mayor o igual a 4 y 5 es impar". Expresada mejor, "el cuadrado de todo número primo o impar es no inferior a 4 y 5 es impar".

Una interpretación puede ser falsa o verdadera en el dominio correspondiente. Por ejemplo, la interpretación anterior es verdadera en el dominio de los números naturales.

Definición 10. Llamaremos *un modelo* de cierta fórmula a una interpretación verdadera de ella.

Definición 11. Diremos que una fórmula es *válida* si toda interpretación de ella es un modelo. Las fórmulas válidas se suelen designar como *tautologías*.

Definición 12. Una fórmula es *factible* si existe un modelo de ella.

Definición 13. Una fórmula es *no factible* o *contradicción* si ninguna interpretación es un modelo.

Definición 14. Una fórmula que contiene una o más variables libres se denomina fórmula abierta o condición.

Ejemplo 3. Si el dominio es el conjunto de los números naturales y $\alpha(x)$:=" $x+5=1$ ", entonces la extensión de α no tiene individuos en el dominio. La condición no es factible en tal dominio.

Decimos que $\{x \in \mathbb{N} \mid x+5=1\} = \varnothing$ y lo denominamos *conjunto vacío*.

En este caso la proposición $(\exists x \in \mathbb{N})(x+5=1)$ es falsa.

Ejemplo 4. Si el dominio es el conjunto de los números reales y $\beta(x)$:=" $x^2+2x+1=0$, determinemos su factibilidad; esto es, si $(\exists x)\beta(x)$.

Resolvamos la ecuación $x^2+2x+1=0$, la cual tiene únicamente la solución $x=-1$.

En este caso, la extensión es

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2+2x+1=0\} = \{-1\}$$

y decimos que es un conjunto singular.

Luego, $(\exists x)\beta(x)$ es verdadera en el dominio.

Ejemplo 5. Si $\beta(x) :=" x^2 - 1 = 0 "$, su extensión es el conjunto $\{-1,1\}$, el cual denominaremos *un par*.

En este caso $(\exists x)\beta(x)$ es verdadera.

Ejemplo 6. Sea $\omega(x,y)$:= "*x* es divisor de *y*" en el dominio $D=\{2,3,4,5,6,7\}$, su extensión es $\{(2,4),(2,6),(3,6)\}$. Luego, podemos afirmar que $(\exists x)(\exists y)$ (*x* es divisor de *y*) es verdadero y la condición es factible.

Ejemplo 7. La fórmula $(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x) \Rightarrow (\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$ es una fbf. como puede probarse.

Consideremos el dominio de los números naturales y sean $P(x) = "x > 5"$ y $Q(x) = "x < 3"$. Exprese de la manera más clara posible la interpretación que resulta. ¿Constituye esta interpretación un modelo de la fórmula? ¿Es esta fórmula factible o una contradicción?

Cuando el dominio tiene solo un número finito de individuos $a_1, a_2, \ldots a_n$, tenemos los significados para expresiones cuantificadas:

(A_1) $\quad (\forall x)P(x) \equiv P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \ldots \wedge P(a_n)$

(A_2) $\quad (\exists x)P(x) \equiv P(a_1) \vee P(a_2) \vee \ldots \vee P(a_n)$

En este caso, el cálculo de predicados se reduce al cálculo proposicional ya estudiado.

Como caso particular, si el dominio tiene solo 2 individuos a_1 y a_2:

(a) $\quad (\forall x)P(x) \equiv P(a_1) \wedge P(a_2)$

(b) $\quad (\exists x)P(x) \equiv P(a_1) \vee P(a_2)$

Con ayuda de esta significación probamos algunas equivalencias fundamentales.

Teorema 1. (E_1). $\sim(\exists x)\alpha(x) \equiv (\forall x)(\sim\alpha(x))$

Demostración. Para simplificar, supongamos el dominio $D=\{a_1,a_2\}$; tenemos:

$$(\exists x)\alpha(x) \equiv \alpha(a_1) \vee \alpha(a_2) \qquad (A_2)$$

$$\sim(\exists x)\alpha(x) \equiv \sim(\alpha(a_1) \vee \alpha(a_2)) \qquad \text{(Equivalencia)}$$

$$\equiv (\sim\alpha(a_1)) \wedge (\sim\alpha(a_2)) \qquad \text{(Morgan)}$$

$$\equiv (\forall x)(\sim\alpha(x)) \qquad (A_1)$$

Teorema 2. (E_2). $\sim(\forall x)\alpha(x) \equiv (\exists x)(\sim\alpha(x))$

Demostración:

$$(\forall x)\alpha(x) \equiv \alpha(a_1) \wedge \alpha(a_2) \qquad (A_1)$$

$$\sim((\forall x)\alpha(x)) \equiv \sim(\alpha(a_1) \wedge \alpha(a_2)) \qquad \text{(Equivalencia)}$$

$$\equiv (\sim\alpha(a_1)) \vee (\sim\alpha(a_2)) \qquad \text{(Morgan)}$$

$$\equiv (\exists x)(\sim\alpha(x)) \qquad (A_2)$$

Corolario. $(\exists x)\alpha(x) \equiv \sim(\forall x)(\sim\alpha(x))$

Las identidades lógicas (E_2) y (E_2) se denominan *leyes de Morgan para los cuantificadores*.

Teorema 3. (Especificación universal; EU)

Si ***a*** es una constante individual del dominio de una condición α, entonces $(\forall x)\alpha(x) \vDash \alpha(a)$

Demostración. Si $(\forall x)\alpha(x)$ es verdadera, entonces $P(a)$ es verdadera para cada constante individual del dominio.

Si $D = \{a_1, a_2\}$,

$$\begin{aligned}(\forall x)\alpha(x) &\equiv \alpha(a_1) \wedge \alpha(a_2) && (A_1)\\ &\Rightarrow \alpha(a_1) && (SL)\end{aligned}$$

así que $(\forall x)\alpha(x) \Rightarrow \alpha(a_1)$ es una tautología.

Análogamente, $(\forall x)\alpha(x) \Rightarrow \alpha(a_2)$ es una tautología.

Teorema 4. (Generalización existencial, GE). Si a es una constante individual tal que $\alpha(a)$ es verdadera, entonces $\alpha(a) \vDash (\exists x)\alpha(x)$.

Demostración:

Si $\alpha(a)$ es verdadera y $b \in D \Rightarrow \alpha(a) \vee \alpha(b)$ es verdadera $\Rightarrow (\exists x)\alpha(x)$ es verdadera.

Por lo tanto, $\alpha(a) \vDash (\exists x)\alpha(x)$.

Teorema 5. (Especificación existencial). Si $(\exists x)\alpha(x) \Rightarrow \alpha(c)$, donde c es un nombre ficticio y no es una constante.

Demostración:

Supongamos que para ningún nombre ficticio c se cumple α; esto es, $(\forall x)(\sim \alpha(x)) \equiv \sim (\exists x)\alpha(x)$, lo que contradice el antecedente.

Este teorema merece una explicación. Generalmente, sabemos de la existencia de al menos un individuo que cumple ciertas condiciones, pero ignoramos su identificación, por lo cual se supone un nombre ficticio para ese individuo con el fin de hablar de él. Esto ocurre con mucha frecuencia en las ciencias donde se asignan nombres como "rayos x", "entropía", sin que el grueso de las personas sepa de qué se tratan. Sabemos que existen, pero no los visualizamos.

Teorema 6. (Distributividad del existencial respecto del $\vee$).

$$(\exists x)(\alpha(x) \vee \beta(x)) \equiv (\exists x)\alpha(x) \vee (\exists x)\beta(x)$$

Demostración:

$$(\exists x)(\alpha(x) \vee \beta(x))\ (\exists x)(\alpha(x) \vee \beta(x)) \Rightarrow \alpha(a) \vee \beta(a)\ (a = \text{nombre ficticio})$$

$$\Rightarrow (\exists x)\alpha(x) \vee (\exists x)\beta(x) \quad \text{(GE)}$$

$$(\exists x)\alpha(x) \vee (\exists x)\beta(x) \Rightarrow \alpha(a) \vee \beta(b)$$

(Nombres ficticios a y b)

$$\Rightarrow (\alpha(a) \vee \beta(b)) \vee (\alpha(b) \vee \beta(a)) \quad \text{(A)}$$

$$\Rightarrow (\alpha(a) \vee \beta(a)) \vee (\alpha(b) \vee \beta(b))$$

(Asociativa y conmutativa)

$$\Rightarrow (\exists x)(\alpha(x) \vee \beta(x)) \vee (\exists x)(\alpha(x) \vee \beta(x)) \quad \text{(GE)}$$

$$\Rightarrow (\exists x)(\alpha(x) \vee \beta(x))$$

(Idempotencia)

Teorema 7. (Distributividad del cuantificador universal respecto del $\wedge$).

$$(\forall x)(\alpha(x) \wedge \beta(x)) \equiv (\forall x)\alpha(x) \wedge (\forall x)\beta(x)$$

Demostración:

$$\sim [(\forall x)\alpha(x) \wedge (\forall x)\beta(x)] \equiv (\sim (\forall x)\alpha(x)) \vee (\sim (\forall x)\beta(x)) \quad \text{(Morgan)}$$

$$\equiv (\exists x)(\sim \alpha(x)) \vee (\exists x)(\sim \beta(x)) \quad \text{(Morgan)}$$

$$\equiv (\exists x)(\sim \alpha(x)) \vee (\sim \beta(x)) \quad \text{(Teorema 6)}$$

$$\equiv (\exists x)[\sim (\alpha(x) \wedge \beta(x))] \quad \text{(Morgan)}$$

$$\equiv \sim (\forall x)(\alpha(x) \wedge \beta(x)) \quad \text{(Morgan)}$$

"Todos los hombres son mortales. Sócrates es un hombre, entonces Sócrates es mortal."

Estamos ahora en condiciones de probar que este razonamiento es lógicamente válido.

En primer lugar, representemos las premisas y los términos.

$H(x)$:= " x es un hombre"

$M(x)$:= " x es mortal"

s := "Sócrates"

1.	$(\forall x)(H(x) \Rightarrow M(x))$	(p)
2.	$H(s)$	(p)
3.	$H(s) \Rightarrow M(s)$	(EU, a/x)
4.	$M(s)$	(MPP, 2,3)

Ejercicios

En cada dominio determínese la validez, factibilidad o no factibilidad, hallando la extensión de la correspondiente condición α, y diga si la afirmación que se da en cada caso es verdadera o falsa.

1. $P(x) := (x^2 + x - 2 = 0)$ en el dominio de los números reales.

   Afirmación $(\exists x)(x^2 + x - 2 = 0)$.

2. $Q(x) := "x + 1 = x + 1"$, si el dominio de los números enteros. ¿Cuál de las afirmaciones es cierta?

   a. $(\exists x)Q(x)$

   b. $(\forall x)Q(x)$

3. $R(x) := "2x + 5 = 3"$

   a. si el dominio se tiene como el conjunto de los números enteros.

   b. si el dominio se tiene como el conjunto de los números racionales.

¿Cómo es $(\exists x)R(x)$ en cada caso?

4. $S(x) := "|x+1| > 2"$, siendo el dominio el conjunto de los números reales. ¿Cuál fórmula es verdadera $(\exists x)S(x)$ o $(\forall x)S(x)$?

En los ejercicios que siguen exprese cada enunciado en forma simbólica y escriba enunciados equivalentes en forma natural.

5. Ningún pollo nada.
6. No existen caballos voladores.
7. No es cierto que existan personas mágicas.
8. Ningún número par diferente de 2 es primo.
9. No hay un pato que no pueda nadar.
10. Ningún caballo vuela.

Escriba fórmulas equivalentes a:

11. $\sim(\forall x)(x^2 + x > 1)$
12. $\sim(\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(x))$
13. $\sim(\exists x)(P(x) \wedge Q(x) \wedge R(x))$
14. $\sim(\exists x)(x > 0 \wedge x < 0)$
15. Responda las preguntas del Ejemplo 7.
16. Encuentre modelos para (12) y (13) y diga si son factibles.

2.3.4. Álgebra de condiciones y tautologías.

Consideremos un dominio D fijado para la discusión y supongamos que $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ son condiciones en D cuyas extensiones en D son respectivamente $A, B, C, \ldots$

Establecemos las siguientes definiciones.

Definición 1. Si α, β son condiciones cuyas extensiones son A y B, diremos que $\alpha \equiv \beta$ si $A = B$, es decir que A y B tienen la misma extensión.

Por ejemplo, $\alpha(x) = "x+1=2"$ y $\beta(x) = "2x+2=4"$ son equivalentes, pues

$$A = \{x | x+1=2\} = \{1\} = \{x | 2x+2=4\}.$$

Establezcamos la siguiente notación:

1. $\alpha(x) \vee \beta(x) :\equiv (\alpha \vee \beta)(x)$
2. $\alpha(x) \wedge \beta(x) :\equiv (\alpha \wedge \beta)(x)$
3. $\sim \alpha(x) :\equiv (\sim \alpha)(x)$
4. $\alpha(x) \Rightarrow \beta(x) :\equiv (\sim \alpha \vee \beta)(x) :\equiv (\alpha \Rightarrow \beta)(x)$

Si α es una condición en el dominio D, entonces para x en el dominio $\alpha(x)$ es verdadera o falsa, por tanto, es un enunciado proposicional. Así, podemos establecer que para todo x en el dominio:

1. $\alpha(x) \vee \beta(x) \equiv \beta(x) \vee \alpha(x)$
2. $\alpha(x) \wedge \beta(x) \equiv \beta(x) \wedge \alpha(x)$
3. $\alpha(x) \vee \beta(x) \equiv \alpha(x) \Rightarrow \beta(x)$
4. $(\alpha(x) \wedge \beta(x)) \wedge \gamma(x) \equiv \alpha(x) \wedge \beta(x) \wedge \gamma(x)$
5. $\sim(\sim \alpha(x)) \equiv \alpha(x)$ …. y así sucesivamente.

Por lo tanto, se siguen las equivalencias y tautologías del cálculo de enunciados. Así podemos abreviar: $\alpha \vee \beta \equiv \beta \vee \alpha$, $\alpha \wedge \beta \equiv \beta \wedge \alpha$, $\sim(\sim \alpha) \equiv \alpha$ …

Las equivalencias nos permiten establecer una especie de "diccionario" que permite trasladar condiciones al lenguaje de conjuntos.

Si A es la extensión de α y B es la extensión de β, entonces:

	Condición		Significado
1)	$\alpha(x)$	$\longleftrightarrow$	$x \in A$
2)	$\alpha(x) \vee \beta(x)$	$\longleftrightarrow$	$x \in A \cup B$
3)	$\alpha(x) \wedge \beta(x)$	$\longleftrightarrow$	$x \in A \cap B$
4)	$\sim \alpha(x)$	$\longleftrightarrow$	$x \in A^c$
5)	$\alpha(x) \Rightarrow \beta(x)$	$\longleftrightarrow$	$x \in A^c \cup B$
6)	$\alpha(x) \Leftrightarrow \beta(x)$	$\longleftrightarrow$	$x \in (A^c \cup B) \cap (A \cup B^c)$

Definición 2. (Relación de implicación). $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \sim \alpha \vee \beta$, en este caso decimos que "α es condición suficiente para β" o que "β es condición necesaria de α" o que "la condición α implica la condición β". Bajo ninguna circunstancia debe confundirse esta implicación con la *operación implicación* $\alpha \Rightarrow \beta$, la cual es una condición compuesta; en tanto $\alpha \leq \beta$ es una relación que dice algo de las condiciones, asevera algo de las condiciones α y β, y $\alpha \Rightarrow \beta$ es el nombre de una condición.

Una condición con extensión $\varnothing$ es una contradicción y se nota $\alpha \equiv \varnothing$. Una condición cuya extensión es todo el dominio se denomina válida y se nota $\alpha \equiv I$.

Definición 3. Si α y β son condiciones:

a) $\alpha - \beta = \alpha \wedge (\sim \beta)$

b) $\alpha + \beta = (\alpha - \beta) \vee (\beta - \alpha)$

Si $\alpha - \beta = \alpha(x) - \beta(x)$, y A y B son las extensiones de α y β respectivamente:

$$\alpha(x) - \beta(x) \longleftrightarrow x \in A - B$$

$$\alpha(x) + \beta(x) \longleftrightarrow x \in (A - B) \cup (B - A)$$

2.3.5. Tautologías.

En la sección anterior hemos probado algunas tautologías, como las denominadas leyes de Morgan y otras. Utilizaremos algunas de ellas para deducir otras.

Teorema 1. $(\exists x)(\alpha(x) \wedge \beta(x)) \Rightarrow (\exists x)\alpha(x) \wedge (\exists x)\beta(x)$ ≡I.

Demostración:

$$\begin{aligned} (\exists x)(\alpha(x) \wedge \beta(x)) &\Rightarrow \alpha(a) \wedge \beta(a) && \text{(E.E)} \\ &\Rightarrow (\exists x)\alpha(x) \wedge (\exists x)\beta(x) && \text{(G.E)} \end{aligned}$$

Luego,

$$(\exists x)(\alpha(x) \wedge \beta(x)) \Rightarrow (\exists x)\alpha(x) \wedge (\exists x)\beta(x) \equiv \mathrm{I}.$$

Teorema 2. $(\forall x)\alpha(x) \vee (\forall x)\beta(x) \Rightarrow (\forall x)(\alpha(x) \vee \beta(x))$ ≡I.

Demostración (por contraposición):

Negamos el consecuente.

$$\begin{aligned} \sim (\forall x)(\alpha(x) \vee \beta(x)) &\equiv (\exists x)(\sim(\alpha(x) \vee \beta(x))) && \text{(Morgan)} \\ &\equiv (\exists x)(\sim \alpha(x) \wedge \sim \beta(x)) && \text{(Morgan)} \\ &\Rightarrow (\exists x)(\sim \alpha(x)) \wedge (\exists x)(\sim \beta(x)) && \text{(Teorema 1)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sim (\forall x)\alpha(x) \wedge \sim (\forall x)\beta(x) \qquad \text{(Morgan)}$$

$$\Rightarrow \sim \big((\forall x)\alpha(x) \vee (\forall x)\beta(x)\big) \qquad \text{(Morgan)}$$

Por lo tanto,

$$(\forall x)\alpha(x) \vee (\forall x)\beta(x) \Rightarrow (\forall x)\big(\alpha(x) \vee \beta(x)\big) \qquad \text{(Contraposición)}$$

Teorema 3.

$$(\forall x)\big(\alpha(x) \Rightarrow \beta(x)\big) \wedge (\forall x)\big(\beta(x) \Rightarrow \omega(x)\big) \Rightarrow (\forall x)\big(\alpha(x) \Rightarrow \omega(x)\big) \equiv \mathrm{I}.$$

Demostración:

$$(\forall x)\big(\alpha(x) \Rightarrow \beta(x)\big) \wedge (\forall x)\big(\beta(x) \Rightarrow \omega(x)\big) \equiv (\forall x)\Big(\big(\alpha(x) \Rightarrow \beta(x)\big) \wedge \big(\beta(x) \Rightarrow \omega(x)\big)\Big)$$

(Distributiva)

$$\equiv (\forall x)\big(\alpha(x) \Rightarrow \omega(x)\big) \qquad \text{(SH)}$$

Teorema 4. $(\exists x)\big(\alpha(x) \Rightarrow \beta(x)\big) \equiv (\forall x)\big(\alpha(x)\big) \Rightarrow (\exists x)\big(\beta(x)\big)$

Demostración:

$$(\exists x)\big(\alpha(x) \Rightarrow \beta(x)\big) \equiv (\exists x)\big(\sim \alpha(x) \vee \beta(x)\big) \qquad \text{(Definición de } \Rightarrow\text{)}$$

$$\equiv \big((\exists x) \sim \alpha(x)\big) \vee \big((\exists x)\beta(x)\big) \qquad \text{(Distributiva)}$$

$$\equiv \sim (\forall x)\alpha(x) \vee (\exists x)\beta(x) \qquad \text{(Morgan)}$$

$$\equiv (\forall x)\alpha(x) \Rightarrow (\exists x)\beta(x) \qquad \text{(Definición de } \Rightarrow\text{)}$$

Teorema 5. $(\forall x)\alpha(x) \Rightarrow (\exists x)\alpha(x)$ ≡I.

Demostración (por reducción al absurdo):

Supongamos $\sim(\exists x)\alpha(x) \wedge (\forall x)\alpha(x)$:

$$
\begin{aligned}
(\forall x)\alpha(x) \wedge \sim(\exists x)\alpha(x) &\Rightarrow (\forall x)\alpha(x) \wedge (\forall x)(\sim \alpha(x)) && \text{(Morgan)}\\
&\Rightarrow (\forall x)(\alpha(x) \wedge \sim \alpha(x)) && \text{(Distributiva)}\\
&\Rightarrow (\forall x)O && \text{(Complemento)}\\
&\Rightarrow O
\end{aligned}
$$

Luego,

$(\forall x)\alpha(x) \wedge \sim(\exists x)\alpha(x) \Rightarrow O$. En consecuencia, por RRA, $(\forall x)\alpha(x) \Rightarrow (\exists x)\alpha(x)$.

Teorema 6.

La fórmula $(\forall x)(\alpha(x) \Rightarrow \beta(x)) \Rightarrow ((\forall x)\alpha(x) \Rightarrow (\forall x)\beta(x))$ ≡I.

Demostración (por prueba condicional):

$$
\begin{aligned}
&(\forall x)(\alpha(x) \Rightarrow \beta(x)) \wedge (\forall x)\alpha(x) && \text{(Introducción del antecedente de la conclusión)}\\
&\quad \equiv (\forall x)((\alpha(x) \Rightarrow \beta(x)) \wedge \alpha(x)) && \text{(Teorema: distributiva)}\\
&\quad \equiv (\forall x)\beta(x) && \text{(MPP)}
\end{aligned}
$$

En consecuencia por PC,

$(\forall x)(\alpha(x) \Rightarrow \beta(x)) \Rightarrow ((\forall x)\alpha(x) \Rightarrow (\forall x)\beta(x))$.

Teorema 7. $(\forall x)(\alpha(x) \vee \beta(x)) \Rightarrow (\forall x)\alpha(x) \vee (\exists x)(\beta(x))$

Demostración. Recordemos que podemos negar alguna de las fórmulas atómicas de la conclusión para llegar a la afirmación de la otra, lo cual es una variante de la prueba condicional ya que

$(\forall x)\alpha(x)\vee(\exists x)\beta(x)\equiv\sim(\exists x)\beta(x)\Rightarrow(\forall x)\alpha(x)$. Utilicemos esto último e introduzcamos $\sim(\exists x)\beta(x)$.

$(\forall x)\big(\alpha(x)\vee\beta(x)\big)\wedge\big(\sim(\exists x)\beta(x)\big)$

$$\equiv(\forall x)\big(\alpha(x)\vee\beta(x)\big)\wedge(\forall x)\big(\sim\beta(x)\big) \quad \text{(Morgan)}$$

$$\equiv(\forall x)\Big(\big(\alpha(x)\vee\beta(x)\big)\wedge\big(\sim\beta(x)\big)\Big) \quad \text{(Distributiva)}$$

$$\Rightarrow(\forall x)\big(\alpha(x)\big) \quad \text{(MPP, a la conclusión entre paréntesis)}$$

por lo tanto,

$$(\forall x)\big(\alpha(x)\vee\beta(x)\big) \Rightarrow\big(\sim(\exists x)\beta(x)\Rightarrow(\forall x)\alpha(x)\big) \quad \text{(PC)}$$

$$\equiv\big((\exists x)\beta(x)\vee(\forall x)\alpha(x)\big) \quad (\text{Definición de } \Rightarrow)$$

$$\equiv\big((\forall x)\alpha(x)\vee(\exists x)\beta(x)\big) \quad \text{(Conmutativa)}$$

Ejercicios

Pruebe la validez de las siguientes fórmulas:

1. $\big((\exists x)\alpha(x)\Rightarrow(\forall x)\beta(x)\big)\Rightarrow\big((\forall x)\big(\alpha(x)\Rightarrow\beta(x)\big)\big)$
2. $\big((\exists x)\alpha(x)\Rightarrow(\exists x)\beta(x)\big)\Rightarrow(\exists x)\big(\alpha(x)\Rightarrow\beta(x)\big)$
3. $\big((\exists x)\alpha(x)\wedge(\forall x)\beta(x)\big)\Rightarrow(\exists x)\big(\alpha(x)\wedge\beta(x)\big)$
4. $(\forall x)\big(\alpha(x)\Leftrightarrow\beta(x)\big)\Rightarrow\big((\forall x)\alpha(x)\Leftrightarrow(\forall x)\beta(x)\big)$

2.3.6. Resumen de equivalencias y tautologías.

Equivalencias

Morgan

$$\sim(\forall x)\alpha(x) \equiv (\exists x)(\sim \alpha(x))$$

$$\sim(\exists x)\alpha(x) \equiv (\forall x)(\sim \alpha(x))$$

$$\sim(\forall x)(\sim \alpha(x)) \equiv (\exists x)\alpha(x)$$

Distributivas

$$(\forall x)(\alpha(x) \wedge \beta(x)) \equiv (\forall x)\alpha(x) \wedge (\forall x)\beta(x)$$

$$(\exists x)(\alpha(x) \vee \beta(x)) \equiv (\exists x)\alpha(x) \vee (\exists x)\beta(x)$$

Implicación existencial

$$(\exists x)(\alpha(x) \Rightarrow \beta(x)) \equiv (\forall x)\alpha(x) \Rightarrow (\exists x)\beta(x)$$

Tautologías

1. $(\forall x)\alpha(x) \Rightarrow \alpha(a)$ (a constante)
2. $\alpha(a) \Rightarrow (\forall x)\alpha(x)$
3. $(\exists x)\alpha(x) \Rightarrow \alpha(a)$ ("a" nombre supuesto de x)
4. $(\forall x)(\alpha(x) \Rightarrow \beta(x)) \wedge (\forall x)(\beta(x) \Rightarrow \omega(x)) \Rightarrow (\forall x)(\alpha(x) \Rightarrow \omega(x))$
5. $(\exists x)(\alpha(x) \wedge \beta(x)) \Rightarrow (\exists x)\alpha(x) \wedge (\exists x)\beta(x)$
6. $(\forall x)\alpha(x) \vee (\forall x)\beta(x) \Rightarrow (\forall x)(\alpha(x) \vee \beta(x))$
7. $(\forall x)\alpha(x) \Rightarrow (\exists x)\alpha(x)$
8. $(\forall x)(\alpha(x) \Rightarrow \beta(x)) \Rightarrow ((\forall x)\alpha(x) \Rightarrow (\forall x)\beta(x))$
9. $(\forall x)(\alpha(x) \vee \beta(x)) \Rightarrow ((\forall x)\alpha(x) \vee (\exists x)\beta(x))$

2.3.7. Teoría general de la inferencia.

Las reglas de inferencia con cuantificadores van más allá de las establecidas para el cálculo de enunciados y se apoyan en equivalencias y tautologías que involucran cuantificadores.

De cada equivalencia o tautología podemos deducir una regla de inferencia que permite agilizar las deducciones.

Utilizamos el hecho de que ($\mathcal{A}$) implica tautológicamente a ($\mathcal{B}$) si ($\mathcal{A}$)$\Rightarrow$ ($\mathcal{B}$) es una fórmula válida. En este caso, decimos que de ($\mathcal{A}$) se infiere ($\mathcal{B}$).

Además, son válidas las reglas de equivalencia:

$\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}$

Si $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ entonces $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A}$

$\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \Leftrightarrow \sim\mathcal{B} \equiv \sim\mathcal{A}$

Así como las restantes del cálculo de enunciados.

Algunas reglas tienen nombres específicos mientras que otras no, pero podemos utilizarlas mencionándolas de manera explícita.

1. Regla del silogismo *BARBARA*

   De

   1. $(\forall x)\big(\alpha(x) \Rightarrow \beta(x)\big)$ (p)
   2. $(\forall x)\big(\beta(x) \Rightarrow \omega(x)\big)$ (p)

   $\vDash (\forall x)\big(\alpha(x) \Rightarrow \omega(x)\big)$

Esta regla emana de la tautología:

$$(\forall x)\big(\alpha(x) \Rightarrow \beta(x)\big) \wedge (\forall x)\big(\beta(x) \Rightarrow \omega(x)\big) \Rightarrow (\forall x)\big(\alpha(x) \Rightarrow \omega(x)\big)$$

2. Regla de especificación universal (EU)

Dado un dominio D y a en D; α condición en D

1. $(\forall x)\alpha(x)$ (p)

$\vDash \alpha(a)$ (EU)

3. Regla de especificación existencial (EE)

a) $(\exists x)\alpha(x)$ (p)

$\vDash \alpha(a)$

4. Regla de generalización existencial (GE)

a) $\alpha(a)$ (p)

$\vDash (\exists x)\alpha(x)$

5. Distributiva de ∀ respecto a ∧

a) $(\forall x)(\alpha(x) \wedge \beta(x))$ (p)

$\vDash (\forall x)\alpha(x) \wedge (\forall x)\beta(x)$

1. $(\forall x)\alpha(x) \wedge (\forall x)\beta(x)$ (p)

$\vDash (\forall x)(\alpha(x) \wedge \beta(x))$

6. Distributiva de ∃ respecto a ∨

a) $(\exists x)(\alpha(x) \vee \beta(x))$ (p)

$\vDash (\exists x)\alpha(x) \vee (\exists x)\beta(x)$

1. $(\exists x)\alpha(x) \vee (\exists x)\beta(x)$

$\vDash (\exists x)(\alpha(x) \vee \beta(x))$

Otras reglas

7. De $(\exists x)(\alpha(x) \wedge \beta(x))$ se puede deducir $(\exists x)\alpha(x) \wedge (\exists x)\beta(x)$.

8. De $(\forall x)\alpha(x) \vee (\forall x)\beta(x)$ se puede deducir $(\forall x)(\alpha(x) \vee \beta(x))$.

9. De $(\forall x)\alpha(x)$ se puede deducir $(\exists x)\alpha(x)$.

10. Leyes de Morgan

    a) De $(\forall x)(\sim \alpha(x))$ puede deducirse $\sim (\exists x)\alpha(x)$ y viceversa.
    b) De $(\exists x)(\sim \alpha(x))$ puede deducirse $\sim (\forall x)\alpha(x)$ y viceversa.
    c) De $(\forall x)\alpha(x)$ puede deducirse $\sim (\exists x)(\sim \alpha(x))$ y viceversa.
    d) De $(\exists x)\alpha(x)$ puede deducirse $\sim (\forall x)(\sim \alpha(x))$ y viceversa.

Nota. Una variable es imprecisa en una fórmula atómica si es libre en dicha fórmula; en caso contrario no es imprecisa.

La cuantificación de una variable imprecisa en un predicado unario P^1 convierte a P^1 en un enunciado proposicional en el dominio en consideración.

Así, para $P(x) := "x > 5"$ en el dominio de los números naturales, al sustituir x por 6 obtenemos $P(6) := "6 > 5"$, que es un enunciado verdadero, y si sustituimos x por 2 obtenemos $P(2) := "2 > 5"$, que es falso.

Los enunciados proposicionales se suelen caracterizar como *predicados –o-arios*, es decir que no se refieren a variable alguna y, por lo tanto, son indiferentes al alcance de cuantificadores.

Esto nos permite establecer otras reglas de inferencia.

11. Si P es un enunciado proposicional o una fórmula en la cual x no es una variable libre, entonces:

    a) $(\forall x)(P \vee \alpha(x)) \equiv P \vee (\forall x)\alpha(x)$
    b) $(\exists x)(P \vee \alpha(x)) \equiv P \vee (\exists x)\alpha(x)$
    c) $(\forall x)(P \wedge \alpha(x)) \equiv P \wedge (\forall x)\alpha(x)$
    d) $(\exists x)(P \wedge \alpha(x)) \equiv P \wedge (\exists x)\alpha(x)$

Ejemplo 1. De "Juan es trabajador" $\wedge$ "existen bobos" puedo deducir $(\exists x)(P \wedge \alpha(x))$ donde

P = "Juan es trabajador" y $\alpha(x)$ = "x es un bobo".

Ejemplo 2. Probemos (a) para un dominio $D = \{a, b\}$.

$$\begin{aligned}(\forall x)(P \vee \alpha(x)) &\equiv (P \vee \alpha(a)) \wedge (P \vee \alpha(b)) \\ &\equiv P \vee (\alpha(a) \wedge \alpha(b)) \\ &\equiv P \vee (\forall x)\alpha(x)\end{aligned}$$

Ejercicio. Demuéstrese (b), (c) y (d) para un dominio $D = \{a, b\}$.

2.3.8. Razonamientos válidos o inválidos.

Un razonamiento $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \vDash Q$ es válido si la fórmula $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \Rightarrow Q$ es válida; es decir, toda interpretación de dicha fórmula es un modelo así. Un razonamiento es no válido si existe una interpretación que no es un modelo.

Cuando un razonamiento es válido se pueden combinar las premisas por medio de reglas de inferencia y llegar a la conclusión.

Ejemplo 1. (Un silogismo clásico).

Todos los griegos son hombres.

Todos los hombres son mortales.

Por lo tanto: todos los griegos son mortales.

Paso 1. Simbolización de premisas y conclusión.

1. $(\forall x)\big(G(x) \Rightarrow H(x)\big)$ (p)
2. $(\forall x)\big(H(x) \Rightarrow M(x)\big)$ (p)

$\vDash (\forall x)\big(G(x) \Rightarrow M(x)\big)$ (BARBARA)

Ejemplo 2. Todos los cuadrúpedos son mamíferos. Algunos cuadrúpedos son domésticos. En consecuencia, algunos mamíferos son domésticos.

1. $(\forall x)\big(G(x) \Rightarrow M(x)\big)$ (p)
2. $(\exists x)\big(C(x) \wedge D(x)\big)$ (p)
3. $C(a) \wedge D(a)$ (EE, 2)
4. $C(a) \Rightarrow M(a)$ (EU, 1)
5. $C(a)$ (S,3)
6. $D(a)$ (S,3)
7. $M(a)$ (MPP, 4,5)
8. $M(a) \wedge D(a)$ (AL, 6,7)
9. $(\exists x)\big(M(x) \wedge D(x)\big)$ (GU, 8)

Ejemplo 3. Ningún perro vuela. Pluto es un perro. En consecuencia, Pluto no vuela.

1. $(\forall x)\big(P(x) \Rightarrow \sim V(x)\big)$ (p)
2. $P(p)$ (p)
3. $P(p) \Rightarrow \sim V(p)$ (EU, 1, p/x)
4. $\sim V(p)$ (MPP, 2,3)

Ejemplo 4. Ningún caballo vuela. No existe un piloto que no quiera volar. Todos los animales de mi granja son caballos. En consecuencia, ninguno de los animales de mi granja es piloto.

1.	$(\forall x)(C(x) \Rightarrow \sim V(x))$	(p)
2.	$\sim(\exists x)(P(x) \wedge \sim V(x))$	(p)
3.	$(\forall x)(A(x) \Rightarrow C(x))$	(p)
4.	$(\forall x)(\sim P(x) \wedge \sim V(x))$	(Morgan, 2)
5.	$(\forall x)(\sim P(x) \vee V(x))$	(Morgan e involución, 4)
6.	$(\forall x)(P(x) \Rightarrow V(x))$	(Def. de $\Rightarrow$, 5)
7.	$(\forall x)(A(x) \Rightarrow \sim V(x))$	(BARBARA, 3,1)
8.	$(\forall x)(\sim V(x) \Rightarrow \sim P(x))$	(Contrapositiva, 6)
9.	$(\forall x)(A(x) \Rightarrow \sim P(x))$	(BARBARA, 7,8)

Ejemplo 5. Alguna gente ignorante vende su voto. Algunos estudiantes no venden su voto. En consecuencia, algunos estudiantes no son ignorantes.

Este razonamiento al parecer es válido. Sin embargo, como veremos no lo es, pues podemos hallar una interpretación que no es un modelo. Tales interpretaciones se denominan *contraejemplos*.

En primer lugar, como hemos venido haciendo, representamos las premisas y la conclusión.

1.	$(\exists x)(I(x) \wedge V(x))$	(p)
2.	$(\exists x)(E(x) \wedge \sim V(x))$	(p)

$$\vDash (\exists x)(E(x) \wedge \sim I(x))$$

Tomemos como dominio

$D = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $I(x) = "x \leq 4"$, $V(x) = "x > 3"$,
$E(x) = "x \leq 5"$

Entonces,

1. $(\exists x)(x \leq 4 \wedge x > 3)$ es verdadera.
2. $(\exists x)(x > 3 \wedge x \leq 5)$ es verdadera.

Pero la condición será

$(\exists x)(x \leq 4 \wedge x > 5)$ es falsa.

Por lo tanto, el razonamiento no es válido.

Ejemplo 6. (Lewis Carroll, 1876). Toda águila puede volar. Algunos cerdos no pueden volar. En consecuencia, algunos cerdos no son águilas.

1.	$(\forall x)(A(x) \Rightarrow V(x))$	(p)
2.	$(\exists x)(P(x) \wedge \sim V(x))$	(p)
	$\vDash (\exists x)(P(x) \wedge \sim A(x))$	

Solución:

1.	$(\forall x)(A(x) \Rightarrow V(x))$	(p)
2.	$(\exists x)(P(x) \wedge \sim V(x))$	(p)
3.	$P(a) \wedge \sim V(a)$	(EE, 2)
4.	$A(a) \Rightarrow V(a)$	(EU, 1)
5.	$P(a)$	(S, 3)
6.	$\sim V(a)$	(S, 3)
7.	$\sim A(a)$	(MTT, 4,6)

8. $P(a) \wedge \sim A(a)$ (AL, 5,7)

9. $(\exists x)(P(x) \wedge \sim A(x))$ (GE, 8)

El siguiente ejemplo tomado de Suppes (1966, p. 132), que se refiere a los filósofos Guillermo de Ockham (siglo XIV) y Thomas Hobbes (siglo XVII), es de sumo interés.

Ejemplo 7. Ninguno de los seguidores de Ockham estima a ningún realista. Cualquiera de los seguidores de Ockham estima al menos a un seguidor de Hobbes. Ockham tiene seguidores. En consecuencia, ninguno de los seguidores de Hobbes es realista.

Aparece aquí un predicado binario, $E(x, y) =$ "x estima a y". Tenemos:

1. $(\forall x)(O(x) \Rightarrow (\forall y)(R(y) \Rightarrow \sim E(x, y)))$ (p)
2. $(\forall x)(O(x) \Rightarrow (\exists y)(H(y) \wedge E(x, y)))$ (p)
3. $(\exists x)O(x)$ (p)
4. $O(a)$ (EE, 3)
5. $O(a) \Rightarrow (\forall y)(R(y) \Rightarrow \sim E(a, y))$ (EU, 1, a/x)
6. $O(a) \Rightarrow (\exists y)(H(y) \wedge E(a, y))$ (EU, 2, a/x)
7. $(\exists y)(H(y) \wedge E(a, y))$ (MPP, 4,6)
8. $H(b) \wedge E(a, b)$ (EE, 7, b/y)
9. $(\forall y)(R(y) \Rightarrow \sim E(a, y))$ (MPP, 4,5)
10. $R(b) \Rightarrow \sim E(a, b)$ (EU, 9, b/y)
11. $E(a, b)$ (S, 8)
12. $\sim R(b)$ (MTT, 10,11)
13. $H(b)$ (S, 8)
14. $H(b) \wedge (\sim R(b))$ (AL, 12,13)
15. $(\exists x)(H(x) \wedge (\sim R(x)))$ (GE, 14)

Ejercicios

Pruébese que cada fórmula de (1) a (5) es válida.

1. $(\exists x)\alpha(x) \wedge (\forall x)\beta(x) \Rightarrow (\exists x)(\alpha(x) \wedge \beta(x))$
2. $((\exists x)\alpha(x) \Rightarrow (\exists x)\beta(x)) \Rightarrow (\exists x)(\alpha(x) \wedge \beta(x))$
3. $(\forall x)(\alpha(x) \Rightarrow \beta(x)) \Rightarrow (\forall x)(\alpha(x) \wedge \gamma(x) \Rightarrow \beta(x) \wedge \gamma(x))$
4. $(\forall x)(\alpha(x) \Rightarrow \beta(x)) \Rightarrow (\forall x)(\alpha(x) \vee \gamma(x) \Rightarrow \beta(x) \vee \gamma(x))$
5. $(\forall x)(\alpha(x) \Rightarrow \beta(x)) \Rightarrow ((\exists x)\alpha(x) \Rightarrow (\exists x)\beta(x))$

Ninguna de las fórmulas que siguen es válida. Demuéstrelo mostrando una interpretación que no sea un modelo (contraejemplo).

6. $(\exists x)\alpha(x) \wedge (\exists x)\beta(x) \Rightarrow (\exists x)(\alpha(x) \wedge \beta(x))$
7. $(\forall x)(\alpha(x) \vee \beta(x)) \Rightarrow ((\forall x)\alpha(x) \vee (\forall x)\beta(x))$
8. $(\exists x)(\alpha(x) \wedge \beta(x)) \wedge (\exists x)(\beta(x) \wedge \varepsilon(x)) \Rightarrow (\exists x)(\alpha(x) \wedge \varepsilon(x))$

Constrúyase, de ser posible, una deducción correspondiente a los ejercicios (9) a (15). Si el argumento no es válido, pruébelo hallando una interpretación que no sea modelo.

9. Algunos idealistas son estructuralistas. Todos los estructuralistas son empiristas. En consecuencia, algunos idealistas son empiristas. $(I(x), E(x), P(x))$
10. Algunos de los seguidores de Aristóteles estiman a todos los seguidores de Tomás de Aquino. Ninguno de los seguidores de Aristóteles estima a ningún idealista. En consecuencia, ninguno de los seguidores de Tomás de Aquino es idealista. $(A(x), T(x), E(x,y), I(x))$

11. Demuéstrese $(\forall x)(\forall z)\big(P(x,z) \Rightarrow (\exists y)\big(P(x,y) \wedge P(y,z)\big)\big)$ de las premisas:

1. $(\forall x)(\forall y)\big(P(x,y) \Rightarrow \sim P(y,x)\big)$ (p)
2. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)\big(P(x,y) \wedge P(y,z) \Rightarrow P(x,z)\big)$ (p)
3. $(\forall x)(\forall y)\big(P(x,y) \Rightarrow x \neq y\big)$ (p)
4. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)\big(B(x,y,z) \Rightarrow \big(P(x,y) \wedge P(y,z)\big) \vee \big(P(z,y) \wedge P(y,z)\big)\big)$ (p)
5. $(\forall x)(\forall y)\big(x \neq z \Rightarrow (\exists y) B(x,y,z)\big)$ (p)

12. Algunos colombianos admiran a Álvaro Uribe. Algunos colombianos no admiran a nadie que admire a Álvaro Uribe. En consecuencia, algunos colombianos no son admirados por todos los colombianos. $\big(C(x), U(x), A(x,y)\big)$

13. Algunos futbolistas son rudos. Algunos policías son rudos. En consecuencia, algunos policías son futbolistas. $\big(F(x),\ R(x),\ P(x)\big)$

14. Algunos futbolistas son negros. Algunos negros son policías. En consecuencia, algunos futbolistas son policías.

15. Toda explicación clara es satisfactoria. Algunas excusas son satisfactorias. En consecuencia, algunas excusas no son explicaciones claras.

Test

La fórmula $(P \Rightarrow Q) \wedge (R \Rightarrow S) \Rightarrow (P \wedge R \Rightarrow Q \wedge S)$ es:

a) Una contradicción.
b) Una tautología.
c) Tiene modelos y casos falsos.
d) No puede decidirse al respecto.

1. Dadas las siguientes premisas:

Si diez mil millones son suficientes, entonces Juan será elegido concejal. O los partidarios colaboran con la mitad del dinero o Juan no será elegido. Pero no es cierto que sean suficientes diez mil millones y que los partidarios colaboren con la mitad del dinero.

Se deduce:

a) No son suficientes diez mil millones.
b) Son suficientes diez mil millones.
c) Los partidarios no colaboran con la mitad del dinero.
d) Si los partidarios no colaboran con la mitad del dinero, Juan no será elegido concejal.

3. Dadas las siguientes premisas:

	1. $\boldsymbol{y} \neq 1 \wedge \boldsymbol{y} \not< 1$	(p)
1.	$\boldsymbol{y} \not> 1 \Rightarrow \boldsymbol{y} < 1 \vee \boldsymbol{y} = 1$	(p)
2.	$\boldsymbol{x} = 3 \vee \boldsymbol{x} > 3$	(p)
3.	$\boldsymbol{x} > 3 \Rightarrow \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$	(p)
4.	$\boldsymbol{x} = 3 \Rightarrow \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$	(p)

Se concluye:

a) $\sim \left(x = y \vee \sim \left(y < 1\right)\right)$.
b) $x \neq y \wedge y = 1 \quad x \neq y \wedge y = 1$.
c) $\sim \left(x = y \vee \sim \left(y > 1\right)\right)$.
d) $x = y \wedge y > 1$.

4. Si x, y son números reales, entonces:

a) $\left|x + y\right| = \left|x\right| + \left|y\right|$.
b) $\left|x + y\right| \leq \left|x\right| + \left|y\right|$.

c) $|x+y| = x+y$.
d) $|x+y| \geq |x|+|y|$.

5. Indique la conclusión que se deduciría de las siguientes premisas:

Todos los amantes de la paz están de acuerdo con los seguidores de Juan. Ninguno de los amantes de la paz está de acuerdo con algún fundamentalista. Hay amantes de la paz.

a) Ninguno de los seguidores de Juan es fundamentalista.
b) Algunos de los seguidores de Juan son fundamentalistas.
c) Algunos fundamentalistas son amantes de la paz.
d) Ninguna de las anteriores.

6. De "Algunos futbolistas son negros. Algunos negros son policías" se deduce:

a) Algunos futbolistas son policías.
b) Algunos policías son futbolistas.
c) Hay policías que no son futbolistas.
d) Ninguna de las anteriores.

7. Dadas las premisas, si $P \Rightarrow (Q \vee R)$, $Q \Rightarrow S$ y $\mathrm{R} \Rightarrow \mathrm{T}$, entonces:

e) $T \vee S$.
f) $P \Rightarrow S$.
g) $P \Rightarrow (S \vee T)$.
h) $P \wedge S \Rightarrow T$.

Solución: C.

8. Si D es el predicado "…defiende los derechos humanos", N el predicado "…es defensor de la naturaleza" y A el predicado binario "… admira a…", la representación simbólica de "todos los defen-

sores de los derechos humanos son admirados por los defensores de la naturaleza" sería:

a) $(\forall x)\big(D(x) \Rightarrow (\forall y)\big(A(y,x)\big)\big)$.
b) $(\forall x)\big(D(x) \Rightarrow (\forall y)\big(A(y,x) \Rightarrow N(y)\big)\big)$.
c) $(\forall x)\big(D(x) \Rightarrow (\forall y)\big(N(y) \Rightarrow A(y,x)\big)\big)$.
d) $(\forall x)\big(D(x) \Rightarrow (\forall y)\big(N(y) \Rightarrow A(x,y)\big)\big)$.

9. Dos de los enunciados que siguen son equivalentes a $xy = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$.

(i) $xy = 0 \wedge x = 0 \Rightarrow y = 0$.

(ii) $xy = 0 \wedge x \neq 0 \Rightarrow y = 0$.

(iii) $x \neq 0 \vee y \neq 0 \Rightarrow xy \neq 0$.

(iv) $x \neq 0 \wedge y \neq 0 \Rightarrow xy \neq 0$.

Ellos son:

a) (i) y (ii).
b) (i) y (iii).
c) (ii) y (iii).
d) (ii) y (iv).

10. La proposición "si n^2 es impar, entonces n es impar" se demuestra:

a) Suponiendo que n^2 es impar y utilizando las definiciones correspondientes, deducir que n es impar.
b) Suponiendo que n no es impar y probando que n^2 no es impar.
c) Buscando muchos ejemplos que verifiquen la condición.
d) O n^2 es impar o n es impar.

3. Lenguajes matemáticos

3.1. Lenguaje de conjuntos

3.1.1. Conjuntos.

Un conjunto es un constructo A formado por individuos denominados elementos o miembros de A.

Generalmente, los conjuntos son extensiones de condiciones sobre un dominio D que a su vez es un conjunto preestablecido de alguna manera.

Recordemos el diccionario establecido en (2.3.4). A este le adicionamos:

$$\alpha(x) \wedge \sim \alpha(x) \qquad \longleftrightarrow \qquad x \in \varnothing$$

Establecemos entonces las siguientes definiciones.

Definición 1.

a) $A \cup B = \{x \in D \mid x \in A \vee x \in B\}$ es el conjunto unión de A y B.

b) $A \cap B = \{x \in D \mid x \in A \wedge x \in B\}$ es el conjunto intersección de A y B.

c) $A^c = \{x \in D \mid \sim (x \in A)\}$ es el complemento de A en D.

d) $\varnothing = \{x \in D \mid \alpha(x) \wedge \sim \alpha(x)\}$

Prescindiendo del dominio escribiremos

a) $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$

b) $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$

c) $x \in A^c \Leftrightarrow x \notin A \Leftrightarrow \sim (x \in A)$

Definición 2. Si D es un dominio preestablecido, α una condición en D y A la extensión de α, diremos que A es parte de D y escribiremos $A \subseteq D$. También suele decirse que A está incluido o contenido o es subconjunto de D.

Las extensiones de condiciones en D son subconjuntos de D.

Igualdad de conjuntos

Hemos mencionado que dos condiciones α y β son equivalentes si tienen la misma extensión.

$\alpha \equiv \beta \Leftrightarrow (\alpha(x) \Leftrightarrow \beta(x))$. Esto nos permite definir la igualdad de conjuntos.

Definición 3. $A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$.

Ejemplo 1. Si $A = \{1, 2, 3\}$ y $A = \{3, 2, 1\}$, entonces $A = B$. Esto implica que el orden y las repeticiones no cambian la igualdad.

Teorema 1. Dados los conjuntos ***A, B*** y ***C:***

a) $A = A$

b) $A = B \Leftrightarrow B = A$

c) $A = B \wedge B = C \Leftrightarrow A = C$

Demostración:

1. $(\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in A) \equiv I$

2. $(\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B) \equiv (\forall x)(x \in B \Leftrightarrow x \in A)$

entonces $A = B \Leftrightarrow B = A$

$$\begin{aligned} A = B \wedge B = C &\Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B) \wedge (\forall x)(x \in B \Leftrightarrow x \in C) \\ &\Leftrightarrow (\forall x)\big((x \in A \Leftrightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Leftrightarrow x \in C)\big) \\ &\Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in C) \\ &\Leftrightarrow A = C \end{aligned}$$

Definición 4. Diremos que A es subconjunto o parte de B, si todo elemento en A es elemento en B. En símbolos:

$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$

Teorema 2. $\sim (A \subseteq B) \Leftrightarrow (\exists x)(x \in A \wedge x \notin B)$ notaremos $\sim (A \subseteq B) \Leftrightarrow A \not\subseteq B$.

Demostración:

$$\begin{aligned} A \not\subseteq B &\Leftrightarrow \sim (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B) && \text{(Definición)} \\ &\Leftrightarrow (\exists x)(\sim (x \in A \Rightarrow x \in B)) && \text{(Morgan)} \\ &\Leftrightarrow (\exists x)(x \in A \wedge x \notin B) && \text{(Negación de } \Rightarrow\text{)} \end{aligned}$$

Teorema 3. $A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \notin B \Rightarrow x \notin A)$

Demostración:

$$\begin{aligned} A \subseteq B &\Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B) && \text{(Definición)} \\ &\Leftrightarrow (\forall x)(x \notin B \Rightarrow x \notin A) && \text{(Contraposición)} \end{aligned}$$

Teorema 4. $\sim(\exists x)(x \in \varnothing) \equiv I$

Demostración:

Supongamos lo contrario:

$$
\begin{aligned}
(\exists x)(x \in \varnothing) &\Rightarrow (\exists x)(\alpha(x) \wedge \sim \alpha(x)) && \text{(Definición)} \\
&\Rightarrow \alpha(a) \wedge \sim \alpha(a) && \text{(EE, a/x)} \\
&\Rightarrow O && \text{(Complemento)}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $(\exists x)(x \in \varnothing)$ implica una contradicción y debe cumplirse $\sim(\exists x)(x \in \varnothing)$.

Corolario 1. $(\forall x)(x \notin \varnothing) \equiv I$

Corolario 2. $(\exists x)(x \in \varnothing) \equiv O$

Teorema 5. $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

Demostración:

$$
\begin{aligned}
A = B &\Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B) && \text{(Definición)} \\
&\Leftrightarrow (\forall x)((x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A)) && \text{(Definición)} \\
&\Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (\forall x)(x \in B \Rightarrow x \in A) && \text{(Distributiva)} \\
&\Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A
\end{aligned}
$$

Teorema 6. Si A, B y C son subconjuntos, entonces:

a) $A \subseteq A$

b) $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

Demostración:

$$A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (\forall x)(x \in B \Rightarrow x \in C)$$

(Definición)

$$\Rightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in C) \qquad \text{(BARBARA)}$$

$$\Rightarrow A \subseteq C \qquad \text{(Definición)}$$

Teorema 7. $\varnothing \subseteq A$ para cada $A \subseteq D$.

Demostración:

La fórmula $x \in \varnothing \Rightarrow x \in A$ es válida en cualquier caso, pues $x \in \varnothing$ es siempre falsa.

Teorema 8. $A \subseteq \varnothing \Rightarrow A = \varnothing$

Demostración:

Supongamos $A = \varnothing$, entonces:

$$\begin{aligned} A \subseteq \varnothing \wedge \sim (A = \varnothing) &\equiv (A \subseteq \varnothing) \wedge \sim (A \subseteq \varnothing \wedge \varnothing \subseteq A) \\ &\equiv (A \subseteq \varnothing) \wedge (A \not\subseteq \varnothing \vee \varnothing \not\subseteq A) \\ &\Rightarrow \varnothing \not\subseteq A && \text{(MTP)} \\ &\Rightarrow \varnothing \not\subseteq A \wedge \varnothing \not\subseteq A && \text{(AL, Teorema 7)} \\ &\Rightarrow \varnothing \end{aligned}$$

Por lo tanto, $A \subseteq \varnothing \Rightarrow A = \varnothing$.

Teorema 9. $A = \varnothing$ y $B = \varnothing \Rightarrow A = B$ es consecuencia inmediata del teorema 1.

El teorema 8 nos dice que $\varnothing$ no tiene subconjuntos diferentes a él.

Definición 5. Si A y B son subconjuntos del dominio, diremos que A es un subconjunto propio de B si $A \subseteq B$ y $A \neq B$.

Escribiremos $A \subset B$ para "A es un subconjunto propio de B".

Teorema 10.

a) $A \cup A = A$

b) $A \cup B = B \cup A$

c) $A \subseteq A \cup B \wedge B \subseteq A \cup B$

d) $A = B \Rightarrow A \cup C = B \cup C$

e) $A \cup \varnothing = A$

f) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

En matemáticas se suelen realizar demostraciones sin tanta formalidad, pero teniendo en cuenta lo que se simplifica en las notaciones y no violar reglas válidas. Esto lo utilizaremos a menudo, en especial cuando los enunciados involucren solo cuantificadores universales.

Demostración:

a) Habría que demostrar que $(\forall x)(x \in A \vee x \in A) \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A)$.

Tomemos x cualquiera en $A \cup A \Rightarrow x \in A \vee x \in A \Rightarrow x \in A$ (Por Idempotencia)

La demostración será:

$$x \in A \cup A \Leftrightarrow x \in A \vee x \in A \qquad \text{(Definición } \cup\text{)}$$

$$\Leftrightarrow x \in A. \qquad \text{(Idempotencia)}$$

Luego, $x \in A \cup A \Leftrightarrow x \in A$ (SH)

Así, $A \cup A = A$.

b) $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$ (Definición $\cup$)

$\Leftrightarrow x \in B \vee x \in A$ (Conmutativa)

$\Leftrightarrow x \in B \cup A$.

c) $x \in A \quad \Rightarrow x \in A \vee x \in B$ (A)

$\Rightarrow x \in A \cup B$. (Definición $\cup$)

Entonces,

$x \in A \Rightarrow x \in A \cup B$

Es decir,

$A \subseteq A \cup B$

d) Tomemos como premisa $A = B$ y debemos probar que $A \cup C = B \cup C$.

Para facilitar las cosas dividiremos la demostración en

(i) $x \in A \cup C \Rightarrow x \in B \cup C$

(ii) $x \in B \cup C \Rightarrow x \in A \cup C$

Demostración:

(i)
$$\begin{aligned} x \in A \cup C \wedge A = B &\Rightarrow (x \in A \vee x \in C) \wedge (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A) \\ &\Rightarrow (x \in A \vee x \in C) \wedge (A \subseteq B) \\ &\Rightarrow (x \in B \vee x \in C) \\ &\Rightarrow x \in B \cup C \end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned} x \in B \cup C \wedge A = B &\Rightarrow (x \in B \vee x \in C) \wedge (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A) \\ &\Rightarrow (x \in B \vee x \in C) \wedge (B \subseteq A) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (x \in A \vee x \in C)$$
$$\Rightarrow x \in A \cup C$$

e) $x \in A \cup \varnothing \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in \varnothing)$

$\Rightarrow (x \in A \vee x \in \varnothing) \wedge (x \notin \varnothing)$ (Identidad)

$\Rightarrow x \in A$

Así, $A \cup \varnothing \subseteq A$

Por otra parte,

$x \in A \Rightarrow x \in A \vee x \in \varnothing \Rightarrow x \in A \cup \varnothing$

Luego, $A \subseteq A \cup \varnothing$

Por lo tanto, $A = A \cup \varnothing$

Teorema 11. $A \subseteq C \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \cup B \subseteq C$.

Debemos probar que $A \cup B \subseteq C$, con las premisas $A \subseteq C \wedge B \subseteq C$.

Tomemos $x \in A \cup B$, entonces $x \in A \vee x \in B$, pero $A \subseteq C \wedge B \subseteq C$; por inclusión, los elementos de A están en C y los de B están en C , entonces $x \in C \vee x \in C$. Por lo tanto,

$x \in A \cup B \Rightarrow x \in C$, es decir $A \cup B \subseteq C$.

Teorema 12. $A \subseteq B \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup C$

Demostración:

Tomemos $x \in A \cup C$ e incluyamos la hipótesis $A \subseteq B$:

$$x \in A \cup C \wedge A \subseteq B \Rightarrow (x \in A \vee x \in C) \wedge (A \subseteq B)$$
$$\Rightarrow (x \in B \vee x \in C)$$
$$\Rightarrow x \in B \cup C\,.$$

Teorema 13. $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$

Demostración:

a) $x \in A \cup B \wedge A \subseteq B \Rightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (A \subseteq B)$
$$\Rightarrow (x \in B \vee x \in B)$$
$$\Rightarrow x \in B$$

Así, $A \cup B \subseteq B$

b) Sabemos que $B \subseteq A \cup B$ (Teorema)

Entonces, $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$

Teorema 14.

a) $A \cap A = A$

b) $A \cap B \subseteq A$

c) $A \cap D = A$

d) $A \cap B = B \cap A$

e) $A \cap \varnothing = \varnothing$

f) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Demostración:

a) $x \in A \cap A \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in A \Leftrightarrow x \in A$

b) $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B$ (Definición)

$\Rightarrow x \in A$ (SL)

Luego, $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$. O sea

c) (i) $A \cap D \subseteq A$

(ii) $x \in A \Rightarrow x \in A \wedge x \in D \Rightarrow x \in A \cap D \Rightarrow A \subseteq A \cap D$ esto prueba la igualdad.

d) $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$ (Definición)

$\Leftrightarrow x \in B \wedge x \in A$ (Conmutativa)

$\Leftrightarrow x \in B \cap A$

Luego, $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in B \cap A$.

e) En primer lugar, $A \cap \varnothing \subseteq \varnothing$; basta probar que $\varnothing \subseteq A \cap \varnothing$, lo cual es cierto porque $\varnothing$ es subconjunto de cualquier conjunto.

f)
$$
\begin{aligned}
x \in A \cap (B \cap C) &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in (B \cap C) \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C \\
&\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \wedge x \in C \\
&\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cap C
\end{aligned}
$$

Teorema 15.

a) $A \cap A^c = \varnothing$

b) $A \cup A^c = D$

c) $A \cap B^c = \varnothing \Leftrightarrow A \subseteq B$

Demostración:

a) $x \in A \cap A^c \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in A^c$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin A$

$\Leftrightarrow x \in \varnothing$

b) $x \in A \cup A^c \Leftrightarrow x \in A \vee x \in A^c$

$\Leftrightarrow x \in A \vee x \notin A \equiv I$

$\Leftrightarrow x \in D$

c) Dividamos la proposición a demostrar en dos

(a) $A \cap B^c = \varnothing \Rightarrow A \subseteq B$

(b) $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B^c = \varnothing$

Demostración de (a):

Sean $x \in A$; entonces

$$\begin{aligned}
x \in A \wedge A \cap B^c = \varnothing \quad & \Rightarrow x \in A \wedge x \notin \left(A \cap B^c\right) \\
& \Rightarrow x \in A \wedge \sim \left(x \in A \cap B^c\right) \\
& \Rightarrow x \in A \wedge \sim \left(x \in A \wedge x \in B^c\right) \\
& \Rightarrow x \in A \wedge \left(x \notin A \vee x \notin B^c\right) \\
& \Rightarrow x \notin B^c \\
& \Rightarrow \sim \left(x \in B^c\right) \\
& \Rightarrow \sim \left(x \notin B\right) \\
& \Rightarrow \sim \left(\sim \left(x \in B\right)\right) \\
& \Rightarrow x \in B
\end{aligned}$$

Así, $x \in A$ con las hipótesis implica $x \in B$. Esto es $A \subseteq B$.

Demostración de (b):

Aceptemos $A \subseteq B$ y probemos $A \cap B^c = \varnothing$, esto es

$A \subseteq B \Rightarrow A \cap B^c = \varnothing$.

Supongamos $A \cap B^c \neq \varnothing$, entonces

$$
\begin{aligned}
(\exists x)\left(x \in A \cap B^c\right) &\equiv (\exists x)\left(x \in A \wedge x \in B^c\right) \\
&\equiv (\exists x)\left(x \in A \wedge x \notin B\right) \\
&\equiv A \not\subseteq B && \text{(Teorema)}
\end{aligned}
$$

Así, $A \cap B^c \neq \varnothing \Rightarrow A \not\subseteq B$, esto es $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B^c = \varnothing$.

Teorema 16. Si D es el dominio,

a) $D^c = \varnothing$

b) $\varnothing^c = D$

c) $\left(A^c\right)^c = A$

Demostración:

a) $x \in D \equiv I$, entonces $x \notin D \equiv O \equiv x \in \varnothing$.

b) $x \notin \varnothing \equiv I \equiv x \in D$.

c)
$$
\begin{aligned}
x \in \left(A^c\right)^c \Leftrightarrow x \notin A^c &\Leftrightarrow \sim\left(x \in A^c\right) \\
&\Leftrightarrow \sim\left(x \notin A\right) \\
&\Leftrightarrow \sim\left(\sim\left(x \in A\right)\right) \\
&\Leftrightarrow \sim\left(x \in A\right)
\end{aligned}
$$

Teorema 17. $A \subseteq B \Leftrightarrow B^c \subseteq A^c$

Demostración:

a) $A \subseteq B \wedge x \in B^c \quad \Rightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge x \notin C$

$\Rightarrow x \notin A$ (MTT)

$\Rightarrow x \in A^c$

b) Si $B^c \subseteq A^c \wedge x \in A \quad \Rightarrow (x \notin B \Rightarrow x \notin A) \wedge x \in A$

$\Rightarrow \sim (x \notin B)$ (MTT)

$\Rightarrow x \in B$ (Involución)

Teorema 18. (Leyes de Morgan).

a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

b) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Demostración:

a) $x \in (A \cup B)^c \quad \Leftrightarrow x \notin (A \cup B)$ (Definición)

$\Leftrightarrow \sim (x \in (A \cup B))$ (Notación)

$\Leftrightarrow \sim (x \in A \vee x \in B)$ (Definición de $\cup$)

$\Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B$ (Morgan)

$\Leftrightarrow x \in A^c \wedge x \in B^c$ (Definición)

$\Leftrightarrow x \in (A^c \cap B^c)$ (Definición)

b) $x \in (A \cap B)^c \quad \Leftrightarrow x \notin (A \cap B)$ (Definición)

$\Leftrightarrow \sim (x \in (A \cap B))$ (Definición)

$\Leftrightarrow \sim (x \in A \wedge x \in B)$ (Definición)

$\Leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B$ (Morgan)

$\Leftrightarrow x \in A^c \vee x \in B^c$ (Definición)

$\Leftrightarrow x \in (A^c \cup B^c)$ (Definición)

Teorema 19. (Distributiva).

a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Demostración:

a) $x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in (B \cup C)$ (Definición)

$\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)$ (Definición)

$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$ (Distributiva)

$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \vee x \in (A \cap C)$ (Definición)

$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (Definición)

b) Ejercicio.

3.1.2. El producto cartesiano.

Notación. Si a y b son individuos, notaremos:

$$\{a\} = \{x : x = a\},$$

$$\{a,b\} = \{x : x = a \vee x = b\}.$$

Al conjunto $\{a,b\}$ se lo denomina *un par* siempre que a y b no representen el mismo individuo, en cuyo caso escribimos $a = b$.

Utilizando estas definiciones, puede probarse el siguiente teorema que dejamos al lector para su demostración.

Teorema 20. $\{a,b\} = \{c,d\} \Leftrightarrow (a = c \wedge b = d) \vee (a = d \wedge b = c)$

Definición 6. Si a y b son individuos, el *par ordenado* (a,b) se define

$$(a,b) = \{\{a\}, \{a,b\}\}.$$

El siguiente teorema caracteriza a los pares ordenados.

Teorema 21. $(a,b)=(c,d)\Leftrightarrow(a=c\wedge b=d)$.

Definición 7. Si A y B son conjuntos, el *producto cartesiano de* A y B se define

$$A\times B=\{(x,y):x\in A\wedge y\in B\}.$$

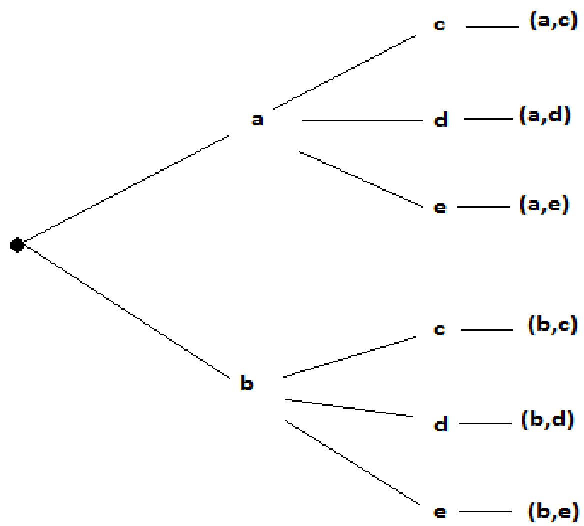
Ejemplo 1. Si $A=\{a,b\}$ y $B=\{c,d,e\}$, el producto cartesiano

$$A\times B=\{(a,c),(a,d),(a,e),(b,c),(b,d),(b,e)\}.$$

$$B\times A=\{(c,a),(d,a),(e,a),(c,b),(d,b),(e,b)\}.$$

Es claro que $B\times A\neq A\times B$.

El siguiente diagrama de árbol nos permite encontrar el producto cartesiano $A\times B$:



Las siguientes son algunas de las propiedades del producto cartesiano.

Teorema 22. Si A,B y C son conjuntos, entonces:

a) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

b) $A\times(B\bigcap C)=(A\times B)\bigcap(A\times C)$

Demostración:

a) $(x,y)\in A\times(B\cup C)\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in(B\cup C)$ (Definición)

$\Leftrightarrow x\in A\wedge(y\in B\vee y\in C)$ (Definición)

$\Leftrightarrow (x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in C)$ (Distributiva)

$\Leftrightarrow (x,y)\in A\times B\vee(x,y)\in A\times C$ (Definición)

$\Leftrightarrow (x,y)\in(A\times B)\bigcup(A\times C)$ (Definición)

La parte b) se deja como ejercicio.

Definición 8. Si D es un dominio, *un gráfico* es un subconjunto de $D\times D$. Si se tienen dos conjuntos A y B, un gráfico en $A\times B$ es un conjunto $\mathcal{G}\subseteq A\times B$.

Definición 9. Si Γ es un gráfico, el gráfico inverso de Γ es

Γ, H y M

$\Gamma^{-1}=\{(x,y):(y,x)\in\Gamma\}$.

Definición 10. Si Γ y H son gráficos, entonces el gráfico compuesto de H y Γ es

$\Gamma\circ\mathrm{H}=\{(x,z):(\exists y)(x,y)\in\mathrm{H}\wedge(y,z)\in\Gamma\}$.

Ejemplo 2. Sean $\Gamma=\{(1,2),(1,3),(2,5),(3,2)\}$ y $\mathrm{H}=\{(2,2),(3,1),(3,4),(1,1)\}$, entonces

$$\Gamma\circ\mathrm{H}=\{(2,5),(3,2),(3,3),(1,2),(1,3)\}$$

$$\mathrm{H} \circ \Gamma = \{(1,2),(1,1),(1,4),(3,2)\}$$
$$\mathrm{H}^{-1} = \{(2,2),(1,3),(4,2),(1,1)\}$$

Ejercicios

1. Se define $A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$, es decir $x \in (A - B) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$

Demuéstrese

a) $A \cap (A - B) = A - B$

b) $A - A = \varnothing$

c) $A \cap B^c = A - B$

d) $A - (A \cap B) = A - B$

e) $(A - B) \cup B = A \cup B$

f) $(A \cup B) - B = A - B$

2. Si $A = \varnothing \vee B = \varnothing \Rightarrow A \cap B = \varnothing$

3. Si $A \cup B \neq \varnothing$, entonces $A \neq \varnothing \vee B \neq \varnothing$

4. $A \cap B \neq \varnothing \Rightarrow A \neq \varnothing$

5. $A - (B \cup C) = (A - B) \cup (A - C)$

6. $(A \cap B) - C \subseteq (A \cup B) - C$

7. Demostrar

a) $\sim (A \subset A)$

b) $A \subset B \Rightarrow \sim (B \subset A)$

c) $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$

8. Demuestre

   a) La segunda parte del Teorema 22.

   b) $(A\times B)\bigcap(C\times D)=(A\bigcap C)\times(B\bigcap D)$

   c) Probar que $A\times B=\varnothing \Leftrightarrow A=\varnothing \vee B=\varnothing$

   d) Pruebe que $A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$

9. Si G, H y J son gráficos, demuestre:

   a) $(G\circ \mathrm{H})\circ \mathrm{J}=G\circ(\mathrm{H}\circ \mathrm{J})$.

   b) $(G^{-1})^{-1}=G$.

   c) $(G\circ \mathrm{H})^{-1}=\mathrm{H}^{-1}\circ G^{-1}$.

   d) $(G\cap \mathrm{H})^{-1}=G^{-1}\cap \mathrm{H}^{-1}$.

10. Si A es un conjunto, *el conjunto de partes de* A se define como

    $\mathcal{P}(A)=\{B:\ B\subseteq A\}$.

    Demuéstrese:

    a) $A\subseteq B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A)\subseteq \mathcal{P}(B)$

    b) $A\in \mathcal{P}(A)$

    c) $\varnothing\in \mathcal{P}(A)$

    d) $\mathcal{P}(\varnothing)=\{\varnothing\}$

    e) $\mathcal{P}(A)\bigcup \mathcal{P}(B)\subseteq \mathcal{P}(A\cup B)$

    f) $\mathcal{P}(A\cap B)=\mathcal{P}(A)\cap \mathcal{P}(B)$

3.1.3. Relaciones binarias.

Definición 1. Una relación binaria es un predicado $P(x,y)$ donde x varía en un dominio D_1 y y en un dominio D_2 o ambas en el mismo dominio.

Por ejemplo, si D es un conjunto de personas, $P(x,y)$ = " x es más alto que y " establece una relación en D. Nótese que si se da $P(x,y)$, no ocurre $P(x,y)$ = " y es más alto que x ".

Notación. Notaremos xPy en lugar de $P(x,y)$ con el fin de resaltar el orden.

Otro ejemplo sería el siguiente. Si D_1 es un conjunto de hombres y D_2 es un conjunto de mujeres, la relación $E(x,y)$ = " x es el esposo de y ". Así, x recorre el conjunto D_1 y y recorre D_2; en este caso decimos que E es una relación de D_1 en D_2. Es posible que no todos los hombres en D_1 sean casados y tampoco lo estén todas las mujeres en D_2, pero podemos establecer las "parejas hombre-mujer" que sí lo están. Es decir, formamos "parejas (x,y) tales que x es el esposo de y "; como (y,x) no puede ocurrir, decimos que esas parejas (x,y) son "parejas ordenadas", esposo-esposa.

Demos una interpretación.

Supongamos, $D_1=\{a,b,c,d\}$ y $D_2=\{a,e,i,o,u,w\}$, tales que "***a*** es el esposo de ***e***", "***b*** es el esposo de ***o***" y "***d*** es el esposo de ***u***" pero ***c*** no tiene esposa. La extensión $E(x,y)$ sería

$\{(a,e),(b,o),(d,u)\}$ y se denomina *el gráfico de* E.

Tenemos $\alpha(x)$ = "***x*** es casado" en D_1

$\beta(y)$ = "***y*** es casada" en D_2

Sus extensiones son $A=\{a,b,d\}$ y $B=\{e,o,u\}$. Decimos en este caso que la extensión de $E(x,y)$ es el producto cartesiano de A y B, y escribimos

$A\times B=\{(a,e),(b,o),(d,u)\}$.

En general, notaremos una relación de D_1 en D_2 por R.

Definición 2. Sea R una relación de D_1 en D_2, el *dominio de* R es el conjunto $\mathcal{D}(R)$ de los elementos en D_1 que se relacionan con algún elemento de D_2.

Así, $x \in \mathcal{D}(R) \Leftrightarrow (\exists y)(y \in D_2 \wedge R(x,y))$.

El dominio de R es entonces $\mathcal{D}(R) = \{x \in D_1 \mid (\exists y)(y \in D_2 \wedge R(x,y))\} \subseteq D_1$.

En nuestro ejemplo, $\mathcal{D}(R) = \{a, b, d\}$.

Definición 3. Si R es una relación de D_1 en D_2, el recorrido de R es el conjunto de todos los elementos pertenecientes a D_2 para los cuales existe $x \in D_1$ tal que $R(x,y)$.

En símbolos, el recorrido de R es:

$$\mathcal{R}(R) = \{y \in D_2 \mid (\exists x)(x \in D_1 \wedge R(x,y))\} \subseteq D_2 .$$

Así, $y \in \mathcal{R}(R) \Leftrightarrow (\exists x)(x \in D_1 \wedge R(x,y))$.

Definición 4. El gráfico de una relación R es la extensión de R, esto es el conjunto $\mathcal{G}$(R) dado por

$$\mathcal{G}(\mathrm{R}) = \{(x,y) : x \in D_1 \wedge y \in D \wedge xRy\}.$$

El campo de una relación binaria es la unión del dominio con el recorrido. Así, si

$\mathrm{F}(R)$ es el campo, $\mathrm{F}(R) = \mathcal{D}(R) \cup \mathrm{R}(R)$.

3.1.4. Relaciones en un conjunto.

Definición 5. Una relación R es reflexiva en un conjunto A si y solamente si

$$(\forall x)(x \in A \Rightarrow R(x,x)) \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow xRx)$$

Ejemplo 1. La relación $R(x,y) =$ "***x*** tiene el mismo tipo de sangre que ***y***" es reflexiva por cuanto "cada persona tiene el mismo tipo de sangre que ella misma".

Ejemplo 2. La relación $\leq$ es reflexiva en el conjunto de los números reales puesto que $(\forall x)(x \leq x)$.

Definición 6. Una relación R es irreflexiva en un conjunto A, si $(\forall x)(x \in A \Rightarrow \sim R(x,x))$.

Ejemplo 3. La relación $M(x,y)$ = "***x*** es madre de ***y***" es irreflexiva en el conjunto de los seres humanos ya que nadie es su propia madre.

Ejemplo 4. La relación < es irreflexiva en el conjunto de los números reales puesto que $\sim(x < x)$.

Definición 7. Una relación R es simétrica en un conjunto A si para todo $x \in A$ y $y \in A$ se cumple que $R(x,y) \Rightarrow R(y,x)$. En símbolos:

$$\begin{aligned} R \text{ es simétrica en } A \quad &\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(x \in A \wedge y \in A \wedge R(x,y) \Rightarrow R(y,x)) \\ &\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \Rightarrow yRx) \end{aligned}$$

Ejemplo 5. La relación de ser hermanos es simétrica, pero la relación de "amar" no lo es pues "***x*** puede amar a ***y***", pero puede ocurrir que "***y*** no ame a ***x***".

Definición 8. Una relación R es asimétrica en un conjunto A si para todo $x \in A$ y $y \in A$; si ocurre $R(x,y)$, entonces no es verdad que $R(y,x)$. En símbolos:

$$\begin{aligned} R \text{ es asimétrica en un } A \quad &\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(x \in A \wedge y \in A \wedge R(x,y) \Rightarrow \sim R(y,x)) \\ &\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \Rightarrow \sim yRx) \end{aligned}$$

Por ejemplo, la relación "ser madre" es asimétrica.

Definición 9. Una relación R es antisimétrica en un conjunto A si para cada x y cada y tales que $R(x,y) \wedge R(y,x)$, entonces $x = y$. En símbolos:

$$R \text{ es antisimétrica en } A \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(x \in A \wedge y \in A \wedge R(x,y) \wedge R(y,x) \Rightarrow x = y)$$

Ejemplo 6. En el conjunto de los números reales, la relación ≤ es antisimétrica, ya que $x \le y \wedge y \le x \Rightarrow x = y$.

Ejemplo 7. La relación entre conjuntos ⊆ es antisimétrica, puesto que $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B$.

Definición 10. Una relación R es transitiva en un conjunto A si para cualesquiera x, y, z en A, al darse $R(x, y) \wedge R(y, z)$, entonces, $R(x, z)$.

Ejemplo 8. La relación entre conjuntos ⊆ es transitiva ya que $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$.

En símbolos:

R es transitiva en

$$A \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(\forall z)\left(x \in A \wedge y \in A \wedge z \in A \wedge R(x, y) \wedge R(y, z) \Rightarrow R(x, z)\right)$$

3.1.5. Relaciones de equivalencia.

Definición 11. Una relación R es de equivalencia en un conjunto A si es:

(i) Reflexiva

(ii) Simétrica

(iii) Transitiva

Ejemplo 9. La relación = entre conjuntos es una relación de equivalencia.

Ejemplo 10. La relación *ser paralela entre líneas rectas de un plano* es una relación de equivalencia ya que *toda recta es paralela a ella misma*; es decir si a, b, y c son rectas del plano, entonces:

$a \parallel a$

Si $a \| b \Rightarrow b \| a$

Si $a \| b \wedge b \| c \Rightarrow a \| c$

Definición 12. Si R es una relación de equivalencia en un conjunto A, definimos la clase de equivalencia de un elemento x; todos los $y \in A$ tales que $R(x, y)$.

Notamos dicha clase por $[x]$

En símbolos:

$$[x]=\{y\in A:\ xRy\}.$$

Deducimos que $y\in[x]\Leftrightarrow xRy$.

Teorema 1. $[x]=[y]\Leftrightarrow R(x,y)$.

Demostración:

a) Supongamos $[x]=[y]\wedge z\in[x]\Rightarrow z\in[y]\Rightarrow R(x,z)\wedge R(z,y)\Rightarrow R(x,y)$

b) Sea $R(x,y)\wedge z\in[x]$ $\Rightarrow R(x,y)\wedge R(z,x)$

$$\Rightarrow R(z,x)\wedge R(x,y)$$

$$\Rightarrow R(z,y)$$

$$\Rightarrow z\in[y]$$

Así, $[x]\subseteq[y]$

Si $R(x,y)\wedge z\in[y]$ $\Rightarrow R(x,y)\wedge R(y,z)$

$$\Rightarrow R(x,z)$$

$$\Rightarrow z\in[x]$$

Luego, $[y]\subseteq[x]$

Teorema 2. Sea R una relación de equivalencia en un conjunto A, $a\in A$, $b\in A$ y $[a]\neq[b]$, entonces $[a]\cap[b]=\varnothing$.

Demostración. (Por contraposición):

Supongamos que $[a]\cap[b]\neq\varnothing$, entonces $(\exists x)(x\in[a]\cap[b])\Rightarrow x\in[a]\wedge x\in[b]$; por lo tanto, $R(a,x)\wedge R(x,b)$ y por propiedad transitiva, $R(a,b)$. Esto significa que $[a]=[b]$.

Hemos probado:

a) $[a]\cap[b]\neq\varnothing\Rightarrow[a]=[b]$

b) $[a]\neq[b]\Rightarrow[a]\cap[b]=\varnothing$

Corolario: Si a y b son elementos de A, entonces

$$[a]\cap[b]\neq\varnothing\vee[a]=[b]$$

que se obtiene de (a) por definición del condicional.

Esto nos dice que si R es una relación de equivalencia en A, dos clases de equivalencia son iguales o son disyuntas (con intersección vacía).

Además, si reunimos todas las clases de equivalencia, nos produce el conjunto A.

Definición 13. Si $\mathcal{A}$ es un conjunto cuyos elementos son conjuntos, definimos la unión de todos los conjuntos en $\mathcal{A}$ como

$$\cup\mathcal{A}=\cup\{A \mid A\in\mathcal{A}\}.$$

De la siguiente manera, $x\in\cup\mathcal{A}\Leftrightarrow(\exists A)(A\in\mathcal{A}\wedge x\in A)$.

Ejemplo 11. $\mathcal{A}=\{\{1,2,3\},\{1,3,4,5\},\{1,5,4,7\}\}$, entonces $\cup\mathcal{A}=\{1,2,3,4,5,7\}$.

Teorema 3. Cada clase de equivalencia es no vacía, esto es $[a]\neq\varnothing$.

Demostración:

Si $a\in A$, entonces aRa y $aRa\Rightarrow a\in[a]\Rightarrow(\exists x)(x\in[a])\Rightarrow[a]\neq\varnothing$.

Esto prueba que cada clase de equivalencia tiene individuos.

Teorema 4. Si A es un conjunto, R una relación de equivalencia en A, entonces $A=\bigcup\{[x]:\ x\in\}$.

Demostración:

En primer lugar, $x \in A \Rightarrow x \in [x] \Rightarrow x \in \cup\{[a] \| a \in A\}$

$$\Rightarrow A \subseteq \cup\{[a] \| a \in A\}.$$

Además, para cada $a \in A$, $[a] \subseteq A \Rightarrow \cup\{[a] \| a \in A\} \subseteq A$.

En resumen, dada una relación de equivalencia en A, esta determina una *familia* $\mathcal{A}$ de subconjuntos de A que cumple:

(i) Si P_1 y $P_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow P_1 \cap P_2 = \varnothing \vee P_1 = P_2$

(ii) $\cup\mathcal{A} = A$

Se dice entonces que $\mathcal{A}$ es una partición de A.

Ejemplo 12. Sea Π un plano. Definimos la relación de paralelismo entre rectas como $P(x, y) = "x \| y"$. Vimos que esta es una relación de equivalencia en Π.

La clase de equivalencia de una recta ***a*** está constituida por todas las rectas paralelas a la recta ***a***, $[a] = \{x :\ x \parallel a\}$. Esta clase se denomina la *dirección de la recta **a*** y nos dice que todas las rectas que son paralelas a la recta ***a*** tienen la misma *dirección* que ***a***.

Las direcciones son iguales o disyuntas y, al reunirlas todas, tenemos el plano.

Ejemplo 13. El siguiente conjunto es la extensión de una relación de equivalencia.

$\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$. En $A = \{1,2,3,4\}$

Observamos

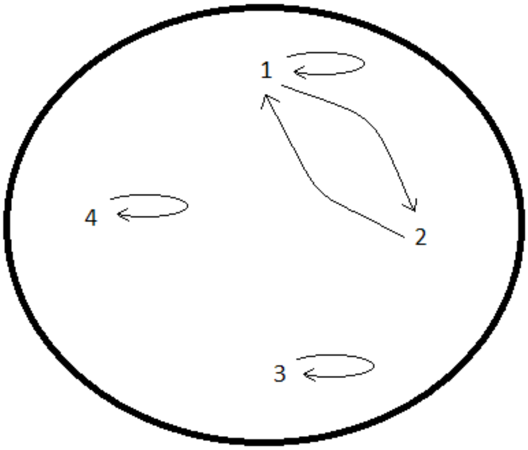
1. $R(1,1), R(2,2), R(3,3), R(4,4)$ (Reflexiva)
2. $R(1,2) \Rightarrow R(2,1)$
3. $R(1,1) \wedge R(1,2) \Rightarrow R(1,2)$

   $R(1,2) \wedge R(2,1) \Rightarrow R(1,1)$

   $R(2,1) \wedge R(1,1) \Rightarrow R(1,1)$

$R(2,2) \wedge R(2,1) \Rightarrow R(2,1)$

Esto suele graficarse así:



Así visualizamos las clases de equivalencia

$[1]=\{1,2\}$, $[3]=\{3\}$, $[4]=\{4\}$

y vemos que $[1]\cup[3]\cup[4]=\{1,2,3,4\}=A$.

Hemos *clasificado* los elementos de A en tres clases mediante la relación de equivalencia en A. Esto pone de manifiesto la importancia de las relaciones de equivalencia ya que permiten clasificar los individuos de un conjunto.

En general, cuando queremos clasificar objetos definimos una relación de equivalencia como "tener la misma talla" en una existencia de camisas; "tener la misma preferencia" en un conglomerado humano, etc. Y podemos formar subconjuntos que se identifican con una etiqueta "S", "M", "L" en el conjunto de camisas, por ejemplo, o "del Polo Democrático" o "de la U", etc., en preferencias políticas.

En matemáticas se utilizan las relaciones de equivalencia con mucha frecuencia.

Ejemplo 14. Las relaciones de congruencia entre polígonos son relaciones de equivalencia.

Es posible probar que, si se tiene una partición de un conjunto, se puede definir una relación de equivalencia en ese conjunto.

Teorema 5. Sea $\mathcal{A}$ una partición de A, definimos

$R(x,y) \Leftrightarrow (\exists P \in \mathcal{A})(x \in P \wedge y \in P)$

Demostración:

- Probemos que R es reflexiva

  Como cada $P \in \mathcal{A}$ es diferente de vacío

  $(\exists x)(x \in A \wedge x \in P) \Rightarrow x \in P \wedge x \in P \Rightarrow P(x,x)$

- Sea $R(x,y) \Rightarrow (\exists P \in \mathcal{A})(x \in P \wedge y \in P)$

  $\Rightarrow (\exists P \in \mathcal{A})(y \in R \wedge x \in P)$

  $\Rightarrow R(y,x)$

- Sean$R(x,y) \wedge R(y,z) \Rightarrow (\exists P \in \mathcal{A})(x \in P \wedge y \in P) \wedge (\exists Q \in \mathcal{A})(y \in Q \wedge z \in Q)$

  $\Rightarrow (x \in P \wedge y \in P) \wedge (y \in Q \wedge z \in Q)$

  $\Rightarrow x \in P \wedge (y \in P \wedge y \in Q) \wedge z \in Q$

  $\Rightarrow x \in P \wedge (P \cap Q \neq \varnothing) \wedge z \in Q$

  $\Rightarrow x \in P \wedge (P = Q) \wedge z \in Q$

  $\Rightarrow x \in P \wedge z \in P$

  $\Rightarrow P(x,z)$

Ejemplo 15. Un ejemplo matemático. Supongamos conocido el sistema $(\mathbb{N},+,\times,\geq,/)$ de los números naturales, es decir $\mathbb{N} = \{0,1,2...\}$ con la adición, la multiplicación, la relación ≥ y *ser divisor de*; esto es lo que estudiamos en los primeros cursos como el *sistema de los números naturales*.

Formemos $\mathbb{N}\times\mathbb{N}=\{(m,n)|m\in\mathbb{N}\wedge n\in\mathbb{N}\}$ donde (m,n) son pares ordenados.

Sobre $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ definiremos la relación $(m,n)\sim(p,q)\Leftrightarrow m+q=n+p$ o

$R((m,n),(p,q))\Leftrightarrow (m,n)\sim(p,q)\Leftrightarrow m+q=n+p$

No es difícil determinar pares ordenados relacionados, por ejemplo:

$(2,3)\sim(1,2)$ ya que $2+2=3+1$

$(5,1)\sim(6,2)$ ya que $5+2=1+6$

Probemos que esta es una relación de equivalencia en $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

- $(m,n)\sim(m,n)$

En efecto, $m+n=n+m$ (Simétrica)

- $$\begin{aligned}(m,n)\sim(p,q) &\Rightarrow m+q=n+p\\ &\Rightarrow q+m=p+n\\ &\Rightarrow (q,p)\sim(m,n)\end{aligned}$$ (Reflexiva)

- $$\begin{aligned}&(m,n)\sim(p,q)\wedge(p,q)\sim(r,s)\\ &\Rightarrow(m+q=n+p)\wedge(p+s=q+r)\\ &\Rightarrow(m+q)+(p+s)=(n+p)+(q+r)\\ &\Rightarrow m+\cancel{q}+\cancel{p}+s=n+\cancel{p}+\cancel{q}+r\\ &\Rightarrow m+s=n+r\\ &\Rightarrow(m,n)=(r,s)\end{aligned}$$ (Transitiva)

Como esta es una relación de equivalencia en $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, determina una partición de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, formada por las clases de equivalencia. Así, $[(m,n)]=\{(p,q)|\ (p,q)\sim(m,n)\}=\{(p,q)|\ p+n=q+m\}$.

Estas clases de equivalencia son disyuntas o iguales, y su reunión es $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

Determinemos algunas clases:

$$[(1,0)]=\{(p,q)|\ \ p+0=q+1\}$$
$$=\{(p,q)|\ \ p=q+1\}$$
$$=\{(q+1,q)|\ \ q\in\mathbb{N}\}$$

Desarrollando esto:

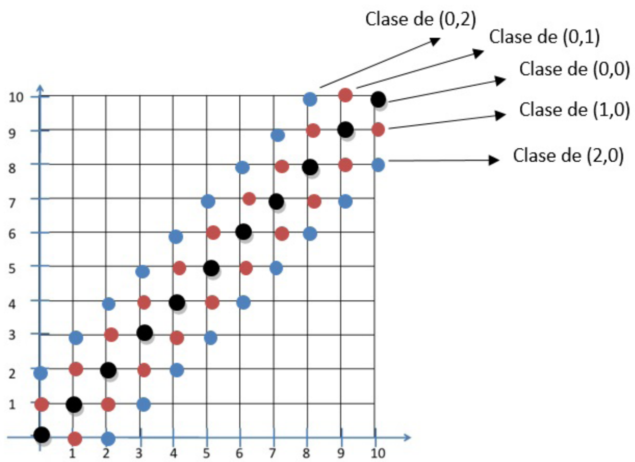
$$[(1,0)]=\{(1,0),(2,1),(3,2),(4,3),\dots,(n+1,n),\dots\}$$

$$[(0,1)]=\{(p,q)|\ \ p+1=q\}=\{(p,p+1)|\ \ p\in\mathbb{N}\}=\{(0,1),(1,2),(2,3),(3,4),\dots\}$$

$$[(1,1)]=\{(p,q)|\ \ p+1=q+1\}=\{(p,q)|\ \ p=q\}=\{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3),\dots\}$$

$$[(2,0)]=\{(p,q)|\ \ q+2=p\}=\{(q+2,q)|\ \ q\in\mathbb{N}\}=\{(2,0),(3,1),(4,2),(5,3),\dots\}$$

Se representa en un diagrama cartesiano.



Observamos que [(0,0)] está en la *diagonal*, las clases (1,0) y (0,1) están a lado y lado de [(0,0)] y se "miran" con respecto a esta. Diremos que [(0,1)] es simétrica de [(1,0)] y recíprocamente [(0,2)] y [(2,0)].

La relación nos permite recoger todos los elementos en clases disyuntas; esto es, una especie de recipiente en donde se almacenan todos los objetos relacionados con uno dado.

Esta relación permite construir, a partir de los naturales, un conjunto $\mathcal{I}$ que generalice las propiedades de los naturales asignando símbolos a cada clase y buscando operarlos mediante reglas bien definidas.

Establezcamos un diccionario

$$\left[(1,0)\right] \leftrightarrow (+1)$$

$$\left[(0,0)\right] \leftrightarrow (0)$$

$$\left[(0,1)\right] \leftrightarrow (-1)$$

$$\vdots$$

$$\left[(n+1,1)\right] \leftrightarrow (+n)$$

$$\left[(1,n+1)\right] \leftrightarrow (-n).$$

Obtenemos así un conjunto de símbolos ordenados a lado y lado de la clase $\left[(0,0)\right]$. Así,

$$\mathcal{I}=\left\{\cdots,(-2),(-1),(0),(+1),(+2)\cdots\right\}.$$

Denominado el conjunto cociente y constituido por las clases de equivalencia.

Ejemplo 16. La partición de los átomos en elementos químicos es la partición inducida por la relación de equivalencia "tener el mismo número de protones en el núcleo".

Las relaciones de equivalencia (y las particiones) desempeñan un papel fundamental como conceptos clasificatorios en todas las ciencias.

3.1.6. Relaciones de orden.

Definición 14. Una relación R es un orden parcial de un conjunto A si y solamente si R es reflexiva, simétrica y transitiva.

Notación. Notaremos una relación de orden por $\precsim$.

Ejemplo 17. La relación $\subseteq$ en conjuntos es una relación de orden parcial.

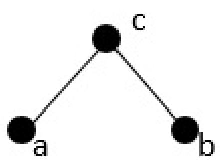
En efecto,

- $A \subseteq A$
- $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B$
- $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

3.1.6.1. Diagrama de Hasse.

Para un conjunto finito $A = \{a, b, c\}$, decimos xRy si y puede alcanzarse desde x por un arco ascendente de x.

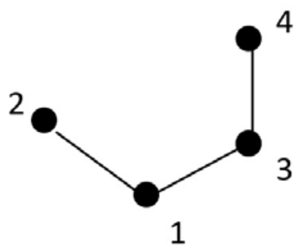
Ejemplo 18.



$$R(a,a) \leftrightarrow aRa$$
$$R(b,b) \leftrightarrow bRb$$
$$R(a,c) \leftrightarrow aRc$$
$$R(b,c) \leftrightarrow bRc$$
$$R(c,c) \leftrightarrow cRc$$

Ejemplo 19. Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y R la relación cuya extensión es $\{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (3,3), (3,4), (4,4)\}$.

El diagrama de Hasse es

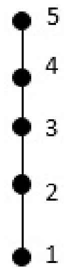


y es una relación de orden.

Ejemplo 20. Si $A=\{,2,3,4,5\}$ y $R(x,y)="x\leq y"$, esta es una relación de orden en A.

- Reflexividad: $x\leq x$
- Transitividad: $x\leq y\wedge y\leq z\Rightarrow x\leq z$
- Simetría: $x\leq y\wedge y\leq x\Rightarrow x\leq y$

El diagrama de Hasse es

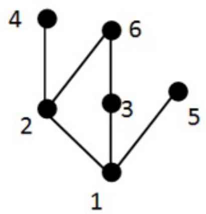


4

Lo que constituye una *cadena* u ordenación simple.

Ejemplo 21. Sea $A=\{,2,3,4,5,6\}$ y $R(x,y)="x|y"$ = "***x*** es divisor de ***y***".

Observemos



Ejemplo 22. En el conjunto de los números naturales se define $R(x,y)="x|y"$, donde $x|y \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{N})(kx = y)$. Probemos que esta relación es de orden.

- $x|x$ ya que $1 \cdot x = x$
- $x|y \wedge y|x \Rightarrow$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que
  $kx = y \wedge (\exists j \in \mathbb{N})(jy = x) \Rightarrow (kj)y = kx = y \Rightarrow (kj)y = y$

Como $k, j \in \mathbb{N}$ entonces $kj = 1$ y $k = 1$, $j = 1$, así que $x = y$.

- Transitiva

Si $x|y \wedge y|z \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{N})(kx = y) \wedge (\exists j \in \mathbb{N})(jy = z)$, entonces sustituyendo y por kx obtenemos $j(kx) = z \Rightarrow (jk)x = z$ y $jk \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $x|z$.

Definición 15. Una relación R de orden en A es un orden total o lineal de A si

$(\forall x)(\forall y)(x \in A \wedge y \in A \Rightarrow R(x,y) \vee R(y,x))$.

Definición 16. Un orden estricto en A es una relación R, tal que

i) $(\forall x)(x \in A \Rightarrow \sim R(x,x))$.

ii) $R(x,y) \wedge R(y,z) \Rightarrow R(x,z)$ (Transitiva)

Notaremos un orden estricto por $\prec$.

Ejemplo 23. La relación < en el conjunto de los números reales es una ordenación estricta.

Ejemplo 24. $(\mathbb{N},\leq)$ es un orden total ya que $x<y$, o $x=y$, o $x>y$. Es decir, $x\leq y$ o $y\leq x$.

Definición 17. (Máximo y mínimo). Sea A parcialmente ordenado por $\preccurlyeq$; un elemento $b\in A$ se llama un *máximo*, si esto es $(\forall x)\,(x\in A\Rightarrow x\preccurlyeq b)$. En este caso escribimos $b=\max B$.

Un elemento $a\in A$ es un *mínimo*, si $(\forall x)\,(x\in A\Rightarrow a\lesssim x)$, en cuyo caso utilizamos la notación $a=\min B$.

Un conjunto parcialmente ordenado puede no tener máximo o mínimo, o ninguno de ellos.

Ejemplo 25. Considerando el Ejemplo 21, el conjunto $\{2,5\}$ carece de máximo y de mínimo.

Un concepto alternativo de "más grande" o "más pequeño" se presenta a continuación.

Definición 18. Sea A un conjunto parcialmente ordenado. Un elemento $b\in A$ se llama *maximal*, si no existe $x\in A$ tal que $b\preccurlyeq x$.

El elemento $a\in A$ se llama *minimal*, si no existe $x\in A$ tal que $x\preccurlyeq a$.

En símbolos:

- b es maximal $\Leftrightarrow\sim(\exists x)\,(x\in A\wedge b\preccurlyeq x)$

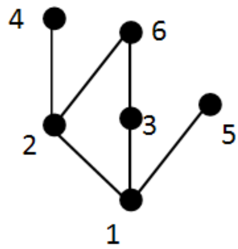
  $\Leftrightarrow(\forall x)(x\notin A\vee b\not\preccurlyeq x)$

  $\Leftrightarrow(\forall x)(x\in A\Rightarrow b\not\preccurlyeq x)$.

- a es minimal $\Leftrightarrow\sim(\exists x)(x\in A\wedge x\preccurlyeq a)$

  $\Leftrightarrow(\forall x)(x\in A\Rightarrow x\not\preccurlyeq a)$.

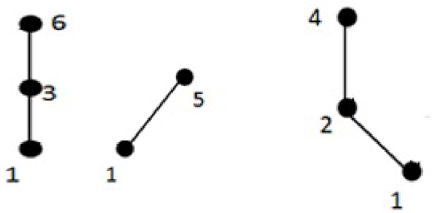
Ejemplo 26. En



- 1 es un elemento mínimo.
- No existe máximo.
- 4 es maximal.
- 6 es maximal.
- 5 es maximal.
- 1 es minimal.

El orden no es total, pues 4 y 6 no se relacionan, así como 4 y 5 tampoco.

Sin embargo, podemos formar cadenas:



En cada cadena hay un máximo y un mínimo.

Definición 19. Sean el conjunto $\mathbb{N}$ y la relación $x|y$. Si $A=\{a,b\}\subset\mathbb{N}$, el máximo común divisor de a y b es el máximo de A mediante la relación de orden. Esto es $c=mcd(a,b)\Leftrightarrow c|a\wedge c|b$ y $(\forall x)\left(x|a\wedge x|b\Rightarrow x|c\right)$.

Ejemplo 27. Halla el $mcd(12,18)$.

Hallemos el conjunto $D_{(12)}$ de divisores de 12.

$D_{(12)} = \{1,2,3,4,6,12\}$

El conjunto de divisores de 18 es

$D_{(18)} = \{1,2,3,6,9,18\}$

Hallemos

$D_{(12)} \cap D_{(18)} = \{1,2,3,6\}$ =divisores comunes a 12 y 18.

Observamos que los números que dividen a la vez a 12 y 18, dividen a 6; en particular $6|6$, por lo tanto, $mcd(12,18)=6$.

Definición 20. Sean A un conjunto parcialmente ordenado por la relación $\preccurlyeq$ y $B \subseteq A$. Diremos que un elemento $b \in A$ es un *mayorante* o una *cota superior* de B, si $(\forall x)(x \in B \Rightarrow x \preccurlyeq b)$.

Diremos que B es *acotado superiormente* si existe al menos una cota superior de B.

Definición 21. Si A es un conjunto parcialmente ordenado por la relación $\preccurlyeq$ y $B \subseteq A$, un elemento $a \in A$ es una *cota inferior* o un *minorante* de B si $(\forall x)(x \in B \Rightarrow a \preccurlyeq x)$.

Si existe al menos una cota inferior de B, decimos que B es *acotado inferiormente*.

Ejemplo 28. Si en el Ejemplo 16 tomamos $B=\{1,2\}$, entonces, 2, 4 y 6 son cotas superiores de B. Si $C=\{3,6\}$, entonces, 3 y 1 son las cotas inferiores de C.

Puede ocurrir que si un conjunto B es acotado superiormente en A, exista una mínima cota superior, la cual denominaremos como el *supremo* de B o de manera abreviada, $Sup\, B$.

Definición 22. Si A es un conjunto parcialmente ordenado por $\preccurlyeq$, $B \subset A$ y B es acotado superiormente, si existe $s \in A$ tal que $(\forall x)$ (x es cota superior de $B \Rightarrow s \preccurlyeq x$), denominamos a s como el *supremo* de B y lo representamos como $s = SupB$.

Definición 23. Si A es un conjunto parcialmente ordenado por $\preccurlyeq$, $B \subset A$ y B está acotado inferiormente, y existe $m \in A$ tal que $(\forall x)$ (x es cota inferior de $B \Rightarrow x \preccurlyeq m$), m se denomina *el ínfimo de* B y lo notamos por $m = InfB$.

Ejemplo 29. Siguiendo el Ejemplo 17, $SupB = 2$ y el ínfimo de $\{3,6\}$ es 3. Lo que nos puede inducir a la creencia de que el supremo y el ínfimo de un conjunto, de existir, pertenecen al conjunto.

Sin embargo, el conjunto $D = \{4,5\}$ no tiene cotas superiores por lo que no podemos hablar de supremo, pero tiene una sola cota inferior: 1. Así, $Inf\{4,5\} = 1 \notin \{4,5\}$.

Ejercicios

En cada caso, pruebe lo que se indica o responda las preguntas que se formulan dando una justificación de sus respuestas.

1. Sea R una relación en un conjunto A. Se define la diagonal en A como

   $\Delta = \{(x,x) : x \in A\}$. Demuéstrese: R es reflexiva $\Leftrightarrow$ $\Delta \subseteq \mathcal{G}$(R).

2. Si R es una relación en A, demuéstrese: R es transitiva $\Leftrightarrow$ $\mathcal{G}$(R) $\circ$ $\mathcal{G}$(R) $\subseteq$ $\mathcal{G}$(R).

3. Diga si la siguiente relación definida en una comunidad es una relación de equivalencia en dicha comunidad: $xRy \Leftrightarrow$ "x tiene el mismo padre que y". Explique sus respuestas. En caso de ser una relación de equivalencia, ¿cuáles serían las clases de equivalencia?

4. Sean $A = \{a,b,c,d\}$ la relación $\mathbb{S}$ en $\mathcal{P}$(A) definida por $B \,\mathbb{S}\, C \Leftrightarrow B \subseteq C$. Se sabe que $\mathbb{S}$ es una relación de orden en $\mathcal{P}$(A). Ela-

bore el diagrama de Hasse para esta relación y encuentre, si los hay:

a) El máximo.
b) El mínimo.
c) Elementos maximales y elementos minimales.
d) ¿Tiene el conjunto $\mathbb{B}=\{(a),\{a,b\},\{b,c,d\}\}$ un elemento máximo? ¿Un elemento mínimo? ¿Es dicho conjunto acotado inferiormente? ¿Superiormente? Si lo es, halle las respectivas cotas. ¿Tiene un ínfimo? ¿Tiene supremo?
e) Responda las mismas preguntas para $\mathbb{D}=\{\{a\},\{a,b\},\{a,b,c\}\}$.

5. Supongamos conocido el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros y p un número entero positivo. Definamos la relación de congruencia módulo p en $\mathbb{Z}$ por

$$m \equiv n_{(\operatorname{mod} p)} \Leftrightarrow (\exists k)(k \in \mathbb{Z} \wedge m = n + kz).$$

Por ejemplo, $15 \equiv 3_{(\operatorname{mod} 4)}$ puesto que $15 = 3\times 4 + 3$. En este caso $k = 3$.

Demuéstrese que esta es una relación de equivalencia en $\mathbb{Z}$.

Halle las clases de equivalencia para $p=2$, $p=3$ y $p=4$. ¿Cuántas hay en cada caso?

6. Sea $A=\{1,1,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Se define la relación $\Re$ en $A\times A$ mediante $(a,b)\ \Re(c,d) \Leftrightarrow a+b=c+d$. Demuestre que $\Re$ es una relación de equivalencia en $A\times A$ y determine las clases de equivalencia.

3.1.7. Funciones.

En el lenguaje cotidiano se utiliza la palabra función para establecer una relación causa-efecto como "la calidad de vida es función del ingreso". En matemáticas podemos decir de manera intuitiva que una *función* es cierta ley que establece una dependencia entre variables individuales; es decir una relación, pero sujeta a restricciones que permiten identificar con precisión qué constante o constantes individuales dependen de una constante dada.

Las funciones constituyen uno de los conceptos fundamentales de las matemáticas, así como en sus aplicaciones prácticas. Para las primeras, son agentes dinamizadores porque las operaciones matemáticas son funciones y sin las operaciones no serían posibles los cálculos. Para las aplicaciones, las funciones permiten construir modelos de fenómenos como el caso de lo que marca el velocímetro de un automóvil; la velocidad que es función del espacio recorrido y del tiempo empleado para recorrerlo.

Existen variadas definiciones de función (Azcárate y Deulofeu, 1995).

- Si existe una correspondencia entre los valores de una variable independiente x y otra variable y, de tal forma que a cada valor de x le corresponde un valor de y, se dice que " y es función de x".
- En general, diremos que " y es función de y", lo escribimos $y = \mathrm{f}(x)$ cuando para x variable en un determinado conjunto, a cada valor de x le corresponde un solo valor de y; y los valores de y constituyen otro conjunto. A y se le da el nombre de *variable dependiente* porque depende de los valores que toma x; esta, en cambio, es la *variable independiente*.
- La característica esencial de una función o aplicación es la dependencia entre dos variables. Una función o aplicación está formada por:
  (a) Conjunto de valores que puede tomar la variable independiente.
  (b) Conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente.
  (c) Regla que asigna a cada elemento del conjunto de salida uno y solo uno del conjunto de llegada.
- Una relación entre dos conjuntos A y B se dice que es una aplicación cuando a todo elemento de A le corresponde un elemento de B y solo uno. Una aplicación de un conjunto numérico en otro se denomina función.

- Sea C un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$. Diremos que C define una función entre los conjuntos A y B si a cada elemento de A le asigna aquel o aquellos elementos de B que formen un par con él entre los elementos de C.

Otras definiciones:

- Se dice que y es función de x cuando a cada valor de la variable x le corresponde uno o varios valores de la variable y (Cauchy, según Baldor, 1941, p. 166).
- Cuando ciertas cantidades dependen de otras, de manera que estas sufren un cambio cuando aquellas también cambian, entonces las primeras son llamadas funciones de las segundas. Este nombre tiene un carácter amplio: abarca todas las formas en que una cantidad puede ser determinada utilizando otras (Euler, 1748, p. 4).
- f es una función si y solamente si f es una relación y $(\forall x)(\forall y)(\forall z)\left(\mathrm{f}(x, y)=\mathrm{f}(x.z) \Rightarrow y=z\right)$ (Suppes, 1968, p. 55).

Según el aspecto que cada una de estas definiciones o caracterizaciones enfatiza, podemos extractar las siguientes concepciones de función:

- Correspondencia entre valores de variables.
- Relación entre elementos de dos conjuntos.
- Dependencia entre variables.
- Conjunto de pares ordenados.

Un análisis de tales intentos nos muestra que, en la mayoría de los casos, se utilizan palabras no definidas en el lenguaje tales como *correspondencia, regla, dependencia*. En algunos casos no se menciona en dónde toman sus valores las variables en consideración; en otros hay ambigüedad pues en unas definiciones se dice que a la variable independiente se le asigna uno y solo un valor de la variable dependiente, en tanto que en otros se habla de uno o varios valores.

En lo que sigue trataremos de clarificar el concepto de función a través del lenguaje de la lógica.

3.1.7.1. Definición de función.

Definición 1. Si A y B son conjuntos, *una correspondencia de A hasta B* consta de un par ordenado $((A,B),\mathrm{f})$ donde f es una relación con dominio A y codominio B tal que $(\forall x)(x \in A \Rightarrow (\exists y)(y \in B) \wedge \mathrm{f}(x,y))$.

Por ejemplo, la relación que asigna a cada número positivo su raíz cuadrada es una *correspondencia*. Por ejemplo, si A es el conjunto de los números reales positivos y B el conjunto de los números reales, la relación $R(x,y) = "y = \sqrt{x}"$ es una correspondencia, ya que todo número real positivo tiene raíz cuadrada. Este tipo de correspondencia se denomina múltiple.

Existen correspondencias unívocas, las cuales se denominan funciones o aplicaciones.

Definición 2. Dados dos conjuntos A y B, una función o aplicación de A en B es una correspondencia f de elementos de A con elementos de B, que satisface además

$$(\forall x)(\forall y)(\forall x)(x \in A \wedge y \in B \wedge z \in B \wedge \mathrm{f}(x,y) \wedge \mathrm{f}(x,z) \Rightarrow y = z).$$

Por consiguiente, para que la relación sea una función se requieren dos condiciones:

F_1. Para cada $x \in A$ existe $y \in B$ tal que $\mathrm{f}(x,y)$.

F_2. Si se cumplen $\mathrm{f}(x,y)$ y $\mathrm{f}(x,z)$, entonces necesariamente $y = z$.

Si f es una función de A en B, escribimos $\mathrm{f}: A \to B$. Dada la unicidad debido a F_2, en lugar de $\mathrm{f}(x,y)$ se escribe $\mathrm{f}(x) = y$, y decimos que y es la imagen de x mediante la función f. Otras formas de indicar funciones son $x \to y$ o $x \to \mathrm{f}(x)$.

Definición 3. Si A y B son conjuntos y $\mathrm{f}: A \to B$ una función, el *gráfico* de f es el conjunto

$$G(\mathrm{f}) = \{(x,y) : y = \mathrm{f}(x)\} = \{(x,\mathrm{f}(x)) : x \in A\}.$$

Si $\mathrm{f} : A \to B$, la condición F_1 indica que el dominio de f es todo el conjunto A en tanto que el recorrido de f es un subconjunto de B.

Teorema 1. Sean A y B conjuntos y $\mathrm{f} : A \to B$ una función, entonces:

$\mathcal{D}(\mathrm{f}) = A$ y $\mathcal{R}(\mathrm{f}) \subseteq B$.

Demostración:

a. $x \in \mathcal{D}(\mathrm{f}) \Rightarrow (\exists y)(\mathrm{f}(x,y))$ (Definición de dominio)

$\Rightarrow (x,y) \in G(\mathrm{f})$ (Definición de gráfico de una función)

$\Rightarrow (x,y) \in A \times B$ ($G(\mathrm{f}) \subseteq A \times B$)

$\Rightarrow x \in A$ (Definición de producto cartesiano).

b. $x \in A \Rightarrow (\exists y)(y \in B \wedge \mathrm{f}(x,y))$ (F_1)

$\Rightarrow x \in \mathcal{D}(\mathrm{f})$ (Definición de dominio)

Entonces $\mathcal{D}(\mathrm{f}) = A$.

c. $y \in \mathcal{R}(\mathrm{f}) \Rightarrow (\exists x)(x \in A \wedge \mathrm{f}(x,y))$ (Definición de recorrido)

$\Rightarrow (x,y) \in \in G(\mathrm{f})$ (Definición de gráfico)

$\Rightarrow (x,y) \in A \times B$ ($G(\mathrm{f}) \subseteq A \times B$)

$\Rightarrow y \in B$ (Definición de producto cartesiano).

Ejemplo 1. Supongamos conocido el conjunto de los números naturales N y definamos la relación $\mathrm{f}(x,y) \Leftrightarrow y = x^2$. Para esta relación se tiene:

a. Si $x \in \mathbb{N}$, existe $x^2 \in \mathbb{N}$. Si $y = x^2$, entonces $(\exists y)(y \in \mathbb{N} \wedge \mathrm{f}(x, y))$. Esto prueba que $\mathcal{D}(\mathrm{f}) = \mathbb{N}$.

b. Supongamos $\mathrm{f}(x, y)$ y $\mathrm{f}(x, z)$; entonces $y = x^2$ y $z = x^2$ y $x^2 \in \mathbb{N}$, pero el cuadrado de un número natural es único y, por lo tanto, $y = z$.

En consecuencia, la relación f es una aplicación de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ y podemos escribir:

$$\mathrm{f} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \text{ definida por } \mathrm{f}(x) = x^2.$$

El recorrido de esta función es

$$\mathcal{R}(\mathrm{f}) = \{x^2 : x \in \mathbb{N}\} = \{0, 1, 4, 9, 16, \ldots\}.$$

El gráfico es

$$G(\mathrm{f}) = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{N}\} = \{(0,0), (1,1), (2,4), (3,9), (4,16) \ldots\}.$$

Ejemplo 2. Otros ejemplos de funciones.

1. Función identidad. Sea A un conjunto. La función identidad en A es la función

$I_A : A \to A$ definida por $I_A(x) = x$, $\forall x \in A$.

Su gráfico es $\mathrm{G}(I_A) = \{(x, x) | x \in A\}$. Esta función es *biyectiva*.

2. Función constante. Si A y B son conjuntos y b un individuo constante de B, se define la función $K_b : A \to B$ por $K_b(x) = b$, $\forall x \in A$.

Su gráfico es $\mathrm{G}(K_b) = \{(x, b) | x \in A\}$.

Esta función no es inyectiva ni sobreyectiva.

3. Función inclusión. Si A y B son conjuntos y $B \subseteq A$, la función inclusión de B en A es la definida de la siguiente manera: $E_B : B \to A$ donde $E_B(x) = x,\ \forall x \in B$.

Obsérvese que si $B = A$, la función inclusión es la identidad en A.

4. Función característica. Si A y B son conjuntos y $B \subset A$, la función característica de B en A se define como:

$$C_B(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in B \\ 0 & si \quad x \notin B \end{cases},\ \forall x \in A$$

Esta función transforma todo elemento de B en 1 y todo elemento que no pertenece a B en 0.

3.1.7.2. Tipos de funciones.

Definición 4. Sean A y B conjuntos y $f : A \to B$ una función. Diremos que f es función inyectiva si dos elementos diferentes del dominio tienen imágenes diferentes. Esto es, si $x_1 \in A \wedge x_2 \in A$ y $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

En síntesis:

$f : A \to B$ es inyectiva $\Leftrightarrow (\forall x_1 \in A)(\forall x_2 \in A)(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$.

Esto puede escribirse por contraposición, así:

f : $A \to B$ es inyectiva $\Leftrightarrow (\forall x_1 \in A)(\forall x_2 \in A)(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$.

Ejemplo 3. Si $\mathbb{N}$ es el conjunto de los números naturales, la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $f(x) = 2x + 1$ es *inyectiva*.

En efecto, supongamos $f(x_1) = f(x_2)$, entonces

$$2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Definición 5. Una función $f : A \to B$ es *sobreyectiva* si $\mathcal{R}(f) = B$; esto es cada elemento $y \in B$ es imagen de al menos un elemento $x \in A$.

En símbolos:

$f : A \to B$ es sobreyectiva $\Leftrightarrow (\forall y)\big(y \in B \Rightarrow (\exists x)\big(x \in A \wedge y = f(x)\big)\big)$.

Ejemplo 4. Si $A = \mathbb{N}$ y $B = \mathbb{N}$, la función $f(x) = 2x$ no es sobreyectiva ya que 3 no es imagen de ningún natural; es decir, no existe n tal que $2n = 3$.

Ejemplo 5. Sea $\mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros y $f(x) = x^2$. Esta función no es sobreyectiva ya que $\mathcal{R}(f) = \{z \mid z \geq 0\}$.

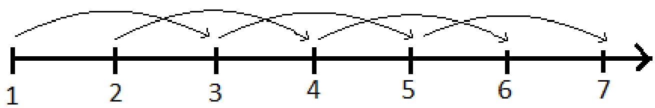
Ejemplo 6. Si $A = \mathbb{Z}$, el conjunto de los números enteros, y $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, se define $g(x) = x + 1$, entonces g es sobreyectiva.

Si $y \in \mathbb{Z}$, entonces $x = y - 1 \in \mathbb{Z}$ y $g(x) = x + 1 = (y-1) + 1 = y$. Por lo tanto, existe $x \in \mathbb{Z}$ tal que $g(x) = y$.

Definición 6. Una función $f : A \to B$ es biyectiva si y solo si es inyectiva y sobreyectiva. También se denomina *función biunívoca*.

Definición 7. Si A y B son conjuntos y existe $f : A \to B$ biyectiva, decimos que A y B están en *correspondencia biunívoca*.

Ejemplo 7. Sean $A = \mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales y $B = \{2, 3, 4, \ldots\}$, se define $g : \mathbb{N} \to B$ mediante $g(n) = n + 2$.



Esta función hace lo siguiente

$0 \longrightarrow 2$

$1 \longrightarrow 3$

$2 \longrightarrow 4$

$3 \longrightarrow 5$

.

.

.

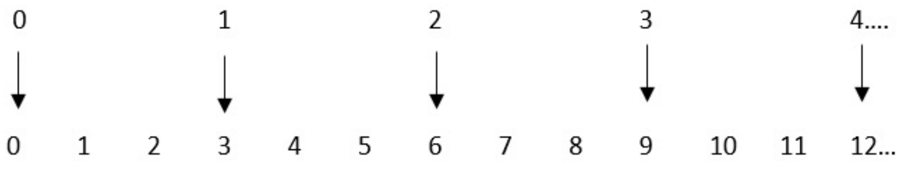
$\boldsymbol{n} \longrightarrow \boldsymbol{n}+2$

Esta es una *función biyectiva*.

En primer lugar, si $f(n)=f(m)$ entonces $n+2=m+2$, por simplificación $n=m$, así que f es *inyectiva*.

Además, si $m \in B$, entonces $m=2$ y $m-2 \geq 0$; por lo tanto, $f(m-2)=m$ así que, dado $m \in B$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(n)=m$, donde $(n=m-1)$.

Ejemplo 8. Sean $A=\mathbb{N}$, $B=\mathbb{N}$ y $h:\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definida por $h(n)=3n$. Esta función no es biyectiva, como puede verse en el diagrama que sigue.



$\mathcal{D}(f)=\mathbb{N}$, $\mathcal{R}(f)=\{0,3,6,9,12,...\}$

La definición de función permite que varios elementos de dominio tengan una misma imagen.

Ejemplo 9. Si x es un número natural y n un natural fijo diferente de cero, la función $m(x) = x_{\mathrm{mod}\,n}$ donde $x_{\mathrm{mod}\,n}$ = residuo de dividir x entre n .

Esta es una función llamada *función módulo n*.

Ejemplo 10. Si n es fijo, $n = 3$

$m(5) = 2$,

$m(8) = 2$,

$m(4) = 1$,

$m(16) = 1$,

$m(2) = 2$,

$m(1) = 3$.

Esta función no es inyectiva, ya que por ejemplo $m(5) = m(8)$, pero $5 \neq 8$. ¿Es sobreyectiva?

Definición 8. Una *permutación* en un conjunto A es una función biyectiva de A en A.

Ejemplo 11. La función $\phi : \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$ definida por $\phi(1) = 3,\ \phi(2) = 2,\ \phi(3) = 1$, es una permutación y puede representarse como $(3,2,1)$ o de manera más completa como

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

3.1.7.3. Imagen de un subconjunto del dominio e imagen recíproca de un subconjunto del codominio.

Definición 9. Si $f : A \to B$, y $C \subseteq A$, entonces $f(C) = \{ f(x) | x \in A \}$. Así,

$$y \in f(C) \Leftrightarrow (\exists x)(x \in A \wedge y = f(x)).$$

Ejemplo 12. Si $f:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$, tal que $f(n)=2n$, y $C=\{0,2,3,5,6\}$, $f(C)=\{0,4,6,10,12\}$.

Nótese que $f(a)=\mathcal{R}(f)$.

Definición 10. Si $f:A\rightarrow B$ y $M\subseteq B$, se define la *preimagen* de B o *imagen recíproca* de B mediante f como

$$f^{-1}(m)=\{x\in A \mid f(x)\in M\}$$

Es decir, todos los elementos en el dominio cuya imagen cae en M.

Ejemplo 13. Para la función $h:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$ definida $h(n)=3n$, si
$M=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
$h^{-1}(M)=\{0,1,2,3\}$.

Definición 11. Dos funciones $f:A\rightarrow B$ y $g:A\rightarrow B$ son iguales si $f(x)=g(x)$, $\forall x\in A$.

Nótese que para que dos funciones sean iguales, se debe cumplir:

(a) Sus dominios son iguales.

(b) $f(x)=g(x)$ para cada x en el dominio.

Ejemplo 14. Sea $A=\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales, la función $f:\mathbb{R}-\{1\}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por

$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ tiene dominio de los reales pero sin el 1. La función $g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $g(x)=x+1$ tiene como dominio todos los números reales. Sin embargo, de manera mecánica solemos escribir $\dfrac{x^2-1}{x-1}=x+1$ cuando factorizamos el numerador y simplificamos. Esto solo es válido si $x \neq 1$. Es decir, la igualdad $f(x) = g(x)$ solo es válida en $\mathbb{R} - \{1\}$.

3.1.7.4. Composición de funciones.

Definición 12. Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$, definimos $g \circ f$ mediante la relación $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$.

Teorema 2. Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son funciones, entonces $g \circ f$ es una función.

Demostración:

a) Si $\forall x \in A$, entonces existe $y \in B$ tal que $f(x) = y$, y como g es función de B en C, existe $z \in C$ tal que $g(y) = z$. Por tanto, $g[f(x)] = z$. Entonces, dado que $x \in A$, existe $z \in C$ tal que $(g \circ f)(x) = z$.

b) Tomemos $(g \circ f)(x) = z_1$ y $(g \circ f)(x) = z_2$, entonces $g[f(x)] = z_1$ y $g[f(x)] = z_2$; como f es función, sea $f(x) = y$ y entonces $g(y) = z_1 \wedge g(y) = z_2$, pero g es función y por lo tanto $z_1 = z_2$.

Ejemplo 15. Sea $A = \mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros y $B = A$.

Definamos $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ por $f(x) = 2x + 1$ y $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ por $g(x) = x^2 + 1$; entonces

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(2x+1) = (2x+1)^2 - 1$$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(x^2 - 1) = 2(x^2 - 1) + 1$$

Es fácil constatar que $f \circ g \neq g \circ f$.

La notación $g \circ f$ se lee "compuesta de f y g" debido a la forma como se calcula. Primero se halla la imagen de x mediante f, es decir $f(x)$, y luego, la imagen mediante g de $f(x)$.

A continuación, probamos que la compuesta de dos funciones biyectivas es una función biyectiva.

Teorema 3. Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$, entonces

a) Si f y g son inyectivas, entonces $g \circ f$ es inyectiva.

b) Si f y g son sobreyectivas, entonces $g \circ f$ es sobreyectiva.

Demostración:

a) Supongamos que f y g son inyectivas, y para $x_1 \in A,\ x_2 \in A$ $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ tenemos

$$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \Rightarrow g[f(x_1)] = g[f(x_2)] \qquad \text{(Definición)}$$

$$\Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \qquad (g \text{ inyectiva})$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 \qquad (f \text{ inyectiva})$$

b) $z \in C \Rightarrow (\exists y)(y \in B \wedge g(z) = y)$ $\qquad$ (g sobreyectiva)

$$\Rightarrow b \in B \wedge g(b) = y \qquad \text{(EE)}$$

$$\Rightarrow (\exists x)(x \in A \wedge f(x) = b) \qquad (f \text{ sobreyectiva})$$

$$\Rightarrow (\exists x)(x \in A \wedge g[f(x)] = y) \qquad (\text{Sustitución b}/f(x))$$

Luego, $g \circ f$ es sobreyectiva. Es claro que $g \circ f : A \to C$.

Corolario. Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son biyectivas, entonces $g \circ f : A \to C$ es biyectiva.

3.1.7.5. Inversa de una función.

Definición 13. Sea $f: A \rightarrow B$. Diremos que f es *invertible* si existe una función $g: B \rightarrow A$ tal que $g \circ f = I_A$ y $f \circ g = I_B$, donde I_A, I_B son las funciones identidad en A y B respectivamente.

Analicemos esta definición:

$$g \circ f = I_A \Leftrightarrow (g \circ f)(x) = x, \ \forall x \in A.$$

$$f \circ g = I_B \Leftrightarrow (f \circ g)(y) = y, \ \forall y \in B.$$

Entonces si $f(x) = y$, tenemos que $g[f(x)] = g(y)$, es decir $x = g(y)$; luego, la existencia de la función g se supedita a la condición $f(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$.

La función g existe; se denomina "función inversa de f" y se representa por f^{-1}, así que podemos escribir

$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x.$$

Una pregunta que surge naturalmente es la de si cualquier función tiene una función inversa. Le daremos respuesta con el siguiente teorema.

Teorema 4. Una función $f: A \rightarrow B$ es invertible si y solamente si es biyectiva.

Demostración:

En primer lugar, supongamos $f: A \rightarrow B$ invertible, y probemos que esto implica la biyectividad.

Tenemos que existe $f^{-1}: B \rightarrow A$ que cumple las condiciones de la definición, y consideremos $x_1 \in A$ y $x_2 \in A$ con $f(x_1) = f(x_2)$ en B.

Aplicamos $f^{-1}[f(x_1)] = f^{-1}[f(x_2)]$ y obtenemos

$(f^{-1} \circ f)(x_1) = (f^{-1} \circ f)(x_2)$, es decir $I_A(x_1) = I_A(x_2)$ y por tanto, $x_1 = x_2$.

Hemos probado que f es inyectiva.

Sea $y \in B$; como $f^{-1}: B \to A$ es función, existe $x \in A$ tal que $f^{-1}(y) = x$. Entonces,

$(f \circ f^{-1})(y) = f\left[f^{-1}(y)\right] = f(x)$, por consiguiente, $I_B(y) = f(x) = y$.

Por lo tanto,

$\exists x \in A$ tal que $f(x) = y$.

En segundo lugar, supongamos que f es biyectiva y probemos que f es invertible, es decir, existe f^{-1}.

Definamos $f^{-1}: B \to A$ por $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$, y probemos que:

a) Es función.

b) $f \circ f^{-1} = I_A$.

c) $f^{-1} \circ f = I_B$.

Veamos:

a) Sea $y \in B$; entonces existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$; por ser sobreyectiva, entonces $f^{-1}(y) = x$, y en consecuencia, dado $y \in B$, existe $x \in A$ tal que $f^{-1}(y) = x$.

Sean $f^{-1}(y) = x_1$ y $f^{-1}(y) = x_2$, entonces $f(x_1) = y$ y $f(x_2) = y$. Por lo tanto, $f(x_1) = f(x_2)$ y $x_1 = x_2$ al ser inyectiva.

b) $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}\left[f(x)\right] = f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow (f^{-1} \circ f)(x) = x = I_A(x)$

Entonces $f \circ f^{-1} = I_A$.

c)
$$
\begin{aligned}
f^{-1}(y) = x &\Leftrightarrow f\left[f^{-1}(y)\right] = f(x) = y \\
&\Leftrightarrow (f \circ f^{-1})(y) = y \\
&\Leftrightarrow f^{-1} \circ f = I_B
\end{aligned}
$$

Luego, la condición necesaria y suficiente para que una función tenga inversa es que sea biyectiva.

Teorema 5. Si $f : A \to B$ tiene inversa f^{-1}, entonces f^{-1} es biyectiva.

Demostración:

a) $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2) \quad \Rightarrow f\left[f^{-1}(y_1)\right] = f\left[f^{-1}(y_2)\right]$

$$\Rightarrow \left(f \circ f^{-1}\right)(y_1) = \left(f \circ f^{-1}\right)(y_2)$$

$$\Rightarrow I_B(y_1) = I_B(y_2)$$

$$\Rightarrow y_1 = y_2$$

Esto prueba que f^{-1} es inyectiva.

b) Sea $x \in A \quad \Rightarrow (\exists y \in B)\left(f(x) = y\right)$

$$\Rightarrow (\exists y \in B)\left(f^{-1}(y) = x\right)$$

Así, para $x \in A$ existe $y \in B$ tal que $f^{-1}(y) = x$, lo que significa que f^{-1} es sobreyectiva.

Es fácil probar que si $f : A \to B$ es invertible, f^{-1} es única; esto es, una función invertible tiene una y solo una función inversa.

Teorema 6. Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son funciones invertibles, entonces $g \circ f : A \to C$ es invertible.

La demostración es inmediata al ser $g \circ f$ biyectiva.

Teorema 7. Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son funciones invertibles, entonces $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Demostración:

$$\begin{aligned}(g\circ f)^{-1}(z)=x &\Leftrightarrow (g\circ f)(x)=z\\ &\Leftrightarrow g\left[f(x)\right]=z\\ &\Leftrightarrow f(x)=g^{-1}(z)\\ &\Leftrightarrow x=f^{-1}\left[g^{-1}(z)\right]\\ &\Leftrightarrow x=\left(f^{-1}\circ g^{-1}\right)(z)\end{aligned}$$

Entonces, $(g\circ f)^{-1}(z)=\left(f^{-1}\circ g^{-1}\right)(z)$, $\forall z\in C$.

Ejemplo 16. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida por $f(x)=2x$. Se puede probar que f es biyectiva. Hallar su inversa f^{-1}.

Sabemos que $f(x)=y=2x \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x \Leftrightarrow f^{-1}(2x)=x$.

La función f^{-1} reduce el doble de algo a ese algo, es decir $f^{-1}(x)=\dfrac{x}{2}$.

En efecto, $f^{-1}\left[f(x)\right]=f^{-1}(2x)=\dfrac{2x}{2}=x$.

Resulta un ejercicio interesante graficar f y f^{-1} en un diagrama cartesiano.

3.1.7.6. Familias indexadas.

Definición 14. Sea A un conjunto, $\mathcal{P}(A)=\{x \mid x\subseteq A\}$ el conjunto de partes de A; I un conjunto que denominamos *conjunto de índices* y una aplicación $p:I\to\mathcal{P}(A)$, definida por $p(i)=A_i$ donde $A_i\in\mathcal{P}(A)$.

El recorrido $\mathcal{R}(p)$ se denomina "una familia de partes de A" y se nota por $\mathcal{R}(i)=\{A_i\} i\in I$.

Ejemplo 17.

Sea $A=\{a,b,c\}$, $\mathcal{P}(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$.

Sea $I = \{1,2,3\}$. Definimos $p: I \to \mathcal{P}(A)$ por $p(1) = \{a\}$, $p(2) = \{a,b\}$, $p(3) = \{b,c\}$.

Así, $A_1 = \{a\}$, $A_2 = \{a,b\}$, $A_3 = \{b,c\}$ y formamos la familia $\{A_1, A_2, A_3\}$.

Nota. La función p no es necesariamente inyectiva, por lo que dos índices diferentes pueden tener la misma imagen; puede ocurrir $i \neq j$ pero $A_i = A_j$. Por tal motivo, una familia no es un conjunto de conjuntos y preferimos escribir $[A_1, A_2, A_3]$ en lugar de $\{A_1, A_2, A_3\}$ para el ejemplo visto.

Ejemplo 18. Sea $I = \{1,2,3\}$, $p(1) = \{a,b\}$, $p(2) = \{a,c\}$ y $p(3) = \{a,b\}$, entonces

$A_1 = \{a,b\} = A_3$ y $A_2 = \{a,c\}$.

Formamos la familia $[A_1, A_2, A_1]$ que no es el conjunto $\{A_1, A_2, A_3\} = \{A_1, A_2\}$.

Definición 15. Si $[A_i]$ $i \in I$ es una familia de conjuntos, al conjunto de los $x \in A$ tales que x, pertenece al menos a uno de los conjuntos de la familia. Lo denominamos *unión de la familia* y lo representamos por $\bigcup_{i \in I} A_i$.

Así, $x \in \bigcup_{i \in I} A_i \Leftrightarrow (\exists j)(j \in I \wedge x \in A_j)$.

Definición 16. Si $\{A_i\}$ $i \in I$ es una familia de conjuntos en $\mathcal{P}(A)$, al conjunto de los $x \in A$ tales que x pertenece a todos los conjuntos de la familia, se denomina *intersección de la familia* y se nota $\bigcap_{i \in I} A_i$.

Así, $x \in \bigcap_{i \in I} A_i \Leftrightarrow (\forall j)(j \in I \Rightarrow x \in A_j)$.

Ejemplo 19. Sean $I = \{1,2,3,4\}$ y $A = \{a,b,c\}$, entonces,

$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$.

Definamos $p: I \to \mathcal{P}(A)$ por

$p(1)=\{a,b\}=A_1$

$p(2)=\{a,c\}=A_2$

$p(3)=\{a,b\}=A_3$

Entonces,

$$\begin{aligned}\bigcup_{i\in I} A_i &= \{a,b\}\cup\{a,c\}\cup\{a\}\\ &= \{a,b,c\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bigcap_{i\in I} A_i &= \{a,b\}\cap\{a,c\}\cap\{a\}\\ &= \{a\}\cap\{a\}\\ &= \{a\}.\end{aligned}$$

Teorema 8. Si $f:A\to B$, $\{A_i\}\, i\in I$ es una familia de subconjuntos de A, entonces

a) $f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)=\bigcup_{i\in I} f(A_i)$

b) $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)\subseteq\bigcap_{i\in I} f(A_i)$

Demostración:

a)
$$\begin{aligned}f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) &\Leftrightarrow (\exists j)\big(j\in I\wedge x\in A\wedge y=f(x)\big)\\ &\Leftrightarrow (\exists j)\big(j\in I\wedge y\in f(A_j)\big)\\ &\Leftrightarrow y\in\bigcup_{i\in I} f(A_i).\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}y\in f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) &\Leftrightarrow (\exists x)\Big(x\in\bigcap_{i\in I} A_i\wedge y=f(x)\Big)\\ &\Leftrightarrow (\exists x)\Big(\big((\forall i)(i\in I\Rightarrow x\in A_i\big)\wedge y=f(x)\Big)\\ &\Leftrightarrow (\forall i)\big(i\in I\Rightarrow y\in f(A_i)\big)\\ &\Leftrightarrow y\in\bigcap_{i\in I} f(A_i).\end{aligned}$$

Entonces, $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} f\left(A_i\right)$.

Nos hacemos la pregunta pertinente de si puede darse la igualdad, para lo cual debe ocurrir

$$\bigcap_{i\in I} f\left(A_i\right) \subseteq f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$$

Supongamos que la familia $\left[A_1, A_2\right]$ en $\mathcal{P}\left(A\right)$ y $f : A \to B$. Tomemos

$$y \in f\left(A_1\right) \cap f\left(A_2\right)$$

$$\begin{aligned} y \in f\left(A_1\right) \cap f\left(A_2\right) &\Rightarrow y \in f\left(A_1\right) \wedge y \in f\left(A_2\right) \\ &\Rightarrow \left(\exists x_1\right)\left(x_1 \in A_1 \wedge y = f\left(x_1\right)\right) \wedge \left(\exists x_2\right)\left(x_2 \in A_2 \wedge y = f\left(x_2\right)\right) \\ &\Rightarrow \left(\exists x_1\right)\left(\exists x_2\right)\left(x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge y = f\left(x_1\right) = f\left(x_2\right)\right) \end{aligned}$$

¿Garantiza esto que $x_1 = x_2$?

Teorema 9. Si $f : A \to B$, $\left\{B_i\right\} i \in I$ es una familia de partes de B, entonces,

a) $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}\left(B_i\right)$

b) $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}\left(B_i\right)$

Demostración:

a) $$\begin{aligned} x \in f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) &\Rightarrow f\left(x\right) \in \bigcup_{i\in I} B_i \\ &\Leftrightarrow \left(\exists j\right)\left(j \in I \wedge f\left(x\right) \in B_j\right) \\ &\Leftrightarrow \left(\exists j\right)\left(j \in I \wedge x \in f^{-1}\left(B_j\right)\right) \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{i\in I} f^{-1}\left(B_i\right). \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x \in f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) &\Leftrightarrow f\left(x\right) \in \bigcap_{i\in I} B_i \\ &\Leftrightarrow \left(\forall i\right)\left(i \in I \Rightarrow f\left(x\right) \in B_i\right) \\ &\Leftrightarrow \left(\forall i\right)\left(i \in I \Rightarrow x \in f^{-1}\left(B_i\right)\right) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x \in \bigcap_{i \in I} f^{-1}\left(B_i\right).$$

3.1.7.7. N-uplas ordenadas y sucesiones.

Suponemos que los lectores están familiarizados con los conjuntos

$\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,3,\ldots,n,\ldots\}$

$\mathbb{N}_1 = \{1,2,3,\ldots,n,\ldots\}$

Definición 17. Sean A y B conjuntos no vacíos, un par de elementos en A y B es una función

$p:\{1,2\} \to A \cup B$ tal que $p(1) = a_1 \in A$ y $p(2) = a_2 \in B$.

Notación. El par ordenado p se nota por (a_1, a_2) o $\langle a_1, a_2 \rangle$.

Si $A = B$, en este caso el par ordenado p es una función $p:\{1,2\} \to A$ definida por $p(1) = a$ y $p(2) = b$; tenemos el par (a,b).

Ahora, si $q:\{1,2\} \to A$ se define por $q(1) = b$ y $q(2) = a$, se tiene el par (b,a). Las funciones p y q son diferentes. Por lo tanto,

$(a,b) \neq (b,a)$.

Nota. El par (a,a) es la función constante $c:\{1,2\} \to \{a,b\}$, definida por $c(1) = a$ y $c(2) = a$

¿Cuántos pares ordenados, es decir, cuántas funciones pueden definirse de $\{1,2\} \to \{a,b\}$?

Podemos redefinir el producto cartesiano $A \times B$ como el conjunto

$$\begin{aligned} A \times B &= \{ f:\{1,2\} \to A \cup B \mid f \text{ es función}\} \\ &= \{(x,y) \mid x \in A \wedge y \in B\}. \end{aligned}$$

Cuando $A = B$, escribiremos

$$A \times A = \{(x,y) \mid x \in A \wedge y \in A\}.$$

Definición 18. Si A, B y C son conjuntos, una terna ordenada o tripla ordenada de elementos de A, B y C es una función.

$g:\{1,2,3\} \to A \cup B \cup C.$

Tal que
$$g(1) = a_1 \in A,$$
$$g(2) = a_2 \in B,$$
$$g(3) = a_3 \in C.$$

Notamos g por (a_1, a_2, a_3) o $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$.

Definimos el producto cartesiano.

Definición 19. $A \times B \times C = \{\ g:\{1,2,3\} \to A \cup B \cup C \mid g \text{ es función}\}$
$$= \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 \in A \wedge x_2 \in B \wedge x_3 \in C\}\ .$$

Cuando $A = B = C$, entonces $A \times A \times A$ suele notarse como A^3.

Definición 20. Si $A_1, A_2, ..., A_n$ son conjuntos, una n-upla ordenada es una función

$f:\{1,2,...,n\} \to \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

Notamos las n-uplas ordenadas por $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ o $\langle a_1, a_2, a_3, ..., a_n \rangle$.

Definición 21. El producto cartesiano de las A_i se define
$$\prod_{i=1}^{n} A_i \quad = \{\ f:\{1,2,...,n\} \to \bigcup_{i=1}^{n} A_i \mid f \text{ es función}\}$$
$$= \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_i \in A_i, i = 1, 2, ..., n\}.$$

Notación. Notaremos $\mathbb{N}_k = \{k, k+1, k+2, ...\}$.

Así,
$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

$$\mathbb{N}_1 = \{1,2,3,.4,...\}$$

$$\mathbb{N}_2 = \{2,3,.4,5,...\}$$

Definición 22. Sea A un conjunto; una sucesión en A es una función $s:\mathbb{N}_k \to A$.

En general, las sucesiones se definen sobre $\mathbb{N}_0$ o $\mathbb{N}_1$.

Notaremos $s(n)=x_n$ y la sucesión como $(x_1,x_2,...,x_n,...)$ o $\langle x_1,x_2,...,x_n,...\rangle$; de manera abreviada como (x_n) o $\langle x_n\rangle$.

Definición 23. Si (x_n) es una sucesión en un conjunto A, el conjunto de valores de la sucesión es el recorrido de la función s tal que $s(n)=x_n$.

Es necesario que no se confunda la sucesión con su conjunto de valores, pues la primera es un objeto (una función), en tanto que el conjunto de valores es un conjunto.

Ejemplo 20. Suponiendo conocido el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, se define la sucesión

$s:\mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ por $s(n)=(-1)^n$.

Entonces, la sucesión es:

$(1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,.....)=\left((-1)^n\right)$

Pero su conjunto de valores es:

$\mathcal{R}(s)=\{-1,1\}$.

En algunos casos la confusión se puede presentar, pero debemos estar atentos para no confundirnos.

Ejemplo 21. Sea la sucesión $h:\mathbb{N}_1 \to \mathbb{R}$, definida por $h(n)=1/n$

La sucesión se expresa $\left(1, 1/2, 1/3, 1/4,...\right)$ y su conjunto de valores es $\mathcal{R}(h)=\left\{1, 1/2, 1/3, 1/4,...\right\}$.

Operaciones binarias

Definición 24. Dado un conjunto *A*, una *operación binaria en A* es una función $\mathrm{O}: A \times A \to A$ en que cada par ordenado $(x, y) \in A \times A$ le hace corresponder un único elemento $z = \mathrm{O}(x, y) \in A$. En este caso, en lugar de $\mathrm{O}(x, y) = z$, se escribe $x\mathrm{O}y = z$.

Ejemplo 22. La adición de números naturales se define como la función $+: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida como $+(m, n) = m + n$.

Ejercicios

1. Suponga que $\mathrm{f}: A \to B$ es una función $C \subseteq A$ Y $D \subseteq B$.
   a. Demostrar que $C \subseteq \mathrm{f}^{-1}(\mathrm{f}(C))$.
   b. Pruebe que $\mathrm{f}(\mathrm{f}^{-1}(D)) \subseteq D$.
   c. Pruebe que si f es inyectiva, entonces $C = \mathrm{f}^{-1}(\mathrm{f}(C))$.
   d. Pruebe que si f es sobreyectiva, entonces $D = \mathrm{f}(\mathrm{f}^{-1}(D))$.
2. Si $\mathrm{f}: A \to B$ es una función $X \subseteq A$ y $Y \subseteq A$, demuéstrese:
   a. $X \subseteq Y \Rightarrow \mathrm{f}(X) \subseteq \mathrm{f}(Y)$.
   b. $\mathrm{f}(X) - \mathrm{f}(Y) \subseteq \mathrm{f}(X - Y)$. Investigue cuándo puede darse la igualdad.
   c. $\mathrm{f}(X) = \varnothing \Leftrightarrow X = \varnothing$.
3. Si $\mathrm{f}: A \to B$ es una función $M \subseteq B$ y $N \subseteq B$, demuéstrese:
   a. $\mathrm{f}^{-1}(M - N) = \mathrm{f}^{-1}(M) - \mathrm{f}^{-1}(N)$.
   b. $\mathrm{f}^{-1}(M) = \varnothing \Leftrightarrow M \bigcap \mathrm{f}(A) = \varnothing$.
   c. $\mathrm{f}^{-1}(B - M) = A - \mathrm{f}^{-1}(M)$.
4. Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c\}$. Determine las funciones biyectivas de $B \to A$.
5. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Se define $\mathrm{f}(x) = [x]_{\mathrm{mod}\,4}$; Hallar $\mathcal{R}(\mathrm{f})$.

a. ¿Es inyectiva?

b. ¿Es sobreyectiva?

3.2. Equipotencia, conjuntos finitos y números cardinales

3.2.1. Equipotencia.

Definición 1. Dados dos conjuntos A y B se dice que A *está en correspondencia biunívoca con* B, o que A *es equipotente a* B si existe una función biyectiva $f : A \to B$.

Notaremos $A \approx B$ para indicar que A *es equipotente a* B.

La relación de equipotencia entre conjuntos es una relación de equivalencia, como lo verificaremos a continuación.

- Reflexiva. $A \approx A$

  La función $I_A : A \to A$ definida $I_A(x) = x$, $\forall x \in A$ es biyectiva.

- Simétrica. Si $A \approx B$, existe $f : A \to B$, f biyectiva; entonces $f^{-1} : B \to A$ existe y es biyectiva, es decir $B \approx A$.

- Transitiva. Si $A \approx B$ y $B \approx C$, existen $f : A \to B$ y $g : B \to C$ biyectivas; entonces $g \circ f : A \to C$ existe y es biyectiva, es decir $A \approx C$.

Este concepto es de suma importancia en matemáticas; fue utilizado por Frege y Cantor para su construcción del número con el fin de cimentar el análisis en la aritmética.

Lema 1. $A \cap B = \varnothing \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \notin B)$

Demostración:

$$\begin{aligned} A \cap B = \varnothing \quad &\Leftrightarrow \sim (\exists x)(x \in A \wedge x \in B) \\ &\Leftrightarrow (\forall x)\left[\sim (x \in A \wedge x \in B)\right] \\ &\Leftrightarrow (\forall x)(x \notin A \vee x \notin B) \\ &\Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \notin B) \end{aligned}$$

Lema 2. Si $A \cap B = \varnothing$ y $C \cap D = \varnothing$ y $A \approx B$ y $C \approx D$, entonces $h : A \cup C \to B \cup D$ definida por $h(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \in A \\ g(x) & si \quad x \in B \end{cases}$ es una función.

Demostración:

(F_1) $x \in A \cup B \Rightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B) \vee (x \in B \Rightarrow x \notin A)$

si $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $f(x) = y$; entonces $h(x) = y$,

si $x \in C$, existe $y \in D$ tal que $g(x) = y = h(x)$.

Entonces, si $x \in A \cup C$, existe $y \in B \cup D$ tal que $h(x) = y$.

Además, si $x \in A \cup C \Rightarrow (x \in A \Rightarrow x \notin C) \vee (x \notin C \Rightarrow x \notin A)$, sea $h(x) = y \wedge h(x) = z$.

En el primer caso, es decir $x \in A$, se tiene $f(x) = y \wedge f(x) = z$ y en consecuencia, $y = z$.

En el segundo caso, $g(x) = y \wedge g(x) = z$; por lo tanto $y = z$.

Teorema 1. Si $A \cap B = \varnothing$ y $C \cap D = \varnothing$ y $A \approx B$ y $C \approx D$, entonces $A \cup C \approx B \cup D$.

Demostración:

Probemos que la función h del Lema 2 es biyectiva.

- $h(x) = h(z) \Rightarrow (f(x) = f(z) \vee g(x) = g(z))$

  Si $f(x) = f(z)$, entonces $x = z$, por ser f inyectiva.

  Por lo tanto, $h(x) = h(z) \Rightarrow x = z$ y h es inyectiva.

- Sea $y \in B \cup D \Rightarrow (y \in B \Rightarrow y \notin D) \vee (y \notin B \Rightarrow y \in D)$.

  Si $y \in D$, existe $z \in C$ tal que $g(z) = y$, entonces existe $z \in C$ tal que $h(z) = y$.

Entonces, en cada caso, si $y \in B \cup D$, existe x tal que $x \in A \cup C$ y $h(x) = y$; luego, h es sobreyectiva.

Teorema 2. $A \times B \approx B \times A$

Demostración:

Definamos $f : A \times B \to B \times A$ mediante $f(x,y) = (y,x)$. Esta función puede probarse biyectiva.

Teorema 3. $A \times \{a\} \approx A$ y $\{a\} \times A \approx A$

Demostración:

Definamos $f : A \to A \times \{a\}$ mediante $f(x) = (x,a)$, $\forall x \in A$.

Es claro que f es una función, además si $f(x) = f(y) \Rightarrow (x,a) = (y,a)$, por definición de par ordenado $x = y$, así que f es inyectiva.

Además, si $(x,a) \in A \times \{a\}$, entonces $x \in A$ y $f(x) = (x,a)$, lo que prueba que f es sobreyectiva.

Teorema 4. Si $A \approx B$ y $C \approx D$, entonces $A \times C \approx B \times D$.

Demostración:

$A \approx B$ bajo la función biyectiva f, $C \approx D$ bajo la función biyectiva g. Definamos la función $h : A \times C \to B \times D$ mediante $h(x,y) = (f(x), g(y))$, $(x,y) \in A \times C$.

Se prueba que efectivamente h es una función biyectiva.

Definición 2. Sean A y B conjuntos. Se define $A^B = \{f \mid f : B \to A\}$.

Así, $f \in A^B \Leftrightarrow f$ es una función con $\mathcal{D}(f) = B$ y $\mathcal{R}(f) \subseteq A$.

Ejemplo 1. Determínese A^B para $B = \{1,2\}$ y $A = \{a,b,c\}$.

Solución: Debemos especificar todas las funciones de B en A.

En primer lugar, tenemos tres funciones constantes:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[dr] & \\ & a, \\ 2 \arrow[ur] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1 \arrow[dr] & \\ & b, \\ 2 \arrow[ur] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1 \arrow[dr] & \\ & c, \\ 2 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Además,

$$\begin{matrix} 1 \to a & 1 \to a & 1 \to b & 1 \to b & 1 \to c & 1 \to c \\ 2 \to b, & 2 \to c, & 2 \to a, & 2 \to c, & 2 \to a, & 2 \to b. \end{matrix}$$

En total se pueden definir $g = 3^2$ funciones.

Teorema 5. Si $A \approx B$ y $C \approx D$, entonces $A^C \approx B^D$.

Demostración:

Por hipótesis, existen funciones biyectivas $f : A \to B$ y $g : C \to D$. Tomemos $h \in A^C$, esto es $h : C \to A$. Entonces podemos formar $f \circ h : C \to B$; esto es $f \circ h \in B^C$.

Como existe $g^{-1} : D \to C$, entonces $f \circ h \circ g^{-1} : D \to B$; esto es $f \circ h \circ g^{-1} \in B^D$.

Para $h \in A^C$, definamos $p(h) = f \circ h \circ g^{-1}$.

Se prueba que p es biyectiva. (Ejercicio).

Teorema 6. Si $2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, entonces $\mathcal{P}(A) \approx 2^A$.

Demostración:

Si $B \in \mathcal{P}(A)$, definamos la función $g_B \in 2^A$. Esto es $g_B : \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \to A$ por

$$g_B(x) = \begin{cases} \varnothing & si \quad x \in B \\ \{\varnothing\} & si \quad x \notin B \end{cases}$$

Así, a cada $B \in \mathcal{P}(A)$ corresponde una única $g_B \in 2^A$. Y si $h \in 2^A$, existe un único $B \in \mathcal{P}(A)$ tal que $h = g_B$, lo que establece la correspondencia pedida.

Definición 3. $A \preccurlyeq B \Leftrightarrow (\exists C)(A \approx C \wedge C \subseteq B)$

Ejemplo 2. $A = \{1,2\}$ y $B = \{a,b,c,d\} \Rightarrow A \preccurlyeq B$ ya que $A \approx \{a,b\} \subseteq B$.

Teorema 7.

(a) Si $A \approx B \Rightarrow A \preccurlyeq B$

(b) Si $A \subseteq B \Rightarrow A \preccurlyeq B$

(c) Si $A \preccurlyeq B \wedge B \preccurlyeq C \Rightarrow A \preccurlyeq C$.

Demostración. (Ejercicio).

Teorema 8. (Schröder-Bernstein). Si $A \preccurlyeq B$ y $B \preccurlyeq A$, entonces $A \approx B$.

La demostración de este teorema es extensa y el lector puede consultarla en cualquier texto de teoría de conjuntos.

Los siguientes teoremas son enunciados sin demostración.

Teorema 9. Si $A \preccurlyeq B$ y $C \preccurlyeq D$, entonces

a) Si $B \cap D = \varnothing$, entonces $A \cup C \preccurlyeq B \cup D$

b) $A \times C \preccurlyeq B \times D$

c) Si no se cumple $A = B = C$ y $D \neq \varnothing$, entonces $A^C \preccurlyeq B^C$.

Corolario: $A \preccurlyeq A \cup B$.

Definimos la relación *tener menor potencia*.

Definición 4. $A \prec B \Leftrightarrow A \preccurlyeq B \wedge \sim(B \preccurlyeq A)$

Teorema 10.

a) $\sim(A \prec A)$

b) $A \prec B \Rightarrow \sim(B \prec A)$

c) $A \prec B \wedge B \prec C \Rightarrow A \prec C$.

Teorema 11.

a) $A \preccurlyeq B \Rightarrow \sim(B \prec A)$

b) $A \preccurlyeq B \wedge B \prec C \Rightarrow A \prec C$

c) $A \prec B \wedge B \preccurlyeq C \Rightarrow A \prec C$

d) $A \preccurlyeq B \Leftrightarrow A \approx B \vee A \prec B$

Teorema 12. $A \prec \mathcal{P}(A)$

Demostración:

(a) El conjunto $\{\{x\} \mid x \in X\} \subseteq \mathcal{P}(A)$. Definamos $f: A \to \{\{x\} \mid x \in X\}$ por $f(x) = \{x\}$.

Esta función es biyectiva como puede probarse fácilmente, entonces $A \preccurlyeq \mathcal{P}(A)$.

Veamos con un contraejemplo que $\sim(A \approx \mathcal{P}(A))$.

$A = \{a, b\}$, $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ y ninguna función de $A \to \mathcal{P}(A)$ puede ser sobreyectiva.

Así, $\sim(A \approx \mathcal{P}(A))$, entonces, $A \prec \mathcal{P}(A)$.

Ejercicios

1. Demuestre los Teoremas 10 y 11.
2. Demostrar que si $A \approx B$, $a \in A$ y $b \in B$, entonces $A - \{a\} \approx B - \{b\}$.
3. Probar que $(A - B) \approx (B - A) \Rightarrow A \approx B$.
4. Si $A = \{0,1,2,3\}$ y $B = \{1,2,3,4\}$, entonces $A \approx B$.
5. Pruebe que $A \approx B \Rightarrow (A) \approx (B)$.
6. Si $A = \{0,1,2,3\}$ y $B = \{1,2,3,4,5\}$, entonces $A \prec B$.
7. Sean $\{B_i\}_{i \in I}, \{C_i\}_{i \in I}$ familias indexadas de conjuntos disyuntos dos a dos. Si $B_i \approx C_i$ para cada $i \in I$ demuestre que $\bigcup_{i \in I} B_i \approx \bigcup_{i \in I} C_i$

3.2.2. Aritmética cardinal. Conjuntos finitos e infinitos.

La idea común de un conjunto finito es la de aquel que puede ponerse en correspondencia biunívoca con un conjunto de la forma $\{1,2,3,\ldots,n\}$, en cuyo caso decimos que el conjunto tiene *n elementos*. Esta idea, aunque visualiza lo que es un conjunto finito y se utiliza de manera práctica, está ligada al concepto de número. Han sido muchas las definiciones de conjunto finito elaboradas por matemáticos, como las propuestas por Zermelo, Russell, Sierpinski, Kuratowski, Tarski y Dedekind. En estas notas adoptaremos la definición de R. Dedekind por ser muy intuitiva, no sin advertir que la misma requiere para su justificación rigurosa de un axioma denominado *axioma de escogencia* o de selección.

3.2.2.1. Conjuntos finitos e infinitos.

Definición 1. Un conjunto A se dice finito si no es equipotente a algún subconjunto propio.

En símbolos:

$$A \text{ es finito} \quad \Leftrightarrow \sim (\exists B)(B \subset A \wedge B \approx A)$$

$$\Leftrightarrow (\forall B)\big(B \subset A \Rightarrow \sim (B \approx A)\big)$$

Ejemplo 3. Si $A=\{a,b\}$, los subconjuntos propios de A son $\varnothing$, $\{a\}$ y $\{b\}$. Si intentamos definir una función biyectiva de alguno de ellos a A, la tarea resulta imposible. Por lo tanto, $A=\{a,b\}$ es finito.

Definición 2. Un conjunto A se dice infinito si no es finito.

Esto es:

A es infinito $\Leftrightarrow (\exists B)\big(B \subset A \wedge B \approx A\big)$.

Así, un conjunto es infinito si y solamente si es equipotente a alguno de sus subconjuntos propios

Ejemplo 4. Consideremos los números naturales $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,4,\ldots\}$. El subconjunto propio de los números naturales $P=\{2n \mid n\in\mathbb{N}\}$, esto es $P=\{0,2,4,6,8,\ldots\}$. Definamos la función $f:\mathbb{N}\to P$ por $f(n)=2n$.

Esta función asigna los valores así:

$$\begin{array}{cccccccc}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots & \boldsymbol{n}\ \ldots \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow \\
0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & \ldots & 2\boldsymbol{n}\ldots
\end{array}$$

Y no se requiere mayor esfuerzo para probar que es biyectiva. Esta prueba que $P\approx\mathbb{N}$, lo que nos dice que el conjunto $\mathbb{N}$ es infinito.

Tenemos así una clasificación de conjuntos finitos e infinitos.

Si A y B son dos conjuntos finitos, la condición $A\approx B$ trae aparejada la condición de que A y B tienen el mismo número de elementos.

Así, $A=\{m,n,r\}$ y $B=\{a,e,i\}$ son equipotentes

$$\begin{array}{ccc} m & n & r \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ a & e & i \end{array}$$

y aceptamos que tienen algo en común que denominamos el *número de elementos*, o que son *equinumerosos*,

Esto condujo a la definición del cardinal $[A]$ de un conjunto A por Frege.

Teorema 1. $\varnothing$ es finito.

Demostración:

Supongamos que $\varnothing$ no es finito, entonces $(\exists A)(A \subseteq \varnothing \wedge A \neq \varnothing \wedge A \approx \varnothing)$. Por consiguiente, $(\exists A)(A \subseteq \varnothing \wedge A \neq \varnothing) \wedge (\exists A)(A \approx \varnothing)$. En consecuencia, $(\exists A)(A \subseteq \varnothing \wedge A \neq \varnothing)$, pero sabemos que $(\forall A)(A \subseteq \varnothing \Rightarrow A = \varnothing)$, lo que equivale a $\sim (\exists A)(A \subseteq \varnothing \wedge A \neq \varnothing)$. Obtenemos la contradicción $(\exists A)(A \subseteq \varnothing \wedge A \neq \varnothing) \wedge \sim (\exists A)(A \subseteq \varnothing \wedge A \neq \varnothing)$. Por lo tanto, $\varnothing$ es finito.

Teorema 2. Si A es un conjunto finito y $B \subseteq A$, entonces B es finito.

Demostración:

Si $B = \varnothing$, no hay nada sujeto a demostración.

Supongamos que $B \neq \varnothing$ no es finito, esto es $(\exists C)(C \subset B \wedge C \approx B)$. Además, $A - B \approx A - B$, $C \cap (A-B) \subset B \cap (A-B) = \varnothing$. Entonces, $C \cup (A-B) \approx B \cup (A-B) = A$. Por lo tanto, $C \cup (A-B) \approx A$. Pero $C \subset B \wedge A - B \subset A$, así que $C \cup (A-B) \subset B \cup (A-B) = A$. Tenemos que $C \cup (A-B)$ es un subconjunto propio de A y $C \cup (A-B) \approx A$, lo que significa que A es infinito, contradiciendo la hipótesis.

Corolario. Si $B \subseteq A$ y B es infinito, entonces A es infinito.

Esto resulta de la contrapositiva del teorema.

Definición 3. Si A es un conjunto, el cardinal $[A]$ de A se define por

$$[A] = \{B :\ B \approx A\}.$$

Como la relación de equipotencia es una relación de equivalencia, $[A]$ es la clase de equivalencia de A mediante la relación $\approx$, así que llegamos a la conclusión de que dos conjuntos equipotentes tienen el mismo cardinal. Esto es

$$[A] = [B] \Leftrightarrow A \approx B$$

Definición 4. Si $A \cap B = \varnothing$ y $[A] = a$ y $[B] = b$, se define la suma de cardinales

$$[A] + [B] = [A \cup B] = a + b$$

Definición 5. $[\varnothing] = 0$.

Definición 6. Si $[A] = a$ y $[B] = b$, se definen $[A]\times[B] = [A \times B] = ab$ y $\left[A^B\right] = a^b$.

Definición 7. Si $[A] = a$ y $[B] = b$, $[A] \leq [B] \Leftrightarrow A \preccurlyeq B$. Esto es, $a \leq b \Leftrightarrow A \preccurlyeq B$.

Definición 8. $a < b \Leftrightarrow A \prec B$.

Podemos utilizar los teoremas de la sección anterior para construir un diccionario que traduzca del lenguaje de conjuntos al de los cardinales y establecer algunas propiedades de estos, sin importar que los conjuntos sean finitos o infinitos. De las propiedades de la relación de equipotencia podemos deducir lo siguiente, asumiendo que:

$$[A] = a,\ \ [B] = b,\ \ [C] = \text{c}$$

1. $A \approx A \Leftrightarrow a = a$
2. $A \approx B \Rightarrow B \approx B \ \Leftrightarrow a = b \Rightarrow b = a$
3. $A \approx B \wedge B \approx C \Rightarrow A \approx C \Leftrightarrow a = b \wedge b = c \Rightarrow a = c$

no son otra cosa que las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva de la igualdad entre números cardinales.

De la definición de suma de cardinales obtenemos lo siguiente:

4. $A \bigcap \varnothing = \varnothing \wedge A \bigcup \varnothing = A \Rightarrow [A \bigcup \varnothing] = [A] + [\varnothing] = [A]$, esto es $a + 0 = a$.

5. Si $A \cap B = \varnothing$, sabemos que $A \cup B = B \cup A$, y por lo tanto, $A \cup B \approx B \cup A$. Todo esto equivale a $a + b = b + a$ (Propiedad conmutativa de la suma)

6. $A \times \varnothing = \varnothing \wedge \varnothing \times A = \varnothing \Leftrightarrow a0 = 0 \wedge 0a = 0$ se prueba así:
$$a \times 0 = 0 \times a = 0,$$

7. $A \approx B \wedge C \approx D \wedge A \cap C = \varnothing \wedge B \cap D = \varnothing \Rightarrow A \cup C \approx B \cup D$ equivale a

   $a = b \wedge c = d \Rightarrow a + c = b + d$ (Uniformidad de la suma)

8. $A \times B \approx B \times A \Leftrightarrow ab = ba$ (Conmutatividad del producto)

9. $A \approx B \wedge C \approx D \Rightarrow A \times C \approx B \times D$ se traduce en $a = b \wedge c = d \Rightarrow ac = bd$ (Uniformidad del producto)

   Otras conclusiones que podemos obtener son las siguientes:

10. $a \leq a$

11. $a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b$

12. $a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$

13. $a = b \wedge c = d \Rightarrow a^c = b^d$

14. $\sim (a < a)$

15. $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$

16. $a(b + c) = ab + ac$

Ejercicios

1. Demuestre las proposiciones 10-16.

2. Si a, b son cardinales, demuestre que $a \leq b \Leftrightarrow a + p \leq b + p$ para cualquier $p \in \mathbb{N}$.

3. Si a, b son cardinales, demuestre que $a < b \Leftrightarrow a + p < b + p$ para cualquier $p \in \mathbb{N}$.
4. Demuestre que $a^0 = 1$ si $a = [A] \wedge A \neq \varnothing$.
5. Demuestre para cardinales que $a^{b+c} = a^b a^c$.
6. Demuestre que $(ab)^c = a^c b^c$ y $\left(a^b\right)^c = a^{bc}$.

3.3. Los números naturales

Los números naturales o números *para contar* constituyen quizá la invención matemática o descubrimiento más antiguo y productivo de la humanidad, pues según Leopoldo Kronecker (como se citó en Bell, 1937), "Dios creó los naturales y el hombre construyó lo demás". Descubrimiento o invención, lo cierto es que desde nuestros primeros años nos familiarizamos con tales entidades, las expresamos simbólicamente como 0, 1, 2, … o con palabras como "cero", "uno", "dos" y así sucesivamente. Realizamos además cálculos con ellas.

Aunque esta percepción intuitiva y el manejo de sus operaciones es suficiente para los propósitos de la vida corriente, para el matemático no es satisfactoria porque no cumple el lema *para hacer matemáticas con algo debemos precisar matemáticamente qué es ese algo*. Es decir, definirlo formalmente de tal manera que en esa definición se reflejen las concepciones de la intuición.

La realidad es que usamos lo que conocemos como *número natural*, pero no somos capaces de responder a la pregunta ¿qué es un número natural?

Para responder a esta pregunta se han introducido enfoques diferentes:

- Un enfoque axiomático deductivo (Peano, 1979).
- Enfoques constructivos basados en la teoría de conjuntos.

3.3.1. Una construcción.

En primer lugar, acudiremos al siguiente enfoque basado en el conjunto $\varnothing$. Daremos la siguiente definición recursiva:

$$s(\varnothing) = \varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\}$$

$$s(\{\varnothing\}) = \{\varnothing\} \cup \{\{\varnothing\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$$

$$s(\{\varnothing, \{\varnothing\}\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \cup \{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$$

y sucesivamente.

Nombramos $s(A)$ el *sucesor de* A y lo notamos $s(A) = A^+$.

Construimos el conjunto $\mathcal{S} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}, \ldots\}$ donde los puntos suspensivos nos dicen que podemos seguir de forma indefinida.

Para establecer las propiedades de $\mathcal{S}$ establezcamos algunas definiciones.

Definición 1. Dado un conjunto A, el sucesor de A se define como $s(A) = A \cup \{A\} = A^+$.

Definición 2. Un conjunto de conjuntos $\mathcal{A}$ es inductivo si se cumplen las siguientes propiedades.

(i) $\varnothing \in \mathcal{A}$

(ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow s(A) \in \mathcal{A}$.

Podemos concluir que $\mathcal{S}$ es un conjunto inductivo.

Hemos construido un conjunto inductivo. Por lo tanto, podemos afirmar que *existen* conjuntos inductivos.

O, si $\mathcal{J}$ es la clase de conjuntos inductivos, $\mathcal{J} \neq \varnothing$.

Proposición 1. Si $\mathcal{A}$ es un conjunto inductivo, entonces $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$.

Demostración:

$$\begin{aligned} \varnothing \in \mathcal{A} &\Rightarrow s(\varnothing) \in \mathcal{A} \\ &\Rightarrow \{\varnothing\} \in \mathcal{A} \\ &\Rightarrow s(\{\varnothing\}) \in \mathcal{A} \\ &\Rightarrow \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

y así sucesivamente.

Proposición 2. Si $\mathcal{J}$ es la clase de todos los conjuntos inductivos, entonces $\cap\{\ |\mathcal{A}\in\mathcal{J}\}$ es inductivo.

Demostración:

$$A \in \cap\{\mathcal{A}\ |\mathcal{A}\in\mathcal{J}\} \quad \Rightarrow (\forall\, \mathcal{A})\ (\mathcal{A}\in\mathcal{J}\Rightarrow A \in \mathcal{A})$$

$$\Rightarrow (\forall\, \mathcal{A})\ (\mathcal{A}\in\mathcal{J}\Rightarrow s(A) \in \mathcal{A})$$

$$\Rightarrow s(A) \in \cap\{\mathcal{A}\ |\mathcal{A}\in\mathcal{J}\}.$$

Proposición 3. $\mathcal{S}=\cap\{\ \mathcal{A}\ |\mathcal{A}\in\mathcal{J}\}$

Demostración:

a) $(\forall\, \mathcal{A})\ (\mathcal{A}\in\mathcal{J}\Rightarrow \mathcal{S} \subseteq \mathcal{A})$.

b) $\mathcal{S}\in\mathcal{J}\Rightarrow \cap\{\ \mathcal{A}\ |\mathcal{A}\in\mathcal{J}\}\subseteq \mathcal{S}$.

Así, $\mathcal{S}$ es el más pequeño de los conjuntos inductivos. Denominamos a $\mathcal{S}$ como el conjunto de los números naturales; es decir, la intersección de todos los conjuntos inductivos.

A todas estas, ¿dónde están 0,1,2,3…etc.?

Establecemos la siguiente identificación

$\varnothing = 0$

$\{\varnothing\} = 1$

$\{\varnothing,\{\varnothing\}\} = 2$

$\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$=3, y así sucesivamente.

Entonces,

$0 = \varnothing$

$1 = \{0\} = s(0) = 0^+$

$2 = \{0,1\} = s(1) = 1^+$

$3 = \{0,1,2\} = s(2) = 2^+$

.

.

.

$n^+ = \{0,1,2,...,n\} = s(n) = n^+$

.

.

.

Los símbolos identificadores de cada uno de los conjuntos en $\mathcal{S}$ se denominan *números naturales*. Se denomina *conjunto de los números naturales* al conjunto constituido por ellos. Se representa por $\mathbb{N}$ o también por ω. Así,

$$\mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$$

3.3.2. Propiedades de $\mathbb{N}$.

Teorema 1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $n^+ \neq 0$.

Demostración. Por definición, $n^+ = n \cup \{n\} \Rightarrow n \in n^+ \Rightarrow n^+ \neq \varnothing \Rightarrow n^+ \neq 0$.

Teorema 2. (Inducción matemática). Sea $X \subseteq \mathbb{N}$; supongamos que se cumplen las siguientes propiedades:

(i) $0 \in X$

(ii) Si $n \in X$, entonces $n^+ \in X$,

entonces $X = \mathbb{N}$.

Demostración. Las condiciones (i) y (ii) implican que X es inductivo y por lo tanto, $\mathbb{N} \subseteq X$. Pero $X \subseteq \mathbb{N}$. Entonces $X = \mathbb{N}$.

Lema 1. Si $m \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N}$ y $m \in n^{+}$, entonces $m \in n$ o $m = n$.

Demostración:

Por definición, $n^{+} = n \cup \{n\}$; luego, si $m \in n^{+}$, entonces $m \in n$ o $m \in \{n\}$; por consiguiente, $m \in n \vee m = n$.

Definición 3. Un conjunto A es transitivo si para cada $x \in A$, entonces $x \subseteq A$.

Ejemplo 1.

$3 = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$

$\varnothing \subseteq 3$

$1 = \{\varnothing\} \wedge \varnothing \in 3 \Rightarrow \varnothing \subseteq 3$

$2 \in 3 \wedge 2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \wedge \varnothing \in 3 \wedge \{\varnothing\} \in 3 \Rightarrow \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \subseteq \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$

Así, $2 \subseteq 3$.

Lema 2. Todo número natural es transitivo.

Demostración. Sea X el conjunto de todos los elementos de $\mathbb{N}$ que son transitivos. Probemos que $X = \mathbb{N}$ utilizando la inducción matemática.

(i) $0 \in X$ ya que si 0 no es inductivo existe $y \in 0$ tal que $y \not\subset 0$, entonces $(\exists y)(y \in \varnothing \wedge y \not\subseteq \varnothing)$. Por consiguiente, $(\exists y)(y \in \varnothing) \wedge (\exists y)(y \not\subseteq \varnothing) \Rightarrow (\exists y)(y \in \varnothing)$, (Contradicción) luego, 0 es transitivo.

(ii) Demostremos ahora lo siguiente. Si $n \in X$, entonces $n^{+} \in X$; esto es, si n es un conjunto transitivo, entonces n^{+} es transitivo.

Si n es transitivo y $m \notin n^{+}$, entonces $m \notin n$ o $m = n$. Ahora, si $m \notin n$, entonces $m \subseteq n$ al ser n transitivo; pero $n \subseteq n^{+}$ y en consecuencia, $m \subseteq n^{+}$. Así que n^{+} es transitivo.

Por lo tanto $X = \mathbb{N}$.

Teorema 3. Si m , $n \in \mathbb{N}$ y $m^{+} = n^{+}$, entonces $n = m$.

Demostración. Supongamos $m^{+} = n^{+}$ como $n \in n^{+}$, entonces $n \in m^{+}$; en consecuencia, $n \in m$ o $n = m$. Además, $m \in m^{+} = n^{+}$ y entonces $m \in n^{+}$. Por lo tanto, $m = n$ o $m = n$.

Si $m = n$, el teorema estará probado.

Hemos probado que

$$\begin{aligned} m^{+} = n^{+} &\Rightarrow (m \in n \vee m = n) \vee (n \in m \vee m = n) \\ &\Rightarrow (m \in n \vee n \in m) \vee (m = n) \end{aligned}$$

si se da la hipótesis y $m \neq n$, entonces $m \in n \vee n \in m$ y por lo tanto, $m \subseteq n$ y $n \subseteq m$. Esto es $m = n$.

3.3.3. Los axiomas de Peano.

El matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932) estableció un sistema axiomático para los números naturales de la siguiente manera.

Se aceptan como objetos no definidos un conjunto no vacío $\mathbb{N}$ llamado *conjunto de los números naturales* y una función $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$; para cada $n \in \mathbb{N}$, el valor $s(n)$ es llamado el sucesor de n , de acuerdo con esto, cada $n \in \mathbb{N}$ tiene un único sucesor.

La función s satisface los siguientes axiomas.

$\mathcal{P}_1$. $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es inyectiva; es decir, si m, $n \in \mathbb{N}$, $s(m) = s(n) \Rightarrow m = n$.

$\mathcal{P}_2$. Si $s(\mathbb{N}) = \{ s(n) | \ n \in \mathbb{N} \}$, entonces $\mathbb{N} - s(\mathbb{N})$ tiene un solo individuo. Es decir, existe un único número natural que no es sucesor de ningún otro número natural. Este número se denomina *cero* y se representa por 0 . Así cualquiera que sea $n \in \mathbb{N}$, $0 \neq s(n)$.

Por otro lado, si $n \neq 0$, entonces existe un único $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $s(n_0) = n$.

$\mathcal{P}_3$. (Principio de inducción). Sea $X \subseteq \mathbb{N}$ tal que

(i) $0 \in X$

(ii) $(\forall n)(n \in X \Rightarrow s(n) \in X)$;

entonces $X = \mathbb{N}$.

Las propiedades de la función s nos conducen a los axiomas de Peano para $\mathbb{N}$ adoptando la notación $s(n) = n^+ =$ sucesor de n y la existencia de 0.

Axiomas de Peano

P_1. $0 \in \mathbb{N}$

P_2. $(\forall n)(n \in \mathbb{N} \Rightarrow n^+ \in \mathbb{N})$

P_3. $(\forall n)(n \in \mathbb{N} \Rightarrow n^+ \neq 0)$

P_4. $(\forall m)(\forall n)(m \in \mathbb{N} \wedge n \in \mathbb{N} \wedge (m^+ = n^+ \Rightarrow m = n))$

P_5. Si $X \subseteq \mathbb{N}$ es tal que

(i) $0 \in X$

(ii) $(\forall n)(n \in X \Rightarrow s(n) \in X)$;

entonces $X = \mathbb{N}$.

El principio de inducción puede enunciarse considerando X como la extensión de una condición α en $\mathbb{N}$, de la siguiente manera.

Sea α una condición en $\mathbb{N}$ tal que

(i) $\alpha(0)$

(ii) $\alpha(n) \Rightarrow \alpha(n^+)$

entonces $(\forall n \in \mathbb{N})(\alpha(n))$.

Debemos resaltar el hecho de que estos axiomas fueron demostrados con teoremas en nuestro enfoque constructivo.

3.3.4. El sistema de los números naturales.

3.3.4.1. Definiciones recursivas o inductivas.

Estas definiciones se basan en la posibilidad de iterar una función $f : X \to X$ mediante $f \circ f$, $(f \circ f) \circ f$; esto es, si $f : X \to X$, podemos definir $f^n : X \to X$ por $f^0 = \mathrm{I}$ (Función identidad)
$f^1 = f$, $f^2 = f \circ f^1, \ldots, f^{s(n)} = f \circ f^n$.

En particular, como $1 = s(0)$, $2 = s(1)$ y $3 = s(2)$, podemos establecer $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f^2$ y así sucesivamente. Además, $f^0 = I$ donde I es la función identidad.

Partiendo de la función $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $s(n) = n^+$, damos la siguiente definición.

Definición 4. (Adición de números naturales). Dados $m, n \in \mathbb{N}$ se define

$$m + n = s^n(m).$$

Esta es una función de $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y por lo tanto, la suma está bien definida.

Lema 3. $m + 0 = m$

Demostración:

$m + 0 = s^0(m) = I(m) = m$

Teorema 4. Si $m \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces

(i) $s(m) = m^+ = m + 1$.

(ii) $m + s(n) = s(m + n)$.

Demostración:

(i) $s(m) = s^1(m) = m+1$.

Probemos ahora $m + s(n) = s(m+n)$.

(ii) Supongamos $\alpha(n)$ la condición dada por $\alpha(n) \Leftrightarrow m + s(n) = s(m+n)$, entonces

a. $\alpha(0) \Leftrightarrow m + s(0) = s(m+0)$

Vemos que $\alpha(0)$ se cumple ya que

$$m + s(0) = m + 1 = m^+ = s(m+0).$$

b. Supongamos que se cumple $\alpha(k)$; esto es, $m + s(k) = s(m+k)$.

Entonces

$$\begin{aligned} m + s(k^+) &= s^{s(k^+)}(m) \\ &= s\left(s^{k^+}(m)\right) \\ &= s(m + k^+) \end{aligned}$$

Así $m + s(k^+) = s(m + k^+)$.

Corolario. La función adición $m + n = s^n(m)$ cumple:

(i) $s(m) = m^+ = m+1$.

(ii) $m + n^+ = (m+n)^+$.

Podemos demostrar ahora las propiedades fundamentales de la adición.

Teorema 5. (Ley asociativa). Si m, n, $p \in \mathbb{N}$, entonces $m + (n+p) = (m+n) + p$.

Demostración. Sean m y n dadas en $\mathbb{N}$, y $X = \{p \in \mathbb{N} : m + (n+p) = (m+n) + p\}$ tenemos:

(i) $0 \in X$

En efecto, $m+(n+0)=(m+n)+0$.

(ii) Además, $1 \in X$ ya que $m+(n+1)=m+n^{+}=(m+n)^{+}=(m+n)+1$.

(iii) Sea $k \in X$, entonces $m+(n+k)=(m+n)+k$ y

$(m+n)+k^{+}=((m+n)+k)^{+}=(m+(n+k))^{+}$

$=(m)+(n+k)^{+}=m+(n+k)^{+}=m+(n+k^{+})$.

Por lo tanto, $k^{+} \in X$.

Por inducción, $X=\mathbb{N}$.

Teorema 6. $n+1=+n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Sea $X=\{n \in \mathbb{N} : n+1=1+n\}$. En primer lugar,

(i) $1+0=s^{0}(1)=I(1)=1$

entonces $1+0=0+1$, y por lo tanto, $0 \in X$.

(ii) Sea $k \in X$, entonces $k+1=1+k$ y

$k^{+}+1=(k+1)+1=(1+k)+1=(1+k)^{+}=1+k^{+}$.

Teorema 7. (Ley conmutativa). $\forall n,m \in \mathbb{N}$, $m+n=n+m$

Demostración:

Sea $X=\{k \in \mathbb{N} : k+n=n+k\}$; tenemos

(i) $0 \in X$ ya que $0+n=n+0=n$.

(ii) $1 \in X$ puesto que $n+1=1+n$.

(iii) Si $k \in X$, se tiene que $n+k=k+n$.

Ahora,

$$k^+ + n = (k+1) + n = k + (1+n) = k + (n+1) = k + n^+$$
$$= (k+n)^+ = (n+k)^+ = n + k^+$$

Teorema 8. Si n, m y p son números naturales, entonces

$$n+m = p+m \Rightarrow n = p.$$

Demostración. Sea n dado, la condición sobre k dada por

$\alpha(k) \Leftrightarrow n+k = p+k \Rightarrow n = p$ y X la extensión de α, esto es $X = \{k \in \mathbb{N} : n+k = p+k \Rightarrow n = p\}$. Por consiguiente,

(i) $0 \in X$ ya que $n+0 = p+0$, entonces $n = p$.

(ii) Sea $k \in X$. Entonces $n+k = p+k \Rightarrow n = p$

$$n + k^+ = p + k^+ \Rightarrow (n+k)^+ = (p+k)^+$$
$$\Rightarrow n+k = p+k$$
$$\Rightarrow n = p$$

Por lo tanto, si $k \in X \Rightarrow k^+ \in X$. En conclusión, $X = \mathbb{N}$.

$\alpha(m) \Leftrightarrow n+m = p+m \Rightarrow n = p$; se cumple $(\forall m)(n \in \mathbb{N})$.

3.3.4.2. Relación de orden aditiva.

Definición 5. Sean $m \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N}$. Decimos "m es menor o igual a n" y escribimos $m \leq n$ si cumple

$$m \leq n \Leftrightarrow (\exists p)(p \in \mathbb{N} \wedge m + p = n).$$

Ejemplo 2. $4 \leq 5$ ya que $4+1=5$.

Lema 4. Si $m \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N}$, y $m+n=0 \Leftrightarrow m=0 \wedge n=0$.

Demostración:

a) Si $m=0 \wedge n=0 \Rightarrow m+n=0$.

b) Sea $m+n=0 \wedge \sim(m=0 \wedge n=0)$. Entonces

$$m+n=0 \wedge (m \neq 0 \vee n \neq 0)$$

$$\Rightarrow m+n=0 \wedge m+n \neq 0$$

Teorema 9. La relación $\leq$ en $\mathbb{N}$ cumple las siguientes propiedades:

a) $(\forall n \in \mathbb{N})(n \leq n)$

b) $n \leq m \wedge m \leq n \Rightarrow n=m$

c) $n \leq m \wedge m \leq p \Rightarrow n \leq p$

Demostración:

a) $n+0=n$ y $0 \in \mathbb{N}$, entonces $n \leq n$.

b) $n \leq m \wedge m \leq n$ implica que existen $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$ tales que $n+p=m \wedge m+q=n$.

Entonces al sustituir n por $m+q$, se obtiene $(m+q)+p=m$. Por asociatividad,

$$m+(q+p)=m \ =m+0.$$

Por consiguiente, por simplificación $q+p=0$; entonces $q=0 \wedge p=0$, y por lo tanto, $m=n$.

c) Supongamos que $n \leq m$ y $m \leq p$, entonces existen $r,s \in \mathbb{N}$ tales que $n+r=m$ y $m+s=p$. Podemos entonces sumar miembro a miembro las dos igualdades y obtenemos $(n+r)+(m+s)=m+p$.

Escribimos por asociatividad

$$n+r+m+s=m+p$$

Por simplificación

$$n + r + s = p$$

Pero $r + s = q \in \mathbb{N}$; entonces existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $n + q = p$, esto significa que $n \leq p$.

Corolario. La relación $\leq$ es una relación de orden en $\mathbb{N}$.

Teorema 10. Si $n, m \in \mathbb{N}$, entonces

$$n \leq m \Rightarrow n + p \leq m + p,\ (\forall p \in \mathbb{N}).$$

Demostración:

$$\begin{aligned} n \leq m &\Rightarrow (\exists q)(n + q = m) \\ &\Rightarrow (m + q) + p = m + p \\ &\Rightarrow m + (q + p) = m + p \\ &\Rightarrow m + (p + q) = m + p \\ &\Rightarrow (m + p) + q = m + p \\ &\Rightarrow m + p \leq m + p \end{aligned}$$

Definición 6. (Orden estricto). Si $n, m \in \mathbb{N}$, definimos

$$n < m \Leftrightarrow (\exists q)(q \in \mathbb{N} \wedge q \neq 0 \wedge n + q = m).$$

Veamos que esta relación es transitiva, pero no es reflexiva ni simétrica.

Teorema 11. La relación **<** en $\mathbb{N}$ cumple

(i) $n < m \wedge m < p \Rightarrow n < p$

(ii) $\sim (n < n)$

(iii) $m < n \Rightarrow \sim (n < m)$

Demostración:

(i) $n < m \wedge m < p$, entonces existen q y r tales que $q \neq 0$ y $r \neq 0$; entonces $q + r = s \neq 0$ y $n + s = p$, $s \neq 0$. En conclusión $n < p$.

(ii) Supongamos $n < n$. Entonces, existe $q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$ tal que $n + q = n = n + 0$; simplificando, $q = 0$. Pero $q \neq 0$, lo cual es una contradicción; por lo tanto, $\sim(n < n)$.

(iii) Para probar $m < n \Rightarrow \sim(n < m)$, negamos esta fórmula y tenemos $m < n \wedge n < m$. Entonces, por transitividad $m < m$; pero $\sim(m < m)$, y en consecuencia, $(m < m) \wedge \sim(m < m)$ lo cual es una contradicción.

Así, $m < n \Rightarrow \sim(n < m)$.

La relación $<$ no es un orden en $\mathbb{N}$.

Teorema 12. 0 es el elemento mínimo de $\mathbb{N}$.

Demostración. Probemos que $0 \leq n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

En primer lugar, $0 \leq 0$.

Además, $0 + n = n$ y $n \in \mathbb{N}$, así que $0 \leq n$.

De lo visto concluimos que $\mathbb{N}$ está ordenado parcialmente por la relación $\leq$, lo cual notamos como $(\mathbb{N}, \leq)$ *es un conjunto parcialmente ordenado*.

Además, $\mathbb{N}$ está inferiormente acotado pues 0 es una cuota inferior, y es a la vez el mínimo de $\mathbb{N}$.

Teorema 13. (Tricotomía). Para cualesquiera $m, n \in \mathbb{N}$; se verifica una de las siguientes relaciones y solo una:

(a) $m = n$ (b) $m < n$ (c) $n < m$

Demostración. Sea $m \in \mathbb{N}$ y construyamos los conjuntos

$A_1 = \{m\}$, $A_2 = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x < m\}$ y $A_3 = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge m < x\}$.

Demuéstrese entonces que $\{A_1, A_2, A_3\}$ es una partición de $\mathbb{N}$; esto es $\mathbb{N} = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ y que $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, $A_1 \cap A_3 = \varnothing$ y $A_2 \cap A_3 = \varnothing$.

Dejamos estos detalles como ejercicio.

3.3.4.3. Multiplicación.

Definimos el producto mn como la suma $m + m + ... + m$, n veces; o cuando a m se le adiciona $n-1$ veces el mismo m.

Consideremos la función definida $f_m(p) = p + m$, es decir "suma m a p". Definimos el producto de dos números naturales de la siguiente manera:

(i) $m \cdot 1 = m$

(ii) $m(n+1) = (f_m)^n (m)$

Ejemplo 3.

$$
\begin{aligned}
(f_m)^2 (m) &= f_m[f_m(m)] \\
&= f_m(m+m) \\
&= m + (m+m) \\
&= m \cdot 3
\end{aligned}
$$

Definición 7. El producto de dos números naturales se define inductivamente por las propiedades

(i) $n \cdot 0 = 0$

(ii) $n \cdot 1 = n$

(iii) $m(n+1) = mn + m$

Así,

$$
\begin{aligned}
2 \times 5 = 2 \times 4^+ &= 2 \times 4 + 2 \\
&= 2 \times 3^+ + 2
\end{aligned}
$$

$$= (2 \times 2) + 2 + 2$$

$$= 2 + 2 + 2 + 2 + 2$$

$$= 4 + 4 + 2$$

$$= 6 + 4$$

$$= 8 + 2$$

$$= 4 + 6$$

$$= 2 + 8 \quad \ldots$$

3.3.4.4. Propiedades.

Teorema 14. La multiplicación de números naturales cumple las siguientes relaciones.

Si $n, m, p \in \mathbb{N}$, entonces

(i)	$m \cdot n \in \mathbb{N}$	(Clausura)
(ii)	$n \cdot m = m \cdot n$	(Conmutativa)
(iii)	$m(np) = (mn)p$	(Asociativa)
(iv)	$mp = np \wedge p \neq 0 \Rightarrow m = n$	(Simplificación)
(v)	$(n + p)m = nm + pm$	(Distributiva)

Demostremos algunas de estas propiedades y el resto queda como ejercicio.

Demostración. Sean $p, n \in \mathbb{N}$.

Probemos la distributiva.

Tomemos la condición $\alpha(m) \Leftrightarrow (p + n)m = pn + nm$.

En primer lugar, $\alpha(0)$ se verifica ya que $0 = (p + n)0 = p \cdot 0 + n \cdot 0 = 0 + 0 = 0$.

Además, si k satisface a α, esto es $\alpha(k) \Leftrightarrow (p+n)k = pn+nk$, entonces:

$$\begin{aligned}(p+n) &= (p+n)k + (p+n)\\ &= (pk+nk)+(p+n)\\ &= (pk+p)+(nk+n)\\ &= pk^{+}+nk^{+}.\end{aligned}$$

Luego,

$$(p+n)m = pm+nm, \qquad \forall m \in \mathbb{N}$$

Probemos la conmutatividad. Sea el conjunto definido a continuación:

$$X = \{n \in \mathbb{N} \mid \; nm = mn, \quad dado \quad m\}$$

En primer lugar, probemos que

$$0 \in X$$

Esto es,

$$0m = m0$$

$$m = (0+0)m = 0m+0m$$

Entonces,

$$0m+0m = 0m+0$$

Simplificando,

$$0m = 0$$

Por lo tanto,

$$0m = m0 = 0$$

Tomemos $k \in X$, esto es $km=mk$; ahora,

$$\begin{aligned} k^{+}m &= (k+1)m = km + m \\ &= mk + m \\ &= mk^{+} \end{aligned}$$

Esto prueba la conmutatividad.

3.3.4.5. Múltiplos y potencias.

Definición 8. Definimos por recurrencia la potencia n de a ;

(i) $a^0 = 1$, si $a \neq 0$

(ii) $a^1 = a$

(iii) $a^{k+1} = a^k a$

Definición 9. Los múltiplos de a se definen:

$0a = 0$

$1a = a$

$k^{*}a = (k+1)a = ka + a$

Ejemplo 4.

$2a = (1+1)a = a + a$

$3a = (2+1)a = 2a + a = a + a + a$

Además,

$a^2 = a^1 \cdot a^1 = a^1 \cdot a = a \cdot a$

$a^3 = a^2 a = aaa$

3.3.4.6. Orden multiplicativo.

Definición 10. Dados $m, n \in \mathbb{N}$, diremos que m es múltiplo de n si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $kn = m$.

Definición 11. Diremos que p es divisor de m si y solo si m es múltiplo de p.

Notación: $a \mid b \Leftrightarrow a$ es divisor de b.

Teorema 15. La relación $\mid$ es una relación de orden en $\mathbb{N} - \{0\}$, esto es

(i) Si $n \neq 0$, $n \mid n$

(ii) $n \mid m \wedge m \mid p \Rightarrow n \mid p$

(iii) $n \mid m \wedge m \mid n \Rightarrow m = n$

Demostración:

Para (i) $n \cdot 1 = n \Rightarrow$ existe $k = 1$ tal que $nk = n$.

Para (ii) $n \mid m \wedge m \mid p$, existen entonces enteros k_1 y k_2 tales que $k_1 n = m$ y $k_2 m = p$. Sustituyendo entonces m por $k_1 n$ se obtiene

$$k_2 (k_1 n) = p$$

Esto es $(k_2 k_1) n = p$ y $k_2 k_1 \in \mathbb{N}$

Si $k_2 k_1 = k$, obtenemos $kn = p$, es decir $n \mid p$.

Para (iii), $n \mid m$ y $m \mid n$ implica que

$$(\exists k_1)\ (k_1 n = m) \wedge (\exists k_2)\ (k_2 m = n)$$

Por lo tanto, $k_2 (k_1 n) = n$ y $(k_2 k_1) n = n = 1n$

Entonces, al simplificar:

$$k_2 k_1 = 1$$

Esto implica $k_2 = k_1 = 1$, y entonces $n = m$.

Teorema 16. Sean $m, n, p \in \mathbb{N}$. Si $p \mid m \wedge p \mid n$, para cualesquiera $x, y \in \mathbb{N}$ se cumple que $p \mid (xm + yn)$.

Demostración:

$p \mid m \wedge p \mid n$ implica que $(\exists k)(m = kp) \wedge (\exists j)(n = jp)$. Si x, y son cualesquiera elementos de $\mathbb{N}$, entonces $mx + ny = kpx + jpy = (kx + jy)p$. Por consiguiente, $p \mid (xm + yn)$.

Los siguientes teoremas pueden demostrarse fácilmente a manera de ejercicios.

Teorema 17. Si m |a y m |b, entonces m divide a la suma (a + b).

Teorema 18. Si m divide a y m divide b, entonces m divide al producto ab.

Definición 12. (Máximo común divisor). Si $m, n \in \mathbb{N}$, diremos que $p \in \mathbb{N}$ es el máximo común divisor de m y n si se cumplen las siguientes condiciones.

(i) $p \mid m \wedge p \mid n$.

(ii) $q \mid m \wedge q \mid n \Rightarrow q \mid p$.

Notación. Notar el máximo común divisor de m y n por $mcd(m, n)$.

Ejemplo 5. $mcd(20, 30) = 10$ ya que $10 \mid 20$, $10 \mid 30$ y todo divisor a la vez de 20 y 30 es divisor de 10.

Corroboremos esto. El conjunto de divisores de 20 es

$$D_{20} = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}.$$

El conjunto de divisores de 30 es

$$D_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 30\}.$$

El conjunto de divisores comunes es

$$D_{20} \cap D_{30} = \{1, 2, 5, 10\}.$$

Así, todo divisor común de 20 y 30 es divisor de 10.

Definición 13. Dos números naturales m y n son primos relativos si su máximo común divisor es 1.

Ejemplo 6. 3 y 4 son primos relativos.

Definición 14. Un número natural p se denomina *primo* si solo tiene dos divisores. Esto es, su conjunto de divisores es un par.

Como $1 \mid p \wedge p \mid p$, se deduce que p es primo si y solamente si $D_p = \{1, p\}$.

Definición 15. Un conjunto de números $\{n_1, n_2, ..., n_k\}$ se denomina *conjunto de factores de un número dado* m, si $m = n_1 n_2 ... n_k$. Cada elemento del conjunto de factores de m se denomina un *factor de* m.

Nótese que cada factor pertenece a un *conjunto no singular* que cobija a dos o más divisores del número, por lo cual un divisor es un *candidato a factor* pues requiere compañía.

Ejemplo 7. 2 es un divisor de 20 pero se convierte en factor de 20 cuando se acompaña del 10. El conjunto $\{2, 10\}$ es un conjunto de factores de 20 ya que $20 = 2 \times 10$; $\{4, 5\}$ es otro conjunto de factores de 20 en el cual no aparece 2.

Definición 16. Un número m se dice *primario* si existen un número primo p y un número $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$m = p^n.$$

Todo número primo es primario, pero no todo número primario es primo.

Ejemplo 8. 1 es un número primario porque $1 = 2^0$, $16 =$ 2^4. Por lo tanto, 16 es un número primario.

Definición 17. Se define la *función factorial* de la siguiente manera recurrente:

$$f(0)=1,$$

$$f(1)=1,$$

$$f(n+1)=(n+1)f(n).$$

Denominamos $f(n)=n!$ como *el factorial de* n.

Ejemplo 9. $0!=1$,

$$1!=1,$$

$$2!=f(2)=2f(1)=2\times 1,$$

$$3!=f(3)=3f(2)=3\times 2\times 1=6,$$

$$4!=f(4)=4f(3)=4\times 3\times 2\times 1=24,$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$(n+1)!=f(n+1)=(n+1)f(n)=(n+1)n!.$$

3.3.5. El principio de buena ordenación y el Teorema Fundamental de la Aritmética.

Definición 1. Un conjunto A parcialmente ordenado se dice *bien ordenado* si cada subconjunto no vacío de A tiene elemento mínimo.

Teorema 1. El conjunto $(\mathbb{N},\leq)$ es bien ordenado.

Demostración. Consideremos $A\neq\varnothing$ y $A\subseteq\mathbb{N}$. Si $A=\mathbb{N}$, el elemento mínimo es 0.

Supongamos $A\neq\varnothing$, $A\neq\mathbb{N}$, $A\subset\mathbb{N}$ y $E_n=\{0,1,2,\ldots,n-1\}\subset\mathbb{N}$ donde $(n-1)^+=n$ y $X=\{n\in\mathbb{N}:\ E_n\subset\mathbb{N}-A\}$.

Observamos que

a. $n\in X\Rightarrow n\in A^c=\mathbb{N}-A\Rightarrow n\notin A.$

b. $\quad Si\ n \in X \wedge m \leq n-1 \Rightarrow m \notin A.$

Si $0 \in A,$ el teorema estaría demostrado, pues 0 sería el mínimo.

Supongamos que $0 \notin A$, entonces $0 \in A^c$ y el conjunto $B_1 = \{0\} \subset A^c$. Por consiguiente, $0 \in X$.

Además, $X \neq \mathbb{N}$ ya que si $X = \mathbb{N}$, tendríamos

$$\begin{aligned}(\forall n)\left(n \in \mathbb{N} \Rightarrow E_n \subseteq A^c\right) &\Leftrightarrow (\forall n)\left(n \in \mathbb{N} \Rightarrow E_n \cap A = \varnothing\right)\\ &\Leftrightarrow (\forall n)\left(n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \notin A\right)\\ &\Leftrightarrow \sim (\exists n)\left(n \in \mathbb{N} \wedge n \in A\right)\\ &\Leftrightarrow A = \varnothing.\end{aligned}$$

Pero $A \neq \varnothing$ y tendríamos una contradicción. Por lo tanto, $X \neq \mathbb{N}$.

Probaremos que existe un número natural que pertenece a X, cuyo sucesor no pertenece, esto es $(\exists n)\left(n \in X \wedge n^+ \notin X\right)$.

Supongamos la negación

$$\begin{aligned}\sim (\exists n)\left(n \in X \wedge n^+ \notin X\right) &\Leftrightarrow (\forall n)\left(n \notin X \vee n^+ \in X\right)\\ &\Leftrightarrow (\forall n)\left(n \in X \Rightarrow n^+ \in X\right)\end{aligned}$$

Como $0 \in X$, esto nos lleva, acorde a lo anterior y por inducción, a $X = \mathbb{N},$ lo que contradice el hecho de $X \neq N$.

Consideramos $n \in X \wedge n^+ \notin X$ y probaremos que n^+ es el menor elemento de A.

En primer lugar, como $n \in X$, se tiene que $n \notin A$.

Supongamos que $n^+ \notin A$. Esto es $n^+ \in A^c$ y en consecuencia, el conjunto $B_{n^+} = B_n \cup \{n^+\} \subset A^c$; lo que implica $n^+ \in X$, pero $n^+ \notin X$. Entonces $n^+ \in A$.

Supongamos que exista $k \in A$ tal que $\sim\left(n^+ \leq k\right)$, esto es $k < n^+$. Entonces $k \in E_n$ y, por lo tanto $k \notin A$. Pero $k \in A$, y en consecuencia para todo

$k \in A$, se cumple $n^+ \leq k$. Como $n^+ \in A$, se concluye que n^+ es el mínimo de A.

Teorema 2. (Segundo principio de inducción). Sea $X \subseteq \mathbb{N}$ tal que dado $n \in \mathbb{N}$. Si el hecho de que todos los números naturales menores que n pertenezcan a X implica que $n \in X$, entonces $X = \mathbb{N}$.

Demostración. Sea $Y = \mathbb{N} - X$. Si $Y \neq \varnothing$, existiría un elemento mínimo $m \in Y$ y $(\forall n)(n \in \mathbb{N} \wedge n < m \Rightarrow m \in X)$, entonces $m \notin X$ y $(\forall n)(n \in Y \Rightarrow m \leq n)$. Por consiguiente, $(\forall n)(n \notin X \Rightarrow m \leq n) \wedge m \notin X$. Por lo tanto, por contraposición $(\forall n)(n < m \Rightarrow n \in X) \wedge m \notin X$.

Entonces, por definición de X, $m \in X \wedge m \notin X$. Por lo tanto, $Y = \varnothing$. En consecuencia, $X = \mathbb{N}$.

Teorema 3. (Teorema Fundamental de la Aritmética). Todo número natural $n \neq 0$ diferente de cero se descompone de manera única (salvo el orden) como un producto $n = p_1 p_2 \cdots p_k$ de factores primos no necesariamente diferentes.

Demostración. Si n es primo, entonces $n = 1 \times n$ y no hay que demostrar.

Supongamos que n no es primo y que todo número menor que n puede descomponerse como un producto de la manera prescrita. Entonces, existen números m, k tales que $m < n$ y $k < n$ y $n = mk$.

Pero $m = 1 p_1 p_2 ... p_j$ donde los factores p_i son primos, y $k = 1 q_1 q_2 ... q_r$ donde los factores son primos. En consecuencia, $n = 1 p_1 p_2 ... p_j q_1 q_2 ... q_r$, lo que prueba que n es producto de primos. Por el segundo principio de inducción, todo número natural es producto de primos.

Para probar la unicidad, demostremos el siguiente lema.

Lema 1. Si p es un número primo y $p \mid ab$, entonces $p \mid a \vee p \mid b$.

Demostración. Supongamos que p primo, p no es divisor de a y p no es divisor de b, según la parte demostrada del teorema. $a = p_1 p_2 ... p_k$ y $b = q_1 q_2 ... q_r$ donde los factores son primos; como p no divide a a y cada p_i es divisor de a, entonces $p \neq p_i$ para cada $i \in \{1, 2, ..., k\}$, y análogamente, $p \neq q_j$ para $j \in \{1, 2, ..., r\}$. Entonces, $ab = p_1 p_2 ... p_k q_1 q_2 ... q_r$ y p no es divisor de ab.

Probemos la unicidad. Supongamos dos representaciones de a como producto de primos, es decir $a = p_1 p_2 p_2 ... p_n = q_1 q_2 q_3 ... q_n$. Los conjuntos $\{p_1, p_2, ... p_k\}$ y $\{q_1, q_2, ... q_r\}$ son diferentes de $\varnothing$, y por el teorema de buena ordenación, cada uno de ellos tiene un elemento mínimo. Asumamos que el mínimo del segundo conjunto es q_1, el cual es divisor primo de a y por tanto divisor de $p_1 p_2 ... p_k$. Por el Lema 1, q_1 es divisor de al menos uno entre $p_1, p_2, ... p_k$ y por lo tanto, al ser estos primos, debe ser igual a uno de ellos que debe ser el mínimo, digamos p_1. Así, $q_1 = p_1$ y

$$p_1 p_2 ... p_n = p_1 q, ... q_n.$$

En consecuencia,

$$p_2 ... p_n = q_2, ... q_n.$$

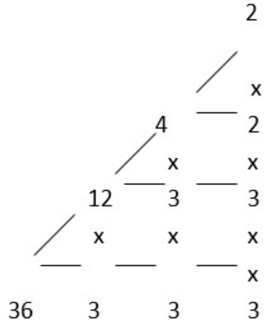
Continuando el razonamiento bajo las consideraciones anteriores, probamos que cada q_j es igual a un correspondiente p_j, lo que prueba la unicidad.

Si utilizamos las propiedades conmutativa y asociativa de la multiplicación de manera reiterada, podemos expresar los factores primos repetidos como potencias; esto es, como números primarios. Podemos expresar una variante del teorema de la siguiente manera.

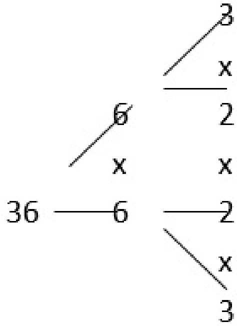
Todo número natural es producto de factores primarios.

Ejemplo 1. Expresemos el número 36 como producto de factores primos.

(a)



b)



En ambos casos, $36 = 3^2x2^2 = 1x\ 3x3x2x2$.

Conclusión. Hemos construido un sistema constituido por el siguiente conjunto de objetos

$$(\mathbb{N}, +, \leq, \times, |)$$

al cual denominaremos *sistema de los números naturales*. Este sistema es el que se utiliza en parte por la mayoría de las personas para los cálculos cotidianos, y decimos en parte porque comúnmente nos limitamos a sumar, restar cuando fuere posible, multiplicar y dividir. Lo restante solo es utilizado por un número más reducido de personas cuyas actividades requieren otro tipo de matemáticas.

Tal vez algunos se preguntarán por qué la sustracción y la división no entran en el sistema anterior. Pero mejor preguntémonos si estas son en realidad operaciones en el conjunto de los números naturales.

APÉNDICE 1. CARDINALES INFINITOS Y CONJUNTOS ENUMERABLES

Los conjuntos de la forma $\{1,2,...,n\}$ son finitos como puede probarse fácilmente y estos conjuntos son equipotentes a los conjuntos $\{0,1,2,3,...,n-1\}$. De acuerdo con nuestra construcción, establecemos que tienen el mismo cardinal n, el cual en este caso es un número natural. Además, se tiene que si $A=\{0,1,2,3,...,n\}$ y $B=\{1,2,3,...,n,n+1\}$, entonces $A \prec B$, con lo que $n < n+1$.

Esto nos permite la siguiente definición.

Definición 2. Un cardinal a es finito si y solo si $a < a+1$.

Como los números naturales cumplen esta condición, podemos decir que *todo número natural es un cardinal finito*.

Además, si $A \approx \{1,2,...,n\}$ para algún natural n, entonces A es finito.

Podemos dar la siguiente definición.

Definición 3. Un conjunto A es finito si es equipotente con algún subconjunto $E_n = \{1,2,...,n\}$ de los números naturales.

Con este tratamiento pueden probarse muchos teoremas acerca de conjuntos finitos e infinitos.

Definición 4. Un cardinal a es infinito, si y solo si $a = a+1$.

Podemos, de cierta forma, identificar los naturales con los cardinales finitos.

Definición 5. Un conjunto A se dice *enumerable* si $A \approx \mathbb{N}$.

Resulta claro que un conjunto enumerable es infinito, por lo que algunos los denominan *infinitos enumerables*.

Definición 6. Un conjunto A se dice *contable* si es o finito o infinito enumerable.

Si A es infinito enumerable es contable, y si A es finito, es contable.

Como $\mathbb{N}$ es infinito, su cardinal no es finito. Este cardinal se denomina *aleph-cero* y su símbolo es
$\aleph_0$.

Todos los conjuntos infinitos enumerables tienen cardinal $\aleph_0$.

Vimos que el conjunto de los números pares es equipotente con $\mathbb{N}$. Así, el cardinal del conjunto de los números pares es $\aleph_0$. Podríamos decir que hay tantos naturales pares como naturales.

Existe toda una gama de conjuntos infinitos enumerables como los números enteros, los números racionales, los números algebraicos; es decir, aquellos que son raíces de ecuaciones polinomiales con coeficientes enteros, etc. La demostración de estos hechos constituye un interesante capítulo de las matemáticas que escapa a nuestro propósito.

APÉNDICE 2. EL PROCESO DE INDUCCIÓN

Debemos distinguir entre un proceso inductivo y la demostración por inducción. El primero es un proceso exploratorio encaminado a formular conjeturas, un proceso heurístico. El segundo es un método para probar una conjetura basada en cierta condición sobre un conjunto bien ordenado, en particular sobre los números naturales.

Ilustremos esta diferencia con un ejemplo. Supongamos interesarnos sobre quién es mayor entre 2^n y $n!$

Iniciemos nuestra exploración:

Para $n = 0$: $2^0 = 1 = 0!$

$n = 1$: $2^1 = 2 > 1 = 1!$

$n = 2$: $2^2 = 4$ y $2! = 2\times 1 = 2 \Rightarrow 2^2 > 2!$

$n = 3$: $2^3 = 8$ y $3! = 3\times 2\times 1 = 6 \Rightarrow 2^3 > 3!$

$n = 4$: $2^4 = 16$ y $4! = 4\times 3\times 2\times 1 = 24 \Rightarrow 2^4 < 4!$

Se cambió el asunto.

$n = 5$: $2^5 = 32$ y $5! = 5\times 4\times 3\times 2\times 1 = 120 \Rightarrow 2^5 < 5!$

Y la diferencia es considerable.

$n = 6$: $2^6 = 64$ y $6! = 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1 = 720 \Rightarrow 2^6 < 6!$

Aumenta la diferencia.

Observamos que a partir de $n = 4$, la tendencia es $2^n < n!$ Esto nos lleva a formular la siguiente conjetura.

Para $n \geq 4$, se cumple $2^n < n!$

Como los ejemplos nada prueban y para verificar la conjetura requeriríamos infinitos ejemplos, acudimos al método de demostración por inducción.

En primer lugar, se verifica la conjetura para el más pequeño elemento considerado, en este caso, $n = 4$, lo que ya se verificó.

Supongamos ahora que la conjetura es satisfecha por un natural $k > 4$, esto es $2^k < k!$ Probemos que la conjetura se verifica para $k^+ = k+1$. Si esto ocurre, entonces la conjetura se verifica para todo $n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 4$.

Veamos:

$2^k < k! \Rightarrow 2^{k+1} = 2 \times 2^k < 2k!$

Pero, $2 < 4 < k < k+1$

Entonces, $2k! < (k+1)k! = (k+1)!$,

Entonces, $2^{k+1} < (k+1)!$

En consecuencia, la conjetura es válida para cualquier $n \geq 4$.

¡No requerimos **una infinidad de ejemplos!**

Ejercicios

1. Demuestre que si es un conjunto infinito y $a \notin A$, entonces $A \cup \{a\}$ es infinito.
2. Demuestre la propiedad de tricotomía de los números naturales.
3. Demuestre que si $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq 0$ y $n \neq 0$, entonces $m + n \neq n$.
4. Demuestre que $mp = np \wedge p \neq 0 \Rightarrow m = n$.
5. Demuestre la ley distributiva de la multiplicación con respecto a la adición de números naturales $m(n+p) = mn + mp$.
6. Demuestre que $(m+n^+)^+ = m^+ + n^+$.
7. Demuestre que $n \mid nm$ para todo $m \in \mathbb{N}$.
8. Demuestre que si $a \neq 0$ y $a = p_1 p_2$, y $a = q_1 q_2$ donde p_1, p_2, q_1, q_2 son números primos, entonces $(p_1 = q_1 \wedge p_2 = q_2) \vee (p_1 = q_2 \wedge p_2 = q_1)$.
9. Demostrar que $p \mid m \wedge p \mid n$; existen $a \in \mathbb{N}$ y $b \in \mathbb{N}$ tales que $p \mid (am + bn)$.
10. Demostrar que $(\forall n)(an = n) \Rightarrow a = 1$.

11. Pruebe que si $n+b=0$ para todo $n\in\mathbb{N}$, entonces $b=0$.

12. Pruebe por inducción matemática:

    a. $(\forall n)\left(n\in\mathbb{N}\Rightarrow n<2^n\right)$

    b. $(\forall n)(n\geq 1)$ se cumple $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

    c. Si $r\neq 1$, entonces $a+ar+ar^2+\cdots ar^n=\dfrac{a\left(r^{n+1}-1\right)}{r-1}$ para $n\geq 0$.

    d. $4\mid\left(5^n-1\right)$ para $n\geq 1$.

    e. $6\mid\left(7^n-1\right)$ para $n\geq 1$.

Test

1. Se define la función $\mathrm{h}:\mathbb{N}\Rightarrow\mathbb{N}$ por $\mathrm{h}(x)=[x]_{\mathrm{mod}\,5}$, entonces:

    A. h es inyectiva.

    B. h es sobreyectiva.

    C. El conjunto de valores de h es $\{0,1,2,3\}$.

    D. $(\forall n)(\mathrm{h}(n)=\mathrm{h}(n+4))$.

2. Si A y B son conjuntos y $\mathrm{f}:A\rightarrow B$ una función, $C\subseteq A$ y $D\subseteq B$, entonces:

    A. Si f es sobreyectiva, $\mathrm{f}\left[\mathrm{f}^{-1}(D)\right]=D$.

    B. Si f es sobreyectiva, $\mathrm{f}^{-1}\left[\mathrm{f}(C)\right]=C$.

    C. Siempre sucede $\mathrm{f}^{-1}\left[\mathrm{f}(C)\right]=C$.

    D. Siempre sucede que $D\subseteq\mathrm{f}\left[\mathrm{f}^{-1}(D)\right]$.

3. Un conjunto parcialmente ordenado A es infinito si:

A. Tiene un elemento mínimo, pero no tiene un elemento máximo.

Entonces:

A. (i) es verdadero y (ii) es verdadero.

B. (ii) y (iii) son ambos verdaderos.

C. (i) y (iii) son ambos verdaderos.

D. (i) es verdadero y (iv) es verdadero.

4. Seleccione la mejor explicación para la siguiente afirmación "*El conjunto de los números naturales es infinito*" porque:

A. Es imposible encontrar un último número natural.

B. No sabemos cuántos naturales hay.

C. Hay números naturales muy grandes imposibles de leer en el sistema decimal como 100000000000000000000000000000000000000010100501.

D. Existe un subconjunto propio de $\mathbb{N}$ que es equipotente a $\mathbb{N}$.

5. Se prueba que para $n \in \mathbb{N}$, $a \neq 0$ y $a \neq 1$ constante, se cumple

$$a^0 + a^1 + a^2 + \cdots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

Usted lo probaría preferentemente:

A. Por inducción matemática.

B. Por el principio de buena ordenación.

C. Mostrando ejemplo para $n = 0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \ldots, 100, \ldots, 1000, \cdots$

D. La mostraría como una ley que no se discute pues ya está probada.

6. Realice la demostración de la proposición anterior mediante el método escogido.

APÉNDICE 3. EL PODER DE LOS SÍMBOLOS: Los numerales del antiguo Egipto.

La consideración de que la historia no es más que la liquidación de un pasado, no parece cumplirse con las matemáticas puesto que estas constituyen una de las ramas más antiguas del pensamiento humano cultivadas de una manera persistente, y a diferencia de otras ciencias, en su ámbito es muy poco lo que habiéndose creado sea descartado luego. En las matemáticas las creaciones más recientes se fundamentan lógicamente en las anteriores, por lo que es necesario entender los resultados antiguos para dominar los nuevos.

Como una muestra de la importancia del lenguaje simbólico, nos referiremos a un sistema utilizado por los antiguos egipcios sin el cual no hubiese sido posible el desarrollo matemático que alcanzaron.

Hace unos 4000 años antes de nuestra era, los antiguos egipcios construyeron un cuerpo de conocimiento matemático que obedeció a cuestiones prácticas o religiosas y que posteriormente utilizaron en observaciones y aplicaciones. Así, los matemáticos egipcios crearon un sistema de notación jeroglífica estructurado en una escala numérica de base diez pero no posicional, que junto con la geometría empírica, muchas de cuyas reglas no eran del todo correctas, les permitió realizar cálculos aplicados al comercio, la administración estatal, la medición de las tierras, la astronomía y la construcción como lo muestran los templos de Karnak y Luxor. En la astronomía destaca la elaboración de calendarios y cálculos para la navegación. En fin, las matemáticas egipcias buscaban facilitar las técnicas, pero no existió preocupación alguna por la búsqueda de un cuerpo teórico; los documentos que soportan lo que se conoce de ellas muestran el uso de fórmulas retóricas para cada problema específico y su elemento principal es el cálculo numérico, aún en la misma geometría.

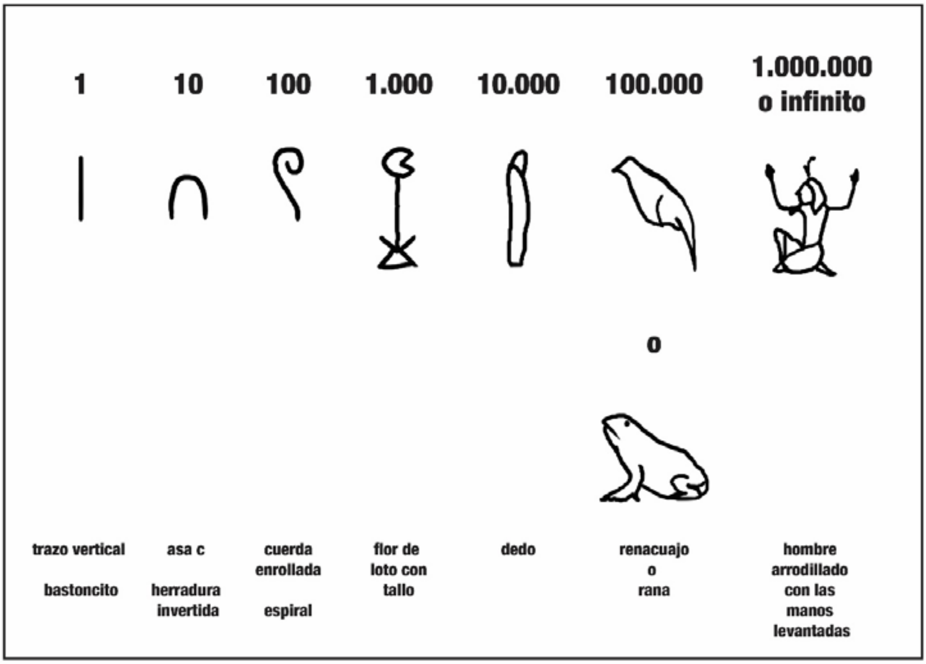
Entre esos documentos se encuentra el Papiro Rhind, denominado así por Henry Rhind, quien lo adquiriera en Luxor en 1858 y luego al morir, lo donaría al Museo Británico. Sin embargo, su autor fue el escriba Ahmes alrededor del siglo XVI a.C. y está basado en escritos mucho más antiguos.

Este papiro contiene una colección de 87 problemas matemáticos que comprenden problemas aritméticos inclusive con fracciones, ecuaciones lineales, cálculo de áreas y de volúmenes, repartos proporcionales y algo de trigonometría. Está escrito con símbolos *hieráticos,* una representación a trazos de las palabras, y los numerales, que difieren de la escritura *jeroglífica*, reúnen símbolos icónicos que representaban las expresiones lingüísticas y las cantidades.

La numeración jeroglífica

A continuación ilustramos los símbolos jeroglíficos con los cuales los antiguos egipcios representaban los números mediante un sistema aditivo de numeración decimal no posicional, y realizaban sus cálculos como sumas, sustracciones, multiplicaciones, divisiones y resolución de algunas ecuaciones lineales.

El estudio de los métodos egipcios de numeración se inició con Jean-François Champollion, Thomas Young y sucesores. Durante la expedición napoleónica a Egipto, Champollion inició los estudios para traducir los jeroglíficos merces a una triple inscripción hallada en una piedra, la cual además de los jeroglíficos contenía otras lenguas antiguas ya estudiadas. Los demás continuaron su labor hasta determinar la interpretación de la simbología egipcia y llevarla al grado en que hoy se encuentra. Los numerales egipcios constituyen una muestra del simbolismo numérico que permitió a este pueblo realizar los cálculos y resolver problemas relacionados con las actividades que mencionamos arriba.



Numerales jeroglíficos

Como ejemplos de representación mostramos lo siguiente:

3 000+200+30+2=3.232

1 000 000+30+1 000+100=1 001 130

Es de notar que este sistema de numeración no es posicional como el nuestro: la posición de los símbolos no es trascendental como lo muestra el último ejemplo. Además, no se requería un símbolo para el cero, ni intermedio ni al final, pues 20 se escribía como

103 como

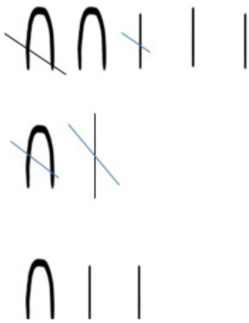
Operaciones aritméticas

La adición egipcia consistía en reunir símbolos y agruparlos en secciones consistentes de diez de uno de ellos, para sustituirlos por el símbolo inmediato en la jerarquía ascendente.

Por ejemplo, la adición 37+45 se ejecutaría así:

Al agregar 5 a 7 se obtiene 10+2. Así, 37+45=82.

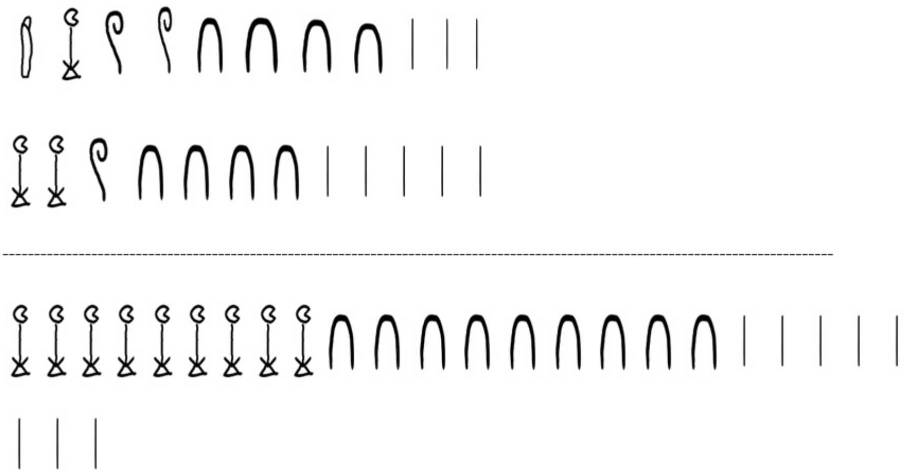
La sustracción consistía en eliminar del minuendo los similares del sustraendo. Por ejemplo, 23-11 sería:



Un ejemplo de sustracción "llevando" se da en el cuadro que sigue, en donde se efectúa la sustracción 11243-2145=9098 de la siguiente manera:

- Diez mil del minuendo se sustituye por diez miles y entonces habrá once miles, a los cuales se les sustrae dos miles quedando nueve miles.
- A dos cientos se le sustrae un y queda un ciento.
- Cuatro dieces se eliminan con cuatro dieces y queda un ciento y tres.
- El ciento se transforma en diez dieces, de los cuales uno se agrega a tres para obtener nueve dieces y trece.
- A los trece se le sustraen 5, entonces tendremos ocho.
- En consecuencia, queda nueve miles, ningún ciento, nueve dieces y ocho.

Nos preguntamos en qué se diferencia esto de lo que hacemos hoy.



La representación hierática

Este tipo de escritura sustituyó a la jeroglífica ante la necesidad de escribir con mayor fluidez al utilizar papiros. Se buscaba agilizar la escritura con trazos lo más continuos posibles simplificando y agilizando los símbolos jeroglíficos. Este tipo de escritura se utilizó en algunos papiros como el mencionado de Ahmes o el Papiro de Moscú que se encuentra en el museo de esta ciudad.

El siguiente cuadro muestra la representación de algunos números en notación hierática extraída de alguno de estos papiros.

A manera de reflexión, imaginemos cómo hubiesen hecho los egipcios para representar números grandes y manipularlos aritméticamente sin la invención de estos numerales. ¿Tiene validez el pensamiento de Whitehead que encabeza el Capítulo 1?

Esperamos que el lector saque sus conclusiones.

Bibliografía

1. ARTIGUE, M. (1990). Épistémologie et didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *10*(2,3), 241-286.

2. AZCÁRATE, C. y DEULOFEU, J. (1995). *Funciones y gráficas*. Madrid, España: Síntesis.

3. BALDOR, A. (1941). *Álgebra*. México: Grupo Editorial Patria.

4. BELL, E. (1937). *Men of Mathematics*. Segunda edición: 1986. New York, NY, Estados Unidos: Simon and Schuster.

5. BROUSSEAU, G. (2002). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*; *Didactique des Mathématiques*, 1970-1990. Dordrecht, Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.

6. BUNGE, M. (1972). *Epistemología*. México y Argentina: Siglo XXI.

7. CARROLL, L. (1876). *El juego de la lógica*. Alianza Editorial.

8. CHEVALLARD, Y. (1985). *La transposition didactique*. Grenoble, Francia: La Pensée Sauvage.

9. D'AMORE, B. (2001). *Una contribución al debate sobre conceptos y objetos matemáticos*. *Uno, 27*, 51-76. Barcelona, España.

10. DE SAUSSURE, F. (1945). *Curso de Lingüística General*. Publicado por Charles Bally y Albert Sechehaye. Traducción de Amado Alfonso, vigésima cuarta edición. Buenos Aires, Argentina: Editorial Losada.

11. DEVLIN, K. (2002). *El lenguaje de las matemáticas*. Traducción de Pedro Crespo. Barcelona, España: Ediciones Robinbook.

12. DEVLIN, K. (2012). *Introduction to Mathematical Thinking*. Recuperado de https://profkeithdevlin.org

13. DURST, L., K. (1969). *The Grammar of Mathematics*. Reading, MA, Estados Unidos: Addison-Wesley Publishing Company.

14. DUVAL, R. (1993). *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, IREM de Strasbourg, 5, 37-65. Strasbourg, Francia.

15. EULER, L. (1748). *Introductio in Analysin Infinitorum*. Lausana, Suiza. Traducido del latín al inglés por J.D. Blanton como *Introduction to the Analysis of the Infinite*, (1988). Berlín, Alemania: Springer Verlag.

16. GASCÓN, J. (1998). *Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica*. Recherches en Didactique des Mathématiques, *18*(1), 7-33. Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Barcelona, España.

17. GODINO, J. (2003). *Teoría de las funciones semióticas*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Granada, España.

18. GONZÁLEZ TRUJILLO, E. (2012). *Del lenguaje natural al lenguaje algebraico, El significado de las variables, Una propuesta didáctica basada en el planteamiento y resolución de problemas*. Facultad de Ciencias, Universidad Nacional, Bogotá, Colombia.

19. HILL, F. y PETERSON, G. (1974). *Introduction to Switching Theory and Logical Design*. New York, NY, Estados Unidos: John Wiley & Sons, Inc.

20. IVORRA CASTILLO, C. (2015). *Lógica y teoría de conjuntos*. Universidad de Valencia, España. Recuperado de https://www.uv.es/**ivorra**/

21. KLINE, M. (1976). *El fracaso de la matemática moderna. ¿Por qué Juanito no sabe sumar?* México: Siglo Veintiuno Editores. Del inglés *Why Johnny*

Can't Add : The Failure of the New Mathematics (1973). New York, NY, Estados Unidos: St. Martin's Press.

22. KLINE, M. (1992). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*, 3 volúmenes. Madrid, España: Alianza Editorial.

23. MOSTERÍN, J. (1984). *Conceptos y teorías en las ciencias*. Madrid, España: Alianza Editorial.

24. PEANO, G. (1979). *Los principios de la aritmética: expuestos sobre un nuevo método*. Editado, traducido y compilado por Julián Velarde Lombraña. Asturias, España: Pentalfa Ediciones.

25. PEIRCE, CH. (1973). *La ciencia de la semiótica*. Buenos Aires, Argentina: Ediciones Nueva Visión.

26. PENROSE, R. (2006). *El camino a la realidad*. Traducción de Javier García Sanz. México: Random House Mondadori S.A.

27. PIAGET, J. (1967). *Biologie et connaissance: essai sur les relations entre les régulations organiques et les processus cognitifs*. París, Francia: Gallimard.

28. PIAGET, J. y GARCÍA, R. (1987). *Hacia una lógica de las significaciones*. México: GEDISA.

29. PIAGET, J. (1964). *Seis estudios de psicología*. Barcelona, España: Planeta-Agostini.

30. PIAGET, J. y BETH, E.W. (1980). *Epistemología matemática y psicología*. Barcelona, España: Editorial Crítica. Edición original: *Épistémologie mathématique et psychologie* (1961). París, Francia: P.U.F. (Presses Universitaires de France).

31. PINTER, CH. (1971). *Set Theory*. Reading, MA, Estados Unidos: Addison-Wesley Publishing Company.

32. SUPPES, P. (1966). *Introducción a la Lógica Simbólica*. México: Compañía Editorial Continental S.A.

33. SUPPES, P. (1968). *Teoría Axiomática de Conjuntos*. Cali, Colombia: Editorial Norma.

34. SUPPES, P. y HILL, S. (1976). *Introducción a la Lógica Matemática*. Barcelona, España: Editorial Reverté.

35. VERGNAUD, G. (1990) *La théorie des champs conceptuels*. Recherches en Didactique des Mathématiques, 4(2), 133-170.

36. VINNER, S. (1991). *The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics*. En TALL, D. (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, 65-91, Dordrecht, Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.

37. WHITEHEAD, A. (1927). *Symbolism, Its Meaning and Effect*. New York, NY, Estados Unidos: Macmillan Company. *El simbolismo. Su significado y efecto*. A partir de las Barbour-Page lectures de la Universidad de Virginia, Estados Unidos. Primera edición en español: 1969. Traducción de César Nicolás Molina Flores, Universidad Autónoma de México, UNAM, México D.F.

Los autores

OSWALDO ENRIQUE DEDE MEJÍA

Oswaldo Enrique Dede Mejía es profesor de Matemáticas de la Universidad del Atlántico desde hace 50 años. Formado como Licenciado en Matemáticas de la misma universidad, cuenta además con una Maestría en Matemáticas de la Universidad del Zulia. Ha sido Decano de la Facultad de Educación y Director del Departamento de Matemáticas, además de fundador del programa de Matemáticas de la Universidad del Atlántico. Durante todo este tiempo ha dictado un sinnúmero de conferencias y seminarios en el área de las didácticas de las matemáticas, así como de las ecuaciones diferenciales parciales no lineales y el análisis matricial. Ha sido considerado como el Maestro de Maestros de Matemáticas a lo largo de todos estos años, como lo reconoció en su distinción la Universidad de Cartagena en el año 2009. Actualmente, es el líder del Grupo de Matemáticas Aplicadas de la Universidad del Atlántico.

Ph.D. MIGUEL ANTONIO CARO CANDEZANO

Ph. D. en Ciencias de la Computación y Matemáticas Computacionales de la Universidad de Sao Paulo-Brasil. Terminó el pregrado y la Maestría en Matemáticas Aplicadas e Informática en la Universidad Rusa de la Amistad de los Pueblos. Durante más de 20 años se desempeñó como profesor de computación del Instituto Experimental del Atlántico. Desde 1998 es profesor del Departamento de Matemáticas de la Universidad del Atlántico. Sus áreas principales de estudio son la mecánica de fluidos computacional, así como el análisis numérico. Ha llevado su experiencia en la enseñanza de la computación, con énfasis en la matemática en la escuela secundaria, a seminarios dirigidos a los docentes de educación media en esta área.

Ph.D. CARLOS ARAÚJO MARTÍNEZ

Licenciado en Matemáticas y Física de la Universidad del Atlántico. Magíster en Matemáticas y Doctor en Matemáticas de la Universidad de Puerto Rico. Profesor durante varios años en las áreas del álgebra y combinatoria en la Facultad de Ciencias Básicas de la Universidad del Atlántico, en las que ha desarrollado su producción científica. Además, ha sido docente de matemáticas por varios años en la escuela secundaria.