El estudio de los polinomios de Appell y de las matrices tipo Pascal han progresado paralelamente desde su aparición. Sus avances van ligados a la aplicación de diferentes ramas de las matemáticas como Teoría de Número, Funciones Especiales, etc, de manera que muchos problemas de estas disciplinas se plantean en términos del estudio analítico y algebraico de estos polinomios y matrices.

La nueva familia de polinomios generalizados tipo Apostol Frobenius-Euler y su enfoque matricial introducidos en esta obra, están en el marco de los polinomios tipo Appell y las matrices tipo Pascal, de ahí que su estudio sea de interés para los estudiantes e investigadores en esta rama de las matemáticas. Nuevos problemas y aplicaciones pueden ser objeto de estudio a partir de esta familia de polinomios y matrices.

La obra está centrada en las propiedades técnicas del análisis real y complejo, así como el estudio detallado de algunas generalizaciones de este tipo, necesarias para introducir la nueva familia de polinomios tipo Apostol Frobenius-Euler y las matrices tipo Pascal asociadas.

Escanée el código QR para conocer más títulos publicados por el Sello Editorial Universidad del Atlántico

ISBN 978-958-5525-76-4

Universidad del Atlántico

Una extensión. Nueva familia de polinomios generalizados tipo Apostol Frobenius-Euler

Alejandro Urieles - María José Ortega - William Ramírez

Sello Editorial UNIVERSIDAD DEL ATLÁNTICO

Una extensión.

Nueva familia de polinomios generalizados tipo Apostol Frobenius-Euler

Algunas aplicaciones

Alejandro Urieles - María José Ortega
William Ramírez

Una extensión.

Nueva familia de polinomios generalizados

tipo Apostol Frobenius-Euler

Algunas aplicaciones

Alejandro Urieles - María José Ortega
William Ramírez

Universidad del Atlántico

Una extensión. Nueva familia de polinomios generalizados tipo Apostol Frobenius-Euler

Algunas aplicaciones

Alejandro Urieles - María José Ortega
William Ramírez

Sello Editorial
UNIVERSIDAD DEL ATLÁNTICO

Catalogación en la publicación. Universidad del Atlántico. Departamento deBibliotecas

Urieles Guerrero Alejandro

Una extensión. Nueva familia de polinomios generalizados tipo Apostol Frobenius-Euler. Algunas aplicaciones / Alejandro Urieles Guerrero, María José Ortega, William Ramírez -- Barranquilla: Sello Editorial Universidad del Atlántico, 2018.

103 páginas. 17x24 cm

Ilustraciones

Incluye referencias bibliográficas.

ISBN 978-958-5525-76-4 (Libro descargable PDF)

1. Polinomios -- Matemáticas-- 2. Funciones especiales -- Matemáticas. I. Ortega Wilches, María José. II. Ramírez Quiroga, William. III. Tit.

CDD: 515.55 U76

Una extensión. Nueva familia de polinomios generalizados tipo Apostol Frobenius-Euler. Algunas aplicaciones.

Autoría: Alejandro Urieles - María José Ortega - William Ramírez

Universidad del Atlántico, 2018

Edición:
Sello Editorial Universidad del Atlántico
Km 7 Vía Puerto Colombia (Atlántico)
www.uniatlantico.edu.co
publicaciones@mail.uniatlantico.edu.co

Producción Editorial:
Calidad Gráfica S.A.
Av. Circunvalar Calle 110 No. 6QSN-522
PBX: 336 8000
info@calidadgrafica.com.co
Barranquilla, Colombia

Publicación Electrónica

Cómo citar este libro:
Urieles, A., Ortega, J. M., & Ramírez, W. (2018). *Una extensión. Nueva familia de polinomios generalizados tipo Apostol Frobenius-Euler. Algunas aplicaciones*. Barranquilla: Sello Editorial Universidad del Atlántico.

Prefacio

El objetivo principal de este libro es describir los resultados de investigación de los autores en el estudio de los polinomios generalizados tipo Apostol Frobenius-Euler de nivel m, buscando una exposición clara con todos los detalles posibles en las demostraciones de los teoremas propuestos como nuevos resultados.

La familia clásica de polinomios Frobenius-Euler ha sido objeto de estudio desde su aparición; algunas generalizaciones han sido planteadas, pero son las extensiones tipo Apostol a las que se les ha mostrado más interés. Por otra parte, las matrices tipo Pascal han tenido un desarrollo en teoría de número, enfoque que condujo al planteamiento de sus generalizaciones y aplicaciones.

En la presente exposición se da una visión panorámica de algunas clases de extensiones tipo Apostol conocidas y de algunas generalizaciones de matrices tipo Pascal. Una orientación, de algunos métodos clásicos en las investigaciones propias de estos temas son presentados para llegar así al planteamiento de una nueva familia de polinomios generalizados tipo Apostol Frobenius-Euler de nivel m y una nueva familia de matrices polimoniales tipo Pascal, definida en el contexto de esta familia de polinomios. Los problemas de factorización con otro tipo de matrices de estructura similar, propiedades e inversa de la misma matriz son desarrolladas.

Los autores expresan su más sincero agradecimiento a la Universidad del Atlántico por su constante ayuda, lo que hizo posible la realización de este libro.

Los autores

Contenido

Introducción

El estudio de los polinomios tipo Apostol comenzó en 1951 y fue gracias a T. M . Apostol [1] quien propuso un nuevo conjunto de polinomios $\mathfrak{B}_n(x;\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, que resultan ser una generalización de los números de Bernoulli. Estos nuevos polinomios están relacionados con la función Zeta de Lerch $\phi(x,a,s)$ a través de la expresión

$$\phi(x,a,-n) = -\frac{\mathfrak{B}_{n+1}(a,e^{2\pi x i})}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

donde $\mathfrak{B}_{n+1}$ son llamados polinomios de Apostol-Bernoulli.

Desde el trabajo de T.M. Apostol [1], algunos matemáticos comenzaron la tarea de generalizar otros polinomios y números con estructuras análogas a los clásicos dados por Bernoulli, entre ellos los introducidos por Euler y Genocchi. Estos polinomios y números son de fundamental importancia en el cálculo de las diferencias finitas y tienen variadas aplicaciones en otros campos como la Estadística, Teoría Combinatoria, Teoría de Números, Geometría Diferencial, Topología Algebraica y Análisis Numérico. Por ello, han sido ampliamente estudiados [2, 18, 19, 20, 24].

En 2012 Tremblay et al. [34], introducen dos clases de polinomios, los de Apostol-Euler generalizados $\mathcal{E}_n^{[m-1,\alpha]}(x;b,c;\lambda)$ de nivel m y Apostol-Genocchi generalizados $\mathcal{G}_n^{[m-1,\alpha]}(x;b,c;\lambda)$ de nivel m, donde $m \in \mathbb{N}$, $\alpha,\lambda \in \mathbb{C}$ y $b,c \in \mathbb{R}^+$, con las siguientes formas:

$$\left(\frac{2^m}{\lambda b^z + \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(z\log b)^l}{l!}}\right)^{\alpha} c^{xz} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{E}_n^{[m-1,\alpha]}(x;b,c;\lambda)\frac{z^n}{n!}, \quad |z\log b| < |\log(-\lambda)|. \tag{2}$$

$$\left(\frac{(2z)^m}{\lambda b^z + \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(z\log b)^l}{l!}}\right)^{\alpha} c^{xz} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{G}_n^{[m-1,\alpha]}(x;b,c;\lambda)\frac{z^n}{n!}, \quad |z\log b| < |\log(-\lambda)|. \tag{3}$$

En 2015 en el trabajo "About Extensions of Generalized Apostol-type polynomials" [10] se propone una nueva familia de polinomios tipo Apostol generalizado, que resulta ser una generalización de todas las familias de polinomios tipo Apostol conocidas hasta la fecha. Para parámetros $\alpha, \lambda, u, v \in \mathbb{C}$ con $b, c \in \mathbb{R}^+$, la nueva clase de polinomios tipo Apostol generalizados $Q_n^{[m-1,\alpha]}(x;b,c;\lambda;u,v)$ de orden α es dada por la siguiente función generatriz:

$$\left(\frac{(2^u z^v)^m}{\lambda b^z + \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(z\log b)^l}{l!}}\right)^{\alpha} c^{xz} = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n^{[m-1,\alpha]}(x;b,c;\lambda;u,v)\frac{z^n}{n!}, \tag{4}$$

donde $|z|<2\pi$ cuando $\lambda=1$, $|z|<\pi$ $\lambda=-1$, $\left(\left|z\log\left(\frac{b}{a}\right)\right|\right) < |\log(-\lambda)|$, cuando $\lambda \in \mathbb{C}-\{-1,1\}$.

En el mencionado trabajo se dieron varios aportes como son: fórmulas de conexión entre los polinomios $Q_n^{[m-1,\alpha]}(x;b,c;\lambda;u,v)$ y los polinomios de Genocchi $G_n(x)$, polinomios de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, polinomios de Bernoulli generalizados $B^{[m-1,\alpha]}(x)$ y los polinomios de Laguerre $L_n^{(\alpha)}(x)$.

Por otra parte, J. Choi et al. (ver [5, p. 2, Ec. (1.4)]), en el 2012 introducen una generalización de los polinomios de Euler clásicos [11, p. 1, Ec. (1.2)], llamados polinomios de Frobenius-Euler $H_n(x;u)$, donde $u \in \mathbb{C}$, dados por la siguiente función generatriz:

$$\left(\frac{1-u}{e^z-u}\right)e^{xz}=\sum_{n=0}^{\infty}H_n(x;u)\frac{z^n}{n!},\qquad |z|<|\ln u|. \tag{5}$$

En el 2013 ([4, p. 1, Ec. (1.1)]), se introducen los polinomios tipo Apostol Frobenius-Euler $H_n(x;\lambda;u)$, con $\lambda \in \mathbb{C}$, a través de la siguiente forma:

$$\left(\frac{1-u}{\lambda e^z-u}\right)e^{xz}=\sum_{n=0}^{\infty}H_n(x;\lambda;u)\frac{z^n}{n!},\qquad |z|<\left|\ln\left(\frac{u}{\lambda}\right)\right|. \tag{6}$$

Recientemente, Kurt y Simsek estudian propiedades de los polinomios tipo Apostol Frobenius-Euler generalizados que se definen mediante la siguiente función generatriz (ver [12]):

$$\left(\frac{a^z-u}{\lambda b^z-u}\right)^{\alpha}c^{xz}=\sum_{n=0}^{\infty}H_n^{(\alpha)}(x;a,b,c;\lambda;u)\frac{z^n}{n!}\qquad |z|<\left|\frac{\ln\left(\frac{u}{\lambda}\right)}{\ln(b)}\right|. \tag{7}$$

Con base en los trabajos presentados en [4, 5, 11] y siguiendo las ideas dadas [10], se presenta una unificación de las familias de polinomios tipo Apostol Frobenius-Euler generalizados mediante la adición de nuevos parámetros. Entonces, se puede probar que esta nueva clase de polinomios conservan algunas propiedades algebraicas y diferenciales similares a los polinomios tipo Apostol y como consecuencia, se recuperan algunas propiedades algebraicas y diferenciales conocidas de tales polinomios. Adicionalmente, como una aplicación introducimos un tipo de matriz asociada a esta nueva clase de polinomios en el marco de las matrices tipo Pascal.

El trabajo está constituido por tres capítulos que se describen a continuación.

El capítulo 1 es de carácter introductorio. Contiene conceptos y resultados generales acerca de series de Taylor, función generatriz, manipulación de sumatorias, función Gamma, el símbolo de Pochhammer y se introducirán los números de Stirling. Además se mostrarán familias de polinomios Frobenius-Euler, polinomios de Genocchi, polinomios de Apostol-Euler y polinomios de Bernoulli generalizados de nivel m que más adelante se utilizarán para abordar el problema de estudio.

En el capítulo 2 se introducen los polinomios tipo Apostol Frobenius-Euler generalizados y se hace un resumen de las distintas generalizaciones de dichas familias de polinomios, al igual que se explican algunos de los resultados más importantes de estos polinomios que serán de gran utilidad en el siguiente capítulo. Además, se mostrará la matriz polinomial de Bernoulli y sus respectivas propiedades.

El capítulo 3 es dedicado a introducir la nueva familia de polinomios generalizados tipo Apostol Frobenius-Euler de nivel m denotados por, $\mathcal{H}_n^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u)$, se establecen algunas propiedades, incluida la fórmula de recurrencia y las ecuaciones diferenciales que satisfacen. Además, se mostrarán fórmulas de conexión entre estos y los polinomios de Genocchi, los polinomios de Jacobi, los polinomios de Bernoulli generalizados $B_n^{[m-1]}(x)$ de nivel m y los números de Stirling de segunda especie. También, se introduce la matriz polinomial de los polinomios $\mathcal{H}_n^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u)$ y se mostrarán algunas propiedades de estas matrices. Finalmente, se presentan las conclusiones a las que se llegaron en esta investigación.

Capítulo 1

Familias de polinomios asociadas a su función generatriz y matrices tipo Pascal

Este capítulo trata sobre conceptos conocidos de funciones generatrices de algunas familias de polinomios, requeridos para poder trabajar adecuadamente y dar una serie de resultados propuestos en los siguientes capítulos. Así como también, se darán conceptos y propiedades de las matrices tipo Pascal y otras matrices con estructura similar.

1.1 Definiciones y resultados básicos

En esta sección se revisan algunos conceptos y propiedades relativos a: función generatriz, función Gamma y números de Stirling de segunda clase.

Para $z, z_0 \in \mathbb{C}$, $R_0 > 0$ y $f(z)$ una función analítica en un disco $|z - z_0| < R_0$, se define su representación en serie de potencias llamada serie de Taylor por (ver [37])

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < R_0,$$
$$\text{donde } a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{1.1}$$

Son de especial interés aquellas series de Taylor que nos expresan una función a partir de su valor en el origen, esto es $z_0 = 0$ y se conocen como serie de Maclaurin de f (cf. [37])

$$f(z) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n, \quad |z| < R_0. \tag{1.2}$$

Sea $f(z)$ una función de variable compleja infinitamente diferenciable en un entorno $z_0 = 0$, si la sucesión de números complejos $\{g_n\}_{n\geq 0}$ está determinada como la sucesión de coeficientes de la serie de Maclaurin asociada a $f(z)$, entonces la función $f(z)$ es llamada función generatriz de los números $\{g_n\}_{n\geq 0}$ y se denota (cf. [17])

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n. \tag{1.3}$$

Para $z \in \mathbb{C}$, $\Re(z) > 0$ se define la función Gamma $\Gamma(z)$ por la integral (ver [33, p. 14, Ec. (1.7.1)])

$$\Gamma(z) = \int_o^{\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt. \tag{1.4}$$

Dado $z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$, el símbolo de Pochhammer se define por (ver [15]):

$$(z)_n = z(z+1)(z+2)\cdots(z+n-1); \quad (z)_0 = 1. \tag{1.5}$$

El símbolo de Pochhammer cumple las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} (1)_n &= n!, \\ (z)_n &= \frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(z)} \end{aligned}$$

Sean $z \in \mathbb{C}, q \in \mathbb{Z}$ y $p > -1$ se define la derivada generalizada de orden q como (cf. [23]):

$$\frac{d^q[x-z]^p}{[dx]^q} = \frac{\Gamma(p+1)x^{p-q}}{\Gamma(p-q+1)}$$

En particular, si $z = 0$ se tiene:

$$\frac{d^q x^p}{(dx)^q} = \frac{\Gamma(p+1)x^{p-q}}{\Gamma(p-q+1)}. \tag{1.7}$$

Definición 1.1

Para $n,k \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$ se definen los números de Stirling de segunda clase $S(n,k)$ por las siguientes funciones generatrices:

$$\begin{aligned}
z^n &= \sum_{k=0}^{n} S(n,k)z(z-1)\ldots(z-k+1),\\
(e^z+1) &= k!\sum_{n=k}^{\infty} S(n,k)\frac{z^n}{n!},\\
(1-z)^{-1}(1-2z)^{-1}\ldots(1-kz)^{-1} &= \sum_{n=k}^{\infty} S(n,k)z^{n-k}, \quad |z| < k^{-1}.
\end{aligned}$$

PROPOSICIÓN 1.1.1 *Para $n,k \in \mathbb{N}_0$ los números de Stirling satisfacen la siguiente relación:*

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k} k!\, S(n,k). \tag{1.8}$$

Para ver detalles de la prueba (cf. [30]).

Tenemos ahora, que $S(n,k)$ satisface la siguiente relación de recurrencia, (ver [8, p. 50]):

$$S(n,k) = \sum_{l=k-1}^{n-1} \binom{n-1}{l} S(l,k-1). \tag{1.9}$$

Para números enteros *n,k* con $n \geq k \geq 0$, los números de Stirling de primer tipo *s(n,k)* y de segundo tipo $S(n,k)$ se pueden definir como los coeficientes de la siguiente expansión, (ver [8, p. 50])

$$[x]_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} s(n,k) x^k,$$

y

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)[x]_n. \tag{1.10}$$

Además, $[x]_n$ es el símbolo de Pochhammer dado en (1.5).

Se mostrarán a continuación algunas propiedades relativas a: series, sumas finitas y combinatorio; que se tendrán en cuenta a lo largo de este trabajo, las demostraciones serán obviadas.

Para $j,k,l,m,n \in \mathbb{N}_0$ se cumple:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k\right), \tag{1.11}$$

$$\sum_{j=0}^{n} A_{n-j} B_j = \sum_{j=0}^{n} A_j B_{n-j}, \tag{1.12}$$

$$\sum_{j=0}^{n-k} A_j = \sum_{j=k}^{n} A_{n-j}, \tag{1.13}$$

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} a_j a_k = \left(\sum_{j=0}^{n} a_j\right)\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right), \tag{1.14}$$

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-j} a_{jk} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k} a_{jk}, \tag{1.15}$$

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k} \; (n \geq k), \tag{1.16}$$

$$\binom{m}{l}\binom{l}{m} = \binom{m}{l}\binom{m-n}{l-n} \; (m \geq l \geq n). \tag{1.17}$$

La propiedad (1.11) es llamada producto de series de Cauchy, para detalles, ver [7]. La demostración de (1.12) y (1.13) son inmediatas y para la demostración de las propiedades (1.14), (1.15), (1.16), (1.17), ver [26].

Definición 1.2

Sea $\{R_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ una sucesión de polinomios de grado n en $\mathbb{P}(\mathbb{C})$, se dice que $\{R_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ es una sucesión de polinomios de Appell si $R_n(x)$ es generado por la siguiente función generatriz, (cf. [31]):

$$A(z)e^{xz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_n(x)}{n!} z^n, \tag{1.18}$$

donde:

$$A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{R_k}{k!} z^k; \qquad A(0) \neq 0. \tag{1.19}$$

Dadas las características de los polinomios que se estudiarán en los siguientes apartados, se puede establecer que ellos satisfacen las condiciones de la Definición 1.2.

1.2 Polinomios y Números de Bernoulli, Euler y Genocchi clásicos

Se presentan a continuación conceptos conocidos sobre las familias de polinomios y números de Bernoulli, Euler y Genocchi, algunas de sus propiedades fundamentales son dadas. Información sobre estas familias de polinomios pueden ser encontradas en [11, 18, 20].

Definición 1.3

Para $n \in \mathbb{N}_0$, los polinomios de Bernoulli $B_n(x)$ de grado n y variable x se obtienen como los coeficientes de la siguiente función generatriz:

$$\frac{ze^{zx}}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)z^n}{n!}, \quad |z| < 2\pi. \tag{1.20}$$

Los números de Bernoulli B_n se definen como los coeficientes de la siguiente función generatriz:

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n z^n}{n!}, \quad |z| < 2\pi. \tag{1.21}$$

Definición 1.4

Los polinomios de Euler $E_n(x)$ de grado n y variable x son definidos por

$$\frac{2e^{zx}}{e^z + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n(x)z^n}{n!}, \quad |z| < \pi, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{1.22}$$

Los números de Euler E_n se definen por

$$\frac{2}{e^z + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n z^n}{n!}, \quad |z| < \pi. \tag{1.23}$$

Definición 1.5

Para $n \in \mathbb{N}_0$, los polinomios de Genocchi $G_n(x)$ de grado n y variable x se obtienen mediante la siguiente función generatriz:

$$\frac{2ze^{zx}}{e^z + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{G_n(x)z^n}{n!}, \quad |z| < \pi. \tag{1.24}$$

Los números de Genocchi G_n se definen como los coeficientes de la siguiente función generatriz:

$$\frac{2z}{e^z+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{G_n z^n}{n!}, \quad |z| < \pi. \tag{1.25}$$

PROPOSICIÓN 1.2.1 *Para m,k* $\in \mathbb{N}$ *los polinomios de Genocchi* $G_n(x)$ *verifican la siguiente relación:*

$$x^n = \frac{1}{2(n+1)} \left[\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} G_k(x) + G_{n+1}(x) \right]. \tag{1.26}$$

Para la demostración del resultado anterior, (ver [18]).

Los números de Genocchi de índice par, están en relación directa con los polinomios de Bernoulli mediante la siguiente expresión:

$$G_{2n} = 2(1-2^{2n})B_{2n}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.27}$$

En virtud de las funciones generatrices dadas en las Definiciones 1.3, 1.4 y 1.5 se presentan ejemplos de los polinomios considerados.

Ejemplo 1.1

Para $z \in \mathbb{C}, n = 0,1,2,3$, los primeros polinomios de Bernoulli son:

$$\begin{aligned} B_0(x) &= 1, \\ B_1(x) &= x - \frac{1}{2}, \\ B_2(x) &= x^2 - x + \frac{1}{6}, \\ B_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

Para $z \in \mathbb{C}, n = 0, 1, 2, 3$ y $x = 0,$ los primeros números de Bernoulli son:

$$\begin{aligned} B_0(0) &= 1, \\ B_1(0) &= -\frac{1}{2}, \\ B_2(0) &= \frac{1}{6}, \\ B_3(0) &= 0. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.2

Para $z \in \mathbb{C}, n = 0, 1, 2, 3,$ los primeros polinomios de Euler son:

$$\begin{aligned} E_0(x) &= 1, \\ E_1(x) &= x - \frac{1}{2}, \\ E_2(x) &= x^2 - x, \\ E_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Para $z \in \mathbb{C}, n = 0, 1, 2, 3$ y $x = 0,$ los primeros números de Euler son:

$$\begin{aligned} E_0(0) &= 1, \\ E_1(0) &= 0, \\ E_2(0) &= -1, \\ E_3(0) &= 0. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.3

Para $z \in \mathbb{C}, n = 0, 1, 2, 3,$ los primeros polinomios de Genocchi son:

$$\begin{aligned} G_0(x) &= 1, \\ G_1(x) &= 1, \\ G_2(x) &= 2x-1, \\ G_3(x) &= 3x^2-3x. \end{aligned}$$

Para $z \in \mathbb{C}, n = 0,1,2,3$ y $x = 0,$ los primeros números de Genocchi son:

$$\begin{aligned} G_0(0) &= 0, \\ G_1(0) &= 1, \\ G_2(0) &= -1, \\ G_3(0) &= 0. \end{aligned}$$

1.3 Polinomios y números generalizados de Bernoulli, Euler y Genocchi

La siguiente definición proporciona una generalización de los polinomios considerados en la sección anterior. Para mayor información sobre estas familias de polinomios, (ver [11, 30]).

Definición 1.6

Dado α real o complejo, $n \in \mathbb{N}_0,$ los polinomios de Bernoulli generalizados $B_n^{(\alpha)}(x),$ Euler generalizados $E_n^{(\alpha)}(x)$ y Genocchi generalizados $G_n^{(\alpha)}(x)$ de orden α se definen por las siguientes funciones generatrices:

$$\left(\frac{z}{e^z-1}\right)^{\alpha} e^{zx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n^{(\alpha)}(x)z^n}{n!}, \quad |z| < 2\pi. \tag{1.28}$$

$$\left(\frac{2}{e^z+1}\right)^{\alpha} e^{zx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n^{(\alpha)}(x)z^n}{n!}, \quad |z| < \pi. \tag{1.29}$$

$$\left(\frac{2z}{e^z+1}\right)^{\alpha} e^{zx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{G_n^{(\alpha)}(x)z^n}{n!}, \quad |z| < \pi. \tag{1.30}$$

Para α = 1 se tiene: $B_n^{(1)}(x) = B_n(x)$, $E_n^{(1)}(x) = E_n(x)$ y $G_n^{(1)}(x) = G_n(x)$.

De (1.28), se tiene que, (cf. [40])

$$B_n^{(\alpha+\beta)}(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k^{(\alpha)}(x) B_{n-k}^{(\beta)}(y). \tag{1.31}$$

También, se puede obtener de (1.28)

$$B_n^{(0)}(x) = x^n. \tag{1.32}$$

Si β = 0 en (1.31) y se intercambia *x* e *y*, se concluye que:

$$B_n^{(\alpha)}(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k^{(\alpha)}(y) x^{n-k}. \tag{1.33}$$

Particularmente se obtiene:

$$B_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k(y) x^{n-k}. \tag{1.34}$$

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k x^{n-k}. \tag{1.35}$$

En la Definición 1.6, si *x* =0 se obtienen los números asociados a cada función generatriz, es decir, los números generalizados de Bernoulli, números generalizados de Euler y números generalizados de Genocchi, respectivamente.

A partir de la Definición 1.6 y la nota anterior, se presentan los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.4

Los primeros polinomios, $B_n^{(\alpha)}(x)$ con $n \leq 2$ son:

$$\begin{aligned}
B_0^{(\alpha)}(x) &= 1, \\
B_1^{(\alpha)}(x) &= x - \frac{\alpha}{2}, \\
B_2^{(\alpha)}(x) &= x^2 - \alpha x + \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\alpha}{12}.
\end{aligned}$$

Para $x = 0$ se muestran algunos números, $B_n^{(\alpha)}(0)$ con $n \leq 3$.

$$\begin{aligned}
B_0^{(\alpha)}(0) &= 1, \\
B_1^{(\alpha)}(0) &= -\frac{\alpha}{2}, \\
B_2^{(\alpha)}(0) &= \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\alpha}{12}, \\
B_3^{(\alpha)}(0) &= -\frac{\alpha^3}{8} + \frac{\alpha^2}{8}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.5

Los primeros polinomios, $E_n^{(\alpha)}(x)$ con $n \leq 2$ son:

$$\begin{aligned}
E_0^{(\alpha)}(x) &= 1, \\
E_1^{(\alpha)}(x) &= x - \frac{\alpha}{2}, \\
E_2^{(\alpha)}(x) &= x^2 - \alpha x - \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha^2}{4}.
\end{aligned}$$

Para $x = 0$ se muestra una lista de números, $E_n^{(\alpha)}(0)$ con $n \leq 3$.

$$\begin{aligned}
E_0^{(\alpha)}(0) &= 1, \\
E_1^{(\alpha)}(0) &= -\frac{\alpha}{2}, \\
E_2^{(\alpha)}(0) &= \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\alpha}{4}, \\
E_3^{(\alpha)}(0) &= -\frac{\alpha^3}{8} + \frac{3\alpha^2}{8}.
\end{aligned}$$

1.4 Polinomios de Apostol-Bernoulli, Apostol-Euler y Apostol-Genocchi

En la siguiente definición se estudian los conjuntos de polinomios: Apostol-Bernoulli, Apostol-Euler y Apostol-Genocchi. Con base en esta definición, algunos ejemplos son dados, (ver [20]).

Definición 1.7

Los polinomios de Apostol-Bernoulli $\mathfrak{B}_n(x;\lambda)$, Apostol-Euler $\mathfrak{E}_n(x;\lambda)$ y Apostol-Genocchi $\mathfrak{G}_n(x;\lambda)$ de grado n y parámetro $\lambda \in \mathbb{C}$ se obtienen por las siguientes funciones generatrices:

$$\frac{ze^{xz}}{\lambda e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{B}_n(x;\lambda)\frac{z^n}{n!}, \tag{1.36}$$

$|z| < 2\pi$ cuando $\lambda = 1$; $|z| < |\log(\lambda)|$ cuando $\lambda \neq 1$.

$$\frac{2e^{xz}}{\lambda e^z + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{E}_n(x;\lambda)\frac{z^n}{n!}, \tag{1.37}$$

$$\frac{2ze^{xz}}{\lambda e^z + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{G}_n(x;\lambda)\frac{z^n}{n!}, \tag{1.38}$$

$|z| < \pi$ cuando $\lambda = 1$; $|z| < |\log(\lambda)|$ cuando $\lambda \neq 1$.

PROPOSICIÓN 1.4.1 *Para* $\lambda \in \mathbb{C}$*, los polinomios de Apostol-Euler* $\mathfrak{E}_n(x;\lambda)$ *verifican la siguiente propiedad:*

$$x^n = \frac{1}{2}\left[\lambda \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathfrak{E}_k(x;\lambda) + \mathfrak{E}_n(x;\lambda)\right]. \tag{1.39}$$

Detalles de la prueba se encuentran en [20].

Ejemplo 1.6

Para $\lambda \in \mathbb{C}, n = 0,1,2,3,$ los polinomios de Aportol Bernoulli son:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{B}_0(x;\lambda) &= 0,\\
\mathfrak{B}_1(x;\lambda) &= \frac{1}{\lambda-1},\\
\mathfrak{B}_2(x;\lambda) &= \frac{2x(\lambda-1)-2\lambda}{(\lambda-1)^2},\\
\mathfrak{B}_3(x;\lambda) &= \frac{3\lambda^2+3\lambda-6x\lambda^2+6x\lambda+3x^2\lambda^2-6x^2\lambda+3x^2}{(\lambda-1)^3}.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 1.7

Para $\lambda \in \mathbb{C}, n = 0,1,2,3,$ los polinomios de Apostol-Euler son:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{E}_0(x;\lambda) &= \left(\frac{2}{\lambda+1}\right),\\
\mathfrak{E}_1(x;\lambda) &= \frac{\left(\frac{2}{\lambda+1}\right)(x\lambda+x-\lambda)}{\lambda+1},\\
\mathfrak{E}_2(x;\lambda) &= \frac{\left(\frac{2}{\lambda+1}\right)(x^2\lambda^2+2x^2\lambda+x^2-2x\lambda^2-2x\lambda-\lambda+\lambda^2)}{(\lambda+1)^2},\\
\mathfrak{E}_3(x;\lambda) &= \frac{1}{(\lambda+1)^3}\left(\frac{2}{\lambda+1}\right)(x^3\lambda^3+3x^3\lambda^2+3x^3\lambda+x^3-3x^2\lambda^3-6x^2\lambda^2\\
&\quad -3x^2\lambda-3x\lambda^2+3x\lambda^3-3x\lambda+3x\lambda^2+\lambda^2-\lambda-3\lambda^2-\lambda^3).
\end{aligned}
$$

1.5 Polinomios generalizados de Apostol-Bernoulli, Apostol-Euler y Apostol-Genocchi

Una generalización conocida de los polinomios introducidos en la Definicón 1.7 se estudian a continuación, (cf. [19]).

Definición 1.8

Para $\lambda, \alpha \in \mathbb{C}$ y x real, los polinomios generalizados de Apostol-Bernoulli $\mathfrak{B}_n^{(\alpha)}(x;\lambda)$, generalizados de Apostol-Euler $\mathfrak{E}_n^{(\alpha)}(x;\lambda)$ y generalizados de Apostol-Genocchi.

$\mathfrak{G}_n^{(\alpha)}(x;\lambda)$ de orden α se establecen por las siguientes funciones generatrices:

$$\left(\frac{z}{\lambda e^z - 1}\right)^{\alpha} e^{xz} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{B}_n^{(\alpha)}(x;\lambda)\frac{z^n}{n!}, \quad |z| < |\log(\lambda)|. \tag{1.40}$$

$$\left(\frac{2}{\lambda e^z + 1}\right)^{\alpha} e^{xz} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{E}_n^{(\alpha)}(x;\lambda)\frac{z^n}{n!}, \quad |z| < |\log(-\lambda)|. \tag{1.41}$$

$$\left(\frac{2z}{\lambda e^z + 1}\right)^{\alpha} e^{xz} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{G}_n^{(\alpha)}(x;\lambda)\frac{z^n}{n!}, \quad |z| < |\log(-\lambda)|. \tag{1.42}$$

Para $\alpha = 1$, $\mathfrak{B}_n(x;\lambda) = \mathfrak{B}_n^{(1)}(x;\lambda)$ y para $\lambda = 1$ los polinomios de Apostol-Bernoulli generalizados $B_n^{(\alpha)}(x) = \mathfrak{B}_n^{(\alpha)}(x;1)$.

Para $\alpha = 1$, $\mathfrak{E}_n(x;\lambda) = \mathfrak{E}_n^{(1)}(x;\lambda)$ y para $\lambda = 1$ los polinomios de Apostol-Euler generalizados $E_n^{(\alpha)}(x) = \mathfrak{E}_n^{(\alpha)}(x;1)$.

Para $\alpha = 1$, $\mathfrak{G}_n(x;\lambda) = \mathfrak{G}_n^{(1)}(x;\lambda)$ y para $\lambda = 1$ los polinomios de Apostol-Genocchi generalizados $G_n^{(\alpha)}(x) = \mathfrak{G}_n^{(\alpha)}(x;1)$.

Se presentan a continuación algunas propiedades y fórmulas de conexión de los polinomios de Apostol-Bernoulli, Apostol-Euler y Apostol-Genocchi generalizados.

PROPOSICIÓN 1.5.1 *Para* $\alpha \in \mathbb{C}$, *n, $m \in \mathbb{N}$, x real, los polinomios (1.40), (1.41) y (1.42) satisfacen las siguientes relaciones*

$$\sum_{k_1+\cdots+k_m=k}^{\infty} \prod_{i=1}^{m} \frac{\mathfrak{B}_{k_i}^{(\alpha)}(x_i;\lambda)}{k_i!} = \frac{\mathfrak{B}_n^{(\alpha)}(x;\lambda)}{n!}, \tag{1.43}$$

$$\sum_{k_1+\cdots+k_m=k}^{\infty} \prod_{i=1}^{m} \frac{\mathfrak{E}_{k_i}^{(\alpha)}(x_i;\lambda)}{k_i!} = \frac{\mathfrak{E}_n^{(\alpha)}(x;\lambda)}{n!}, \tag{1.44}$$

$$\sum_{k_1+\cdots+k_m=k}^{\infty} \prod_{i=1}^{m} \frac{\mathfrak{G}_{k_i}^{(\alpha)}(x_i;\lambda)}{k_i!} = \frac{\mathfrak{G}_n^{(\alpha)}(x;\lambda)}{n!}. \tag{1.45}$$

Para más detalles de la demostración de la Proposición 1.5.1, (ver [13])

Teorema 1.1

Para $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{C}$ y $n, m \in \mathbb{N}_0$ la siguiente relación entre los polinomios Apostol-Bernoulli y Apostol-Euler generalizados se cumple:

$$\mathfrak{B}_n^{(\alpha)}(x+y;\lambda) = \frac{1}{2^{\beta}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\sum_{m \geq 0} \binom{\beta}{m} \lambda^m \mathfrak{B}_{n-k}^{(\alpha)}(y+m;\lambda) \right) \mathfrak{E}_k^{(\beta)}(x;\lambda).$$

Detalles de la demostración del Teorema 1.1, se pueden consultar en [36].

PROPOSICIÓN 1.5.2 *Para* α, β, $\lambda \in \mathbb{C}$ *y* n, $m \in \mathbb{N}_0$ *se tiene que los polinomios de Apostol-Bernoulli generalizados* $\mathfrak{B}_n^{(\alpha)}(x+y;\lambda)$ *están relacionados con los polinomios de Apostol-Euler generalizados* $\mathfrak{E}_{n-k}(x;\lambda)$ *y los polinomios de Bernoulli generalizados* $B_n^{(\alpha)}(x)$, *están relacionados con los polinomios de Euler generalizados* $E_k^{(\beta)}(x)$ *respectivamente así:*

$$\mathfrak{B}_n^{(\alpha)}(x+y;\lambda) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\mathfrak{B}_k^{(\alpha)}(y;\lambda)+\frac{k}{2}\mathfrak{B}_{k-1}^{(\alpha-1)}(y+m)\right)\mathfrak{E}_{n-k}(x;\lambda), \quad (1.46)$$

$$B_n^{(\alpha)}(x+y) = \frac{1}{2^{\beta}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\sum_{m\geq 0}\binom{\beta}{m}B_{n-k}^{(\alpha)}(y+m)\right)E_k^{(\beta)}(x). \quad (1.47)$$

Más detalles en [36].

PROPOSICIÓN 1.5.3 *Para* $\beta,\lambda \in \mathbb{C}$ *y* $n,m,j \in \mathbb{N}_0$ *las siguientes relaciones se cumplen*

$$x^n = \frac{1}{2^{\beta}}\sum_{m\geq 0}\binom{\beta}{m}\lambda^m\mathfrak{E}_n^{(\beta)}(x+m;\lambda), \quad (1.48)$$

$$(n)_j x^{n-j} = \sum_{m\geq 0}(-1)^{j-m}\binom{j}{m}\lambda^m\mathfrak{B}_n^{(j)}(x+m;\lambda), \quad (1.49)$$

donde $(n)_j$ *cumple (1.5).*

Para detalles de la prueba, (cf. [36]).

PROPOSICIÓN 1.5.4 *Dado* α, $\lambda \in \mathbb{C}$ *y* $n, j \in \mathbb{N}_0$ *se tienen las siguientes relaciones:*

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_n^{(\alpha)}(x+y;\lambda) &= \sum_{k=0}^{n}\frac{2}{k+1}\binom{n}{k}\left(\mathfrak{E}_{k+1}^{(\alpha-1)}(y;\lambda)-\mathfrak{E}_{k+1}^{(\alpha)}(y;\lambda)\right)\mathfrak{B}_{n-k}(x;\lambda)\\ &\quad +\frac{\lambda-1}{n+1}\mathfrak{E}_0^{(\alpha)}(y;\lambda)\mathfrak{B}_{n+1}(x;\lambda),\end{aligned}$$

$$E_n^{(\alpha)}(x+y) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\sum_{l=0}^{n-k}\binom{n-k}{l}\binom{l+j}{j}^{-1}S(l+j,j)E_{n-k-l}^{(\alpha)}(y)\right)B_k^{(j)}(x)$$

Más detalles en [31].

PROPOSICIÓN 1.5.5 *Para* $\alpha \in \mathbb{C}$ *y* $n, j \in \mathbb{N}_0$ *los polinomios de Apostol-Bernoulli generalizados y los polinomios de Bernoulli generalizados cumplen las siguientes relaciones respectivamente*

$$x^n = \sum_{l=-j}^{n} \frac{n!\,j!}{(l+j)!(n-l)!} S(l+j,j;\lambda)\mathfrak{B}_{n-l}^{(j)}(x;\lambda);$$

$$x^n = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} \binom{l+j}{j}^{-1} S(l+j,j) B_{n-l}^{(j)}(x).$$

Para más detalles, (ver [31]).

1.6 Nuevos polinomios generalizados de Apostol-Bernoulli, Apostol-Euler y Apostol-Genocchi

En este apartado se estudiarán los nuevos polinomios generalizados de Apostol-Bernoulli, $\mathcal{B}_n^{(\alpha)}(x;\lambda;a,b,c)$, nuevos polinomios generalizados de Apostol-Euler, $\mathcal{E}_n^{(\alpha)}(x;\lambda;a,b,c)$ y los nuevos polinomios generalizados de Apostol-Genocchi, $\mathcal{G}_n^{(\alpha)}(x;\lambda;a,b,c)$, (ver [31]).

Definición 1.9

Sean $a,b,c \in \mathbb{R}^+$, $a \neq b$ y $n \in \mathbb{N}_0$; los nuevos polinomios generalizados de Apostol-Bernpulli, $\mathcal{B}_n^{(\alpha)}(x;\lambda;a,b,c)$, generalizados de Apostol-Euler, $\mathcal{E}_n^{(\alpha)}(x;\lambda;a,b,c)$ y generalizados Apostol-Genocchi, $\mathcal{G}_n^{(\alpha)}(x;\lambda;a,b,c)$ de orden $\alpha \in \mathbb{C}$ se definen por las siguientes generatrices:

$$\left(\frac{z}{\lambda b^z - a^z}\right)^{\alpha} c^{xz} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n^{(\alpha)}(x;\lambda;a,b,c)\frac{z^n}{n!}, \quad |z\log\left(\frac{b}{a}\right)| < |\log(\lambda)|. \tag{1.50}$$

$$\left(\frac{2}{\lambda b^z + a^z}\right)^{\alpha} c^{xz} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{E}_n^{(\alpha)}(x;\lambda;a,b,c)\frac{z^n}{n!}, \quad |z\log\left(\frac{b}{a}\right)| < |\log(-\lambda)|. \tag{1.51}$$

$$\left(\frac{2z}{\lambda b^z + a^z}\right)^{\alpha} c^{xz} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{G}_n^{(\alpha)}(x;\lambda;a,b,c)\frac{z^n}{n!}, \quad |z\log\left(\frac{b}{a}\right)| < |\log(-\lambda)|. \tag{1.52}$$

En la siguiente proposición se establecen algunas relaciones entre los polinomios dados en la Definición 1.9.

PROPOSICIÓN 1.6.1 *Sea a,b,c* $\in \mathbb{R}^+$ *y n,l* $\in \mathbb{N}_0$ *las siguientes relaciones se cumplen:*

$$\mathcal{B}_n^{(l)}(x;\lambda;a,b,c) = \left(-\frac{1}{2}\right)^l \frac{n!}{(n-l)!}\mathcal{E}_{n-l}^{(l)}(x;-\lambda;a,b,c), \tag{1.53}$$

$$\mathcal{E}_n^{(l)}(x;\lambda;a,b,c) = (-2)^l \frac{n!}{(n-l)!}\mathcal{B}_{n+l}^{(l)}(x;-\lambda;a,b,c), \tag{1.54}$$

$$\mathcal{G}_n^{(l)}(x;\lambda;a,b,c) = (-2)^l \mathcal{B}_n^{(l)}(x;-\lambda;a,b,c), \tag{1.55}$$

$$\mathcal{G}_n^{(l)}(x;\lambda;a,b,c) = \frac{n!}{(n-l)!}\mathcal{E}_{n-l}^{(l)}(x;\lambda;a,b,c). \tag{1.56}$$

Más información sobre la Proposición 1.6.1, se puede consultar en [31].

1.7 Polinomios generalizados de Bernoulli, Euler y Genocchi de nivel *m*

Los polinomios de Bernoulli generalizados de nivel *m* y los números de Bernoulli generalizados de nivel *m* fueron introducidos por Natalini y Bernardini en [22] como una generalización de los polinomios y números de Bernoulli clásicos. En esta sección se estudia información relevante acerca de esta familia de polinomios, (ver [24]).

Definición 1.10

Para $m \in \mathbb{N}$, los polinomios de Bernoulli generalizados de nivel m se obtienen mediante la siguiente función generatriz:

$$\frac{z^m e^{xz}}{e^z - \sum_{l=0}^{m-1} \frac{z^l}{l!}} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{[m-1]}(x) \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < 2\pi. \tag{1.57}$$

Los números de Bernoulli generalizados de nivel m están definidos por

$B_n^{[m-1]} := B_n^{[m-1]}(0)$, para todo $n \geq 0$.

Es claro que si $m = 1$ en (1.57), se obtiene la función generatriz de los polinomios de Bernoulli clásicos $B_n(x)$ y los números de Bernoulli clásicos respectivamente, $B_n(x) = B_n^{[0]}(x)$, y $B_n = B_n^{[0]}$, para $n \geq 0$.

Ejemplo 1.8

Para $m \in \mathbb{N}, n = 0, 1, 2, 3,$ los primeros polinomios de Bernoulli generalizados de nivel m son:

$$\begin{aligned}
B_0^{[m-1]}(x) &= m!,\\
B_1^{[m-1]}(x) &= m!\left(x - \frac{1}{m+1}\right),\\
B_2^{[m-1]}(x) &= m!\left(x^2 - \frac{2}{m+1}x + \frac{2}{(m+1)^2(m+2)}\right),\\
B_3^{[m-1]}(x) &= m!\left(x^3 - \frac{3}{m+1}x^2 + \frac{6}{(m+1)^2(m+2)}x + \frac{6(m-1)}{(m+1)^2(m+2)(m+3)}\right).
\end{aligned}$$

El siguiente teorema resume algunas propiedades de los polinomios generalizados de Bernoulli de nivel m (cf. [10, 22]).

Teorema 1.2

Para $m \in \mathbb{N}$, sea $\left\{B_n^{[m-1]}(x)\right\}_{n\geq 0}$ la sucesión de polinomios generalizados de Bernoulli de nivel m. Entonces las siguientes propiedades cumplen:

a. Formula de sumación [24, Ec. (2)]. Para cada $n \geq 0$,

$$B_n^{[m-1]}(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k^{[m-1]} x^{n-k}. \tag{1.58}$$

b. Relación diferencial [24, Ec. (3)]. Para n, $j \geq 0$ con $0 \leq j \leq n$, se tiene

$$[B_n^{[m-1]}(x)^{(j)} = \frac{n!}{(n-j)!} B_{n-j}^{[m-1]}(x). \tag{1.59}$$

c. Fórmula de inversión [22, Ec. (2.6)]. Para cada $n \geq 0$,

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k!}{(k+m)!} B_{n-k}^{[m-1]}(x). \tag{1.60}$$

d. Relación de recurrencia [22, Lema 3.2]. Para cada $n \geq 1$,

$$B_n^{[m-1]}(x) = \left(x - \frac{1}{m+1}\right) B_{n-1}^{[m-1]}(x) - \frac{1}{n(m-1)!} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} B_{n-k}^{[m-1]} B_k^{[m-1]}(x).$$

e. Fórmula integral

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} B_n^{[m-1]}(x)dx \;&=\; \frac{1}{n+1}\left[B_{n+1}^{[m-1]}(x_1) - B_{n+1}^{[m-1]}(x_0)\right] \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n-k+1} \binom{n}{k} B_k^{[m-1]}((x_1)^{n-k+1} - (x_0)^{n-k+1}). \end{aligned} \tag{1.61}$$

$$B_n^{[m-1]}(x) = n\int_0^x B_{n-1}^{[m-1]}(t)dt + B_n^{[m-1]}. \tag{1.62}$$

Se definen ahora, los polinomios de Euler generalizados de nivel m y los polinomios de Genocchi generalizados de nivel m. Propiedades en la línea del Teorema 1.2 se cumplen de manera análoga para estas familias de polinomios, (cf. [11]).

Definición 1.11

Para $m \in \mathbb{N}$, los polinomios de Euler generalizados de nivel m se definen mediante la siguiente función generatriz (cf. [27, 32]):

$$\frac{2^m e^{xz}}{e^z - \sum_{l=0}^{m-1}\frac{z^l}{l!}} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{[m-1]}(x)\frac{z^n}{n!}, \quad |z| < \pi, \tag{1.63}$$

y los números de Euler generalizados de nivel m están definidos por $E_n^{[m-1]} := E_n^{[m-1]}(0)$, para todo $n \geq 0$. Es claro que si $m = 1$ en (1.63), se obtiene la función generatriz de los polinomios de Euler clásicos $E_n(x)$ y los números de Euler clásicos respectivamente, $E_n(x) = E_n^{[0]}(x)$, y $E_n = E_n^{[0]}$, para $n \geq 0$.

Definición 1.12

Para $m \in \mathbb{N}$, los polinomios generalizados de Genocchi de nivel m se establecen mediante la siguiente función generatriz (cf. [27, 32]):

$$\frac{(2z)^m e^{xz}}{e^z - \sum_{l=0}^{m-1}\frac{z^l}{l!}} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n^{[m-1]}(x)\frac{z^n}{n!}, \quad |z| < \pi. \tag{1.64}$$

Los números generalizados de Genocchi de nivel m están definidos por $G_n^{[m-1]} := G_n^{[m-1]}(0)$, para todo $n \geq 0$. Es claro que si $m = 1$ en (1.64), se obtiene la función generatriz de los polinomios de Genocchi clásicos $G_n(x)$ y los números de Genocchi clásicos respectivamente, $G_n(x) = G_n^{[0]}(x)$, y $G_n = G_n^{[0]}$, para $n \geq 0$.

1.8 Polinomios de Frobeniu-Euler

Esta sección es dedicada al estudio de la familia de polinomios de Frobenius-Euler, algunos ejemplos son presentados, así mismo, algunas propiedades analíticas y algebraicas son estudiadas.

Definición 1.13

Para $u \in \mathbb{C}$ los polinomios de Frobenius-Euler $H_n(x;u)$ se obtienen como los coeficientes de la siguiente función generatriz, (cf. [12]).

$$\left(\frac{1-u}{e^z-u}\right)e^{xz} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x;u)\frac{z^n}{n!}, \qquad |z| < |\ln u|. \tag{1.65}$$

Para valores especiales de x y u en (1.65), se tienen los siguientes casos:

1. Para $x = 0$, $H_n(0;u) := H_n(u)$ se llaman números de Frobenius-Euler (cf. [5]).
2. Para $u = -1$, $H_n(x;-1) := E_n(x)$, denotan los polinomios de Euler.
3. Para $u = -1$ y $x = \frac{1}{2}$, $2^n H_n(\frac{1}{2}, -1) = E_n$, denotan los números de Euler.

Algunos autores llaman a $H_n(0;-1) := E_n(0)$ números de Euler, (cf. [5]). En este trabajo, se utiliza la definición común de números de Euler, es decir, los números definidos por la función generatriz

$$\left(\frac{2e^z}{e^{2z}-1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \frac{z^n}{n!}, \qquad |z| < \frac{\pi}{2}. \tag{1.66}$$

Utilizando desarrollo de serie de potencia y el producto de Cauchy, de (1.65) la siguiente fórmula de recurrencia puede obtenerse

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} H_k(x;u) - uH_n(x;u) = (1-u)x^n, \qquad n \in \mathbb{N}_0. \tag{1.67}$$

Para detalles de la prueba, cf. [4].

Ejemplo 1.9

Para $u \in \mathbb{C}, n = 0,1,2,3,$ los polinomios de Frobenius-Euler son:

$$\begin{aligned}
H_0(x;u) &= 1,\\
H_1(x;u) &= x - \frac{1}{1-u},\\
H_2(x;u) &= x^2 - \frac{2}{1-u}x - \frac{1+u}{(1-u)^2},\\
H_3(x;u) &= x^3 - \frac{3}{1-u}x^2 + 3\frac{1+u}{(1-u)^2}x - \frac{u^2+4u+1}{(1-u)^3}.
\end{aligned}$$

1.9 Polinomios de Jacobi

Es sabido que dentro de la familia de polinomios ortogonales clásicos están los polinomios de Jacobi, los cuales se describiran a continuación, (ver [33]).

Definición 1.14

Sean $\alpha, \beta > -1$ y $d\mu(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx$ sobre intervalo $[-1,1]$. Los polinomios de Jacobi $\left\{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right\}_{n\geq 0}$ son ortogonales con respecto a la medida y cumplen la siguiente relación de ortogonalidad:

$$\int_{-1}^{1} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) P_m^{(\alpha,\beta)}(x) d\mu(x) = h_n^{(\alpha,\beta)} \delta_{n,m}, \quad n,m \geq 0,$$

donde

$$h_n^{(\alpha,\beta)} = \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}, \tag{1.68}$$

siendo Γ la función Gamma.

Definición 1.5

Dado $z \in \mathbb{C}$, $\alpha,\beta > -1$ y $n \in \mathbb{N}_0$, los polinomios de Jacobi son generados por la siguiente función generatriz (ver [33]):

$$2^{\alpha+\beta} R^{-1}(1-z+R)^{-\alpha}(1+z+R)^{-\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) z^n, \tag{1.69}$$

donde

$R = R(x,z) = (1-2xz+z^2)^{1/2}$.

Los polinomios de Jacobi se pueden obtener de modo explícito a partir de la fórmula de Rodrigues, (ver [33]):

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = (1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta} \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left\{(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\alpha}\right\}. \tag{1.70}$$

Otra expresión explicíta para los polinomios de Jacobi es la siguiente (ver [33]):

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (n+\alpha+\beta+1)_k (k+\alpha+1)_{n-k} \left(\frac{x-1}{2}\right)^k, \tag{1.71}$$

donde $(a)_k$ es el símbolo de Pochhammer dado en (1.5).

Los valores de $P_n^{(\alpha,\beta)}$ en los extremos del intervalo $[-1,1]$ están dados por:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \binom{n+\alpha}{n}, \quad P_n^{(\alpha,\beta)}(-1) = (-1)^n \binom{n+\beta}{n}.$$

PROPOSICIÓN 1.9.1 *Para* $\alpha,\beta > -1$ *y* $n \in \mathbb{N}_0$*, los polinomios de Jacobi* $P_n^{(\alpha,\beta)}$ *verifican la siguiente relación:*

$$x^n = n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-k} (-1)^k \frac{(1+\alpha+\beta+2k)}{(1+\alpha+\beta+k)_{n+1}} P_k^{(\alpha,\beta)}(1-2x). \tag{1.72}$$

Ejemplo 1.10

Para $\alpha = 1\,\beta = 2$ y $n = 0,1,2,3,$ los polinomios de Jacobi son:

$$\begin{aligned}
P_0^{(1,2)}(x) &= 1,\\
P_1^{(1,2)}(x) &= \frac{5}{2}x - \frac{1}{2},\\
P_2^{(1,2)}(x) &= \frac{21}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{3}{4},\\
P_3^{(1,2)}(x) &= \frac{21}{2}x^3 - \frac{7}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

1.10 Matriz de Pascal y matriz de Fibonacci

A continuación se revisan conceptos y propiedades relativos a: matriz de Pascal p_{ij}, matriz polinomial de Pascal $P[x]$, matriz de Fibonacci $f_{i,j}$ y la inversa de la matriz de Fibonacci $[f_{i,j}]$, Lucas y Pell. Para mayor información sobre este tópico, (ver [40]).

Definición 1.16

Una matriz de Pascal de tamaño $n \times n$ es una matriz obtenida tomando las primeras n filas del triángulo de Pascal y rellenando de ceros a la derecha para completar la matriz. Esta matriz se expresa de la siguiente manera:

$$P = p_{ij} = \begin{cases} \binom{i-1}{j-1}, & \text{si} \quad i \geq j, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para $i, j = 0, 1, \ldots, n$ se define la matriz generalizada de Pascal $(n+1)\times(n+1)$ como

$$P[x] = p_{ij} = \begin{cases} \binom{i}{j} x^{1-j}, & \text{si} \quad i \geq j, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Ejemplo 1.11

Para $n = 3$ se presentan ejemplos de las matrices dadas en la Definición 1.16

$$P_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad P_4[x] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 \\ x^2 & 2x & 1 & 0 \\ x^3 & 3x^2 & 3x & 1 \end{bmatrix}.$$

Definicióm 1.17

Sea x cualquier número real distinto de cero. Para $c \in \mathbb{R}^+$, la matriz de Pascal generalizada $(n+1)\times(n+1)$, de primer tipo en base c denotada por $P_c[x]$, es una matriz cuyas entradas están dadas por (ver [25]):

$$p_{i,j,c}(x) := \begin{cases} \binom{i}{j}(x\ln c)^{i-j}, & i \geq j, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Ejemplo 1.12

Para *n = 3* se tiene el siguiente ejemplo de la matriz de Pascal generalizada en base *c*

$$P_4[x] \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ (x\ln c) & 1 & 0 & 0 \\ (x\ln c)^2 & (2x\ln c) & 1 & 0 \\ (x\ln c)^3 & 3(x\ln c)^2 & (3x\ln c) & 1 \end{bmatrix}.$$

Cuando $c = e$, la matriz $P_c[x]$ coincide con la matriz de Pascal generalizada de primer tipo $P[x]$. Además, si se adopta la convención $0^0 = 1$, entonces $P_c[0] = I_{n+1}$, con $I_{n+1} = \mathrm{diag}(1,1,\ldots,1)$.

El siguiente teorema muestra una relación entre los argumentos de las matrices de Pascal.

Teorema 1.3 (Teorema de adición del argumento)

Para $x,y \in \mathbb{R}$, se cumple

$P_c[x+y] = P_c[x]P_c[y]$.

Para más información (ver [25]).

Se enuncian a continuación algunas propiedades de la matriz de Pascal generalizada de primer tipo, $P_c[x]$ que serán útiles en la propuesta que se considera en la presente investigación.

Teorema 1.4

Para $c \in \mathbb{R}^+$, sea $P^c[x]$ la matriz de Pascal generalizada de primer tipo en la base c de orden $n+1$. Entonces las siguientes afirmaciones se cumplen:

a. *$Pc[x]$ es una matriz invertible y su inversa está dada por*

$$P_c^{-1}[x] := (P_c[x])^{-1} = P_c[-x].$$

b. *La matriz $Pc[x]$* puede ser factorizada de la siguiente manera:

$$P_c[x] = G_{n,c}[x]G_{n-1,c}[x]\cdots G_{1,c}[x], \quad (1.73)$$

donde $G_{k,c}[x]$ es la matriz de suma dada por

$$G_{k,c}[x] = \begin{cases} \begin{bmatrix} I_{n-k} & 0 \\ 0 & S_{k,c}[x] \end{bmatrix}, & k = 1, \ldots, n-1, \\ S_{n,c}[x], & k = n, \end{cases}$$

siendo $S_{k,c}[x]$ la matriz $(k+1)\times(k+1)$ cuyas entradas $S_{k,c}(x;i,j)$ son dadas por

$$S_{k,c}(x;i,j,c) = \begin{cases} (x\ln c)^{i-j}, & i \geq j, \\ 0, & j > i, \end{cases} \qquad 0 \leq i,j \leq k.$$

Detalles sobre las propiedades anteriores pueden consultarse en [25].

La sucesión de Fibonacci es la sucesión de números de la forma:

$$0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,\ldots \qquad (1.74)$$

Cada número se calcula sumando los dos anteriores a él. Para más información, ver [40].

Definición 1.18

Sea *Fn* el *n*-ésimo número de Fibonacci dado en (1.74), la matriz de Fibonacci (n + 1) x (n + 1), $\Im = [f_{i,j}], \quad i,j = 0,1,\ldots,n$ es definida por:

$$f_{i,j} = \begin{cases} F_{i-j+1}, & \text{si } i-j+1 \geq 0, \\ 0, & \text{si } i-j+1 < 0. \end{cases} \tag{1.75}$$

Ejemplo 1.13

Para n = 3 se tiene el siguiente ejemplo de la matriz de Fibonacci

$$F_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

En [15] se define la inversa de la matriz de Fibonacci de la siguiente forma

Definición 1.19

La inversa de la matriz de Fibonacci $\Im$, denotada como $\Im^{-1} = [f_{i,j}]$ i, j = $0,1,...n$, es dada por:

$$f'_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ -1, & \text{si } i = j+1, j+2, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{1.76}$$

Ejemplo 1.14

Para $n = 3$ se tiene el siguiente ejemplo de la inversa de la matriz de Fibonacci

$$\mathfrak{I}_4^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.11 Matriz de Lucas y algunas propiedades

Se comienza esta sección revisando la definición de la sucesión de Lucas para así introducir la matriz de Lucas, su inversa y algunas propiedades.

Es sabido que la sucesión de Lucas $\{L_n\}_{n\geq 1}$ es dada por $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$ para $n \geq 1$, con condiciones iniciales $L_1 = 1$ y $L_2 = 3$.

Definición 1.20

La matriz de Lucas $\mathcal{L}$ se define a partir de las siguientes entradas

$$l_{i,j} = \begin{cases} L_{i-j+1}, & i-j \geq 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Ejemplo 1.15

Para $n = 3$ se tiene el siguiente ejemplo de la matriz de Lucas

$$\mathcal{L}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

A continuación se presenta la inversa de la matriz de Lucas, $\mathcal{L}^{-1}$.

Definición 1.21

Las entradas de $\mathcal{L}^{-1}$ tienen la siguiente forma explícita

$$\tilde{l}_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ -3, & i = j+1, \\ 5(-1)^{i-j}2^{i-j-2}, & i \geq j+2, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Ejemplo 1.6

Para *n = 3* se tiene el siguiente ejemplo de la inversa de la matriz de Lucas

$$\mathcal{L}_4^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & 1 & 0 \\ -10 & 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se registra a seguir un resultado declarado y demostrado en [38, Teorema 3.1].

Teorema 1.5

Para $x \in \mathbb{R}, x \neq 0,$ la siguiente relación entre las matrices $P[x]$ y $\mathcal{L}$ se cumple

$$P[x] = \mathcal{L}\mathcal{G}[x] = \mathbb{H}[x]\mathcal{L}, \tag{1.77}$$

donde las entradas de las matrices $\mathcal{G}[x]$ y $\mathbb{H}[x]$ están dadas por

$$g_{i,j}(x) = x^{-j-1}\left[x^{i+1}\binom{i}{j} - 3x^i\binom{i-1}{j} + 5(-1)^{i+1}2^{i-1}m_{i-1,j+1}\left(\frac{x}{2}\right)\right],$$

$$h_{i,j}(x) = x^{-j-1}\left[x^{i+1}\binom{i}{j} - 3x^i\binom{i}{j+1} + (-1)^{j+1}\frac{5x^{i+j+2}}{2^{j+3}}n_{i+1,j+3}\left(\frac{2}{x}\right)\right],$$

respectivamente con

$$m_{i,j}(x) := \begin{cases} \sum_{k=j}^{i}(-1)^k\binom{k}{j}x^k, & i \geq j, \\ 0, & i < j, \end{cases} \quad \text{y} \quad n_{i,j}(x) := \begin{cases} \sum_{k=j}^{i}(-1)^k\binom{i}{k}x^k, & i \geq j, \\ 0, & i < j. \end{cases}$$

1.12 Matriz de Pell y de Stirling

Se considera ahora la conocida sucesión de Pell, fundamental para definir la matriz de Pell y poder plantear un tipo de factorización con la matriz de los polinomios objeto de investigación del presente trabajo, (cf. [35]).

La sucesión de Pell $\{a_n\}$ es definida recursivamente por la ecuación

$$a_n+1 = 2a_n + a_n-1,\ n \geq 2,$$

donde $a_1 = 1$, $a_2 = 2$. La sucesión de Pell se puede listar así:

$$1,2,5,12,29,70,169,408,....$$

Definición 1.22

La matriz de Pell $S = [s_{i,j}]$ de $n\ x\ n$ se define a partir de las siguientes entradas

$$s_{i,j} = \begin{cases} a_{i-j+1}, & i-j+1 \geq 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Donde, a_n es el n-ésimo número de Pell

Ejemplo 1.17

Para $n = 3$ se tiene el siguiente ejemplo de la matriz de Pell

$$S_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \\ 12 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Una bien conocida identidad, llamada identidad de Pell se puede expresar de la siguiente forma:

$$a_{n+q}\, a_{n+r} - a_n\, a_{n+q+r} = a_q\, a_r (-1)^n, \; a_{2n+1} = a_n^2 + a_{n+1}^2.$$

Donde, q y r son enteros arbitrarios.

Para el n-ésimo número de Pell a_n se tiene la siguiente relación:

$$a_n = \sum_{r=0}^{[(n-1)/2]} \binom{n-1-r}{r} 2^{n-1-2r}$$

Definición 1.23

Para los números de Stirling $S(i, j)$ de segunda clase dados en la Definición 1.1, se define S_n como la matriz de $n \times n$ dada por

$$(S_{i,j})_n = \begin{cases} S(i,j), & i \geq j, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$(S_{i,j})_n$ se llama la matriz de Stirling de segunda clase, (ver [14, p. 144]).

Ejemplo 1.18

La matriz de Stirling de segunda clase de orden 4 x 4 se muestra a continuación,

$$S_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 6 & 1 \end{bmatrix}.$$

Usando la definición de S_n, se puede definir la siguiente representación matricial de (1.10), (ver [8, p. 51])

$$X_n = ([1] \oplus S_{n-1}) F_n, \tag{1.78}$$

donde $X_n = \left[1 \cdot x \cdots x^{n-1}\right]^T$ y $F_n = \left[[x]_0\, [x]_1 \cdots [x]_{n-1}\right]^T$.

Para $n,k \in \mathbb{Z}^+$ con $n \geq k$, la matriz P_k de orden $n{\times}n$, con respecto a la matriz P_k de orden $k{\times}k$, es definida por

$$\overline{P}_k = \begin{bmatrix} I_{n-k} & 0 \\ 0 & P_k \end{bmatrix}.$$

Así, $\overline{P}_n = P_n$ y $\overline{P}_1$ es la matriz identidad de orden n.

Es conocido, que para la matriz de Pascal P_n de $n \times n$ se tiene, (ver [8, p.52])

$$S_n = P_n([1] \oplus S_{n-1}). \tag{1.79}$$

En efecto, para cada i, j con $i \geq j \geq 1$ se tiene que la (i, j)-entrada de $[1] \oplus S_{n-1}$ es $S(i-1, j-1)$. Ahora, por la multiplicación de matrices y (1.9), se obtiene

$$\begin{aligned}(P_n([1]\oplus S_{n-1}))_{i,j} &= \sum_{l=j-1} p_{i,l+1}S(l,j-1)\\ &= \sum_{l=j-1}^{i-1}\binom{i-1}{l}S(l,j-1)\\ &= S(i,j)\\ &= (S_{i,j})_n.\end{aligned}$$

Ejemplo 1.19

Un ejemplo de (1.79) se da a continuación

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&2&1&0\\1&3&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&1&0\\0&1&3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&3&1&0\\1&7&6&1\end{bmatrix}=S_4.$$

Teorema 1.6

La matriz de Stirling Sn de segundaa clase puede ser factorizada por las matrices de Pascal $\overline{P}_k$,

$$S_n=\overline{P}_n\overline{P}_{n-1}\cdots\overline{P}_2\overline{P}_1.$$

Para detalles de la prueba, (ver [8, p.52]).

Ejemplo 1.20

Un ejemplo del Teorema 1.6 se da a continuación,

$$S_4=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&2&1&0\\1&3&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&1&0\\0&1&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

Capítulo 2

Generalizaciones de polinomios tipo Apostol y matrices polinomiales

En este capítulo se presentan algunas generalizaciones de familias de polinomios consideradas a partir de las funciones generatrices de las familias de polinomios introducidas en el capítulo anterior; la exposición de los resultados muestra las demostraciones o las fuentes bibliográficas donde se puede ampliar información. Primero se trata la generalización de los polinomios tipo Apostol Frobenius-Euler, se estudian algunas de sus propiedades; otra generalización considerada es la conocida extensión de las generalizaciones de los polinomios tipo Apostol. Por otra parte, se propone el estudio de la matriz polinomial generalizada de Bernoulli, además teniendo en cuenta los conceptos referentes a los tipos de matrices tratadas en el primer capítulo se estudian algunas fórmulas de conexión entre ellas.

2.1 Polinomios tipo Apostol Frobenius-Euler generalizados

Definición 2.1

Los polinomios tipo Apostol Frobenius-Euler $H_n(x;\lambda;u)$ en variable x, parámetros $\lambda, u \in \mathbb{C}$, son definidos mediante la siguiente función generatriz, (ver [12]).

$$\left(\frac{1-u}{\lambda e^z - u}\right) e^{xz} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x;\lambda;u)\frac{z^n}{n!}, \quad |z| < |\ln\left(\frac{u}{\lambda}\right)|. \tag{2.1}$$

Para λ=1 en (2.1), se obtienen los polinomios de Frobenius-Euler clásicos dados en (1.65).

Definición 2.2

Sean $a,b,c \in \mathbb{R}^+$. La generalización de los polinomios tipo Apostol Frobenius-Euler se definen mediante la siguiente función generatriz:

$$\left(\frac{a^z-u}{\lambda b^z-u}\right)^{\alpha} e^{xz} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(\alpha)}(x;a,b,c;\lambda;u)\frac{z^n}{n!}, \quad |z| < |\ln\left(\frac{u}{\lambda}\right) - \ln(b)|. \tag{2.2}$$

Si $x = 0$ y $\alpha = 1$ en (2.2), se obtiene

$$\frac{a^z-u}{\lambda b^z-u} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(a,b,c;\lambda;u)\frac{z^n}{n!}. \tag{2.3}$$

Donde, $H_n(a,b,c;u;\lambda)$ son llamados números generalizados tipo Apostol Frobenius-Euler (cf. [29]).

El siguiente teorema ofrece algunas propiedades que cumplen la familia de polinomios dados en la Definición 2.2.

Teorema 2.1.

Para $n \in \mathbb{N}$, sea $\{H_n^{(\alpha)}(x;u)\}_{n\geq 0}$ la sucesión de polinomios generalizados tipo Apostol Frobenius-Euler. Entonces las siguientes propiedades se cumplen, (cf. [12]).

(a) Para $n \in \mathbb{N}_0$,

$$H_n^{(0)}(x;u) = x^n. \tag{2.4}$$

(b) Dado $a,b,c \in \mathbb{R}^+$ y $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$H_n^{(\alpha)}(x;u;a,b,c;\lambda) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} H_k^{(\alpha)}(x;u;a,b,c;\lambda)(x\ln c)^{n-k}. \tag{2.5}$$

(c) Para $a,b,c\in\mathbb{R}^+$ y $\alpha,u\in\mathbb{C}$,

$$H_n^{(\alpha+\beta)}(x+y;u;a,b,c;\lambda)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}H_k^{(\alpha)}(x;u;a,b,c;\lambda)H_{n-k}^{(\beta)}(y;u;a,b,c;\lambda). \tag{2.6}$$

(d) Para $a,b,c\in\mathbb{R}^+$ y $\alpha,u\in\mathbb{C}$,

$$((x+y)\ln c)^n=H_{n-k}^{(\alpha)}(y;u;a,b,c;\lambda)H_k^{(-\alpha)}(x;u;a,b,c;\lambda). \tag{2.7}$$

(e) Para $a,b,c\in\mathbb{R}^+$ y $\alpha,u\in\mathbb{C}$,

$$H_n^{(-\alpha)}(x;u^2;a^2,b^2,c^2;\lambda^2)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}H_k^{(-\alpha)}(x;u;a,b,c;\lambda)H_{n-k}^{(-\alpha)}(x;-u;a,b,c;\lambda). \tag{2.8}$$

DEMOSTRACIÓN 2.1.1 *Se demuestra (2.7). Utilizando (2.2) se tiene,*

$$\sum_{n=0}^{\infty}H_n^{(-\alpha)}(x;u;a,b,c;\lambda)\frac{z^n}{n!}\sum_{n=0}^{\infty}H_n^{(\alpha)}(y;u;a,b,c;\lambda)\frac{z^n}{n!} \quad = \quad c^{(x+y)z}. \tag{2.9}$$

Por lo tanto,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}H_{n-k}^{(\alpha)}(y;u;a,b,c;\lambda)H_k^{(-\alpha)}(x;u;a,b,c;\lambda)\right)\frac{z^n}{n!} \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty}(x\ln c)^n\frac{z^n}{n!}.$$

Así, al usar el producto de Cauchy en (2.9) y luego comparar los coeficientes de $\frac{z^n}{n!}$ en ambos lados de la ecuación resultante, sigue el resultado deseado. Las pruebas de (2.5), (2.6) y (2.8) se demuestran con argumentos análogos a la de (2.7), por lo tanto se han omitido.

PROPOSICIÓN 2.1.1 *Sea* $\alpha\in\mathbb{N}$. *Entonces se tiene,*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}(-u)^{\alpha-k}(x\ln c+k\ln a)^n=\sum_{p=0}^{n}\sum_{k=0}^{\alpha}\binom{n}{p}\binom{\alpha}{k}(-u)^{\alpha-k}(k\ln b)^pH_{n-p}^{(\alpha)}(x;u;a,b,c;\lambda)$$

DEMOSTRACIÓN 2.1.2 *Usando (2.2) se obtiene,*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{k}(-u)^{\alpha-k}(x\ln c+k\ln a)^{n}\right)\frac{z^{n}}{n!}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{p=0}^{n}\sum_{k=0}^{\alpha}\binom{n}{p}\binom{\alpha}{p}(-u)^{\alpha-k}(k\ln b)^{p}H_{n-p}^{(\alpha)}(x;u;a,b,c;\lambda)\right)\frac{z^{n}}{n!}.$$

Igualando los coeficientes de $\frac{z^n}{n!}$ *en ambos lados de la ecuación resultante, se obtiene el resultado.*

Teorema 2.2

Sea $r\in\mathbb{N}_0$, la siguiente relación se cumple

$$(2u-1)\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}H_r(x;u;a,b,c;\lambda)H_{n-r}(y;1-u;a,b,c;\lambda)$$
$$=(u-1)H_n(x+y;u;a,b,c;\lambda)+uH_n(x+y;1-u;a,b,c;\lambda)$$
$$+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}H_k(x+y;u;a,b,c;\lambda)$$
$$-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\ln a)_k^{n-k}H_k(x+y;1-u;a,b,c;\lambda).$$

DEMOSTRACIÓN 2.1.3 *Estableciendo que*

$$(2u-1)\frac{a^z-u}{\lambda b^z-u}c^{xz}\frac{a^z-(1-u)}{\lambda b^z-(1-u)}c^{yz}$$
$$=(a^z-u)(a^z-(1-u))c^{(x+y)z}\left(\frac{1}{\lambda b^z-u}-\frac{1}{\lambda b^z-(1-u)}\right)$$

De la ecuación anterior, se observa que

$$(2u-1)\left(\sum_{n=0}^{\infty}H_n(x;u;a,b,c;\lambda)\frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}H_n(y;1-u;a,b,c;\lambda)\frac{z^n}{n!}\right)$$
$$=(a^z-1+u)\sum_{n=0}^{\infty}H_n(x+y;u;a,b,c;\lambda)\frac{z^n}{n!}-(a^z-u)\sum_{n=0}^{\infty}H_n(x+y;1-u;a,b,c;\lambda)\frac{z^n}{n!}$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
&(2u-1)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{n} H_r(x;u;a,b,c;\lambda)H_{n-r}(y;1-u;a,b,c;\lambda)\frac{z^n}{n!}\\
&=(u-1)\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x+y;u;a,b,c;\lambda)\frac{z^n}{n!}+u\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x+y;1-u;a,b,c;\lambda)\frac{z^n}{n!}\\
&+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}(\ln a)^{n-r}H_r(x+y;u;a,b,c;\lambda)\frac{z^n}{n!}\\
&-\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}(\ln a)^{n-r}H_r(x+y;1-u;a,b,c;\lambda)\frac{z^n}{n!}.
\end{aligned}
$$

De aquí se llega al resultado deseado.

2.2 Nuevos polinomios de Apostol-Bernoulli, Apostol-Euler y Apostol-Genocchi generalizados

En este apartado se presentan la nueva clase de polinomios de Apostol-Bernoulli generalizados $\mathfrak{B}_n^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda)$, Apostol-Euler generalizados, $\mathfrak{E}_n^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda)$ y ApostolGenocchi generalizados $\mathfrak{G}_n^{[m-1,\alpha]}(x;c,a,c;\lambda)$.

Definición 2.3

Para parámetros arbitrarios reales o complejos, $\alpha\in\mathbb{C}$ y para $a,c\in\mathbb{R}^+$, $n,m\in\mathbb{N}$ la nueva clase de polinomios Apostol-Bernoulli generalizados $\mathfrak{B}_n^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda)$, la nueva clase de polinomios Apostol-Euler generalizados $\mathfrak{E}_n^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda)$ y la nueva clase de polinomios Apostol-Genocchi generalizados $\mathfrak{G}_n^{[m-1,\alpha]}(x;c,a,c;\lambda)$, $m\in\mathbb{N}$, $\lambda\in\mathbb{C}$ se definen por las siguientes funciones generatrices, (ver [10]).

$$\left(\frac{z^m}{\lambda c^z - \sum_{l=0}^{m-1}\frac{(z\log a)^l}{l!}}\right)^{\alpha} c^{xz} = \sum_{n=0}^{\infty}\mathfrak{B}_n^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda)\frac{z^n}{n!}, \quad |z\log(\frac{c}{a})| < |\log(\lambda)|.$$

$$\left(\frac{2^m}{\lambda c^z + \sum_{l=0}^{m-1}\frac{(z\log a)^l}{l!}}\right)^{\alpha} c^{xz} = \sum_{n=0}^{\infty}\mathfrak{E}_n^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda)\frac{z^n}{n!}, \quad |z\log(c)| < |\log(-\lambda)|.$$

$$\left(\frac{(2z)^m}{\lambda c^z + \sum_{l=0}^{m-1}\frac{(z\log a)^l}{l!}}\right)^{\alpha} c^{xz} = \sum_{n=0}^{\infty}\mathfrak{G}_n^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda)\frac{z^n}{n!}, \quad |z\log(c)| < |\log(-\lambda)|.$$

Ahora, se enuncia el siguiente teorema donde se revisan algunas propiedades que cumplen los polinomios dados en la Definición 2.3.

Teorema 2.3

Para $m \in \mathbb{N}$, sea $\{\mathfrak{B}_n^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda)\}_{n\geq 0}$, $\{\mathfrak{E}_n^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda)\}_{n\geq 0}$ y $\{\mathfrak{G}_n^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda)\}_{n\geq 0}$ las sucesiones de los nuevos polinomios generalizados de Apostol-Bernoulli, Apostol-Euler y Apostol-Genocchi en la variable x, parámetros $\lambda\in\mathbb{C}$, a, $c\in\mathbb{R}^+$, de orden $\alpha\in\mathbb{C}$. Entonces las siguientes propiedades se cumplen:

(a) Valores especiales, para cada $n \in \mathbb{N}_0$

$$\mathfrak{B}_n^{[m-1,0]}(x;c,a;\lambda) = \mathfrak{E}_n^{[m-1,0]}(x;c,a;\lambda) = \mathfrak{G}_n^{[m-1,0]}(x;c,a;\lambda) = (x\ln c)^n.$$

(b) Fórmulas de suma

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}_n^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathfrak{B}_{n-k}^{[m-1,\alpha]}(c,a;\lambda)(x\ln c)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathfrak{B}_{n-k}^{[m-1,\alpha-1]}(c,a;\lambda)\mathfrak{B}_k^{[m-1,1]}(x;c,a;\lambda).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_n^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathfrak{E}_{n-k}^{[m-1,\alpha]}(c,a;\lambda)(x\ln c)^k\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathfrak{E}_{n-k}^{[m-1,\alpha-1]}(c,a;\lambda)\mathfrak{E}_k^{[m-1,1]}(x;c,a;\lambda).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}_n^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathfrak{G}_{n-k}^{[m-1,\alpha]}(c,a;\lambda)(x\ln c)^k\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathfrak{G}_{n-k}^{[m-1,\alpha-1]}(c,a;\lambda)\mathfrak{G}_k^{[m-1,1]}(x;c,a;\lambda).\end{aligned}$$

(c) Ecuaciones en diferencias

$$\begin{aligned}n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\mathfrak{B}_{n-k}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda)\mathfrak{B}_{n-k-1}^{[m-1,-1]}(x;c,a;\lambda) &= \lambda\mathfrak{B}_n^{[m-1,\alpha]}(x+1;c,a;\lambda)\\ &\quad -\mathfrak{B}_n^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathfrak{E}_{n-k}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda)\mathfrak{E}_{n-k}^{[m-1,-1]}(x;c,a;\lambda) &= \lambda\mathfrak{E}_n^{[m-1,\alpha]}(x+1;c,a;\lambda)\\ &\quad +\mathfrak{E}_n^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda).\end{aligned}$$

Para detalles de la demostración del Teorema 2.3, ver [10]

2.3 Polinomios tipo Apostol generalizados

En esta sección se estudiarán los polinomios conocidos como polinomios tipo Apostol generalizados, los cuales son de gran utilidad en la propuesta de investigación que se presenta en el capítulo 3.

Definición 2.4

Los polinomios tipo Apostol generalizados $\mathcal{F}_n^{(\alpha)}(x;\lambda;u,v)$ con $n\in\mathbb{N}_0$, $\lambda,\alpha,u,v\in\mathbb{C}$ de orden α se definen a través de la siguiente función generatriz, cf. [10]

$$\left(\frac{2^u z^v}{\lambda e^z+1}\right)^{\alpha} e^{xz} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n^{(\alpha)}(x;\lambda;u,v)\frac{z^n}{n!}; \quad (|z|<|\log(-\lambda)|), \tag{2.10}$$

Donde

$$\mathcal{F}_n^{(\alpha)}(\lambda;u,v) =: \mathcal{F}_n^{(\alpha)}(0;\lambda;u,v), \tag{2.11}$$

denotan los también llamados números tipo Apostol de orden α.

El siguiente teorema muestra relaciones análogas a las relaciones de las familias de polinomios estudiadas anteriormente.

Teorema 2.4

Para $\lambda, u, v \in \mathbb{C}$; $m, n \in \mathbb{N}$, si $v\alpha = 1$ y si $v = 1$ o $\alpha = 1$ los polinomios tipo Apostol cumplen con las siguientes relaciones respectivamente

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_n^{(\alpha)}(x;\lambda;u,v) &= \sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}2^{(u-1)\alpha}\mathfrak{G}_{n-m}(\lambda)\mathfrak{E}_m^{(\alpha-1)}(x;\lambda),\\
\mathcal{F}_n^{(\alpha)}(x;\lambda;u,v) &= \sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}2^{(u-1)\alpha}\mathfrak{G}_{n-m}(\lambda)\mathfrak{G}_m^{(\alpha-1)}(x;\lambda).
\end{aligned}$$

Para detalles de la demostración del Teorema 2.4, ver [16].

2.4 Polinomios tipo Apostol generalizados $Q_n^{[m-1,\alpha]}(x;b,c;\lambda;u,v)$

La unificación de las familias estudiadas en 2.3 y 2.4 producen la familia de polinomios tipo Apostol generalizados $Q_n^{[m-1,\alpha]}(x;b,c;\lambda,u,v)$ con $\lambda,u,v \in \mathbb{C}$ y $b,c \in \mathbb{R}^+$ que fueron estudiadas en [10], en esta sección se analizarán algunas de sus propiedades.

Definición 2.5

Para parámetros $\alpha, \lambda, u, v \in \mathbb{C}$ con $b, c \in \mathbb{R}^+$, la nueva familia de polinomios tipo Apostol generalizados $Q_n^{[m-1,\alpha]}(x;b,c;\lambda;u,v)$ de orden α se define por la siguiente generatriz:

$$\left(\frac{(2^u z^v)^m}{\lambda b^z + \sum\limits_{l=0}^{m-1} \frac{(z\log b)^l}{l!}}\right)^{\alpha} c^{xz} = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n^{[m-1,\alpha]}(x;b,c;\lambda;u,v)\frac{z^n}{n!}, \qquad (2.12)$$

Cuando $|z| < 2\pi, \lambda = 1, \quad |z| < \pi, \lambda = -1 \ (|z\log\left(\frac{b}{a}\right)|) < |\log(-\lambda)$ donde

$$Q_n^{[m-1,\alpha]}(b,c;\lambda;u,v) := Q_n^{[m-1,\alpha]}(0;b,c;\lambda;u,v), \qquad (2.13)$$

Teorema 2.5

Para $\alpha, \lambda, \beta, u, v \in \mathbb{C}$ con $b, c \in \mathbb{R}^+$ y $n, m \in \mathbb{N}_0$, la nueva clase de polinomios tipo Apostol generalizados $Q_n^{[m-1,\alpha]}(x;b,c;x;u;v)$ satisfacen las siguientes relaciones:

$$(a) \quad Q_n^{[m-1,\alpha+\beta]}(x+y;b,c;\lambda;u,v) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} Q_j^{[m-1,\alpha]}(x;b,c;\lambda;u,v)\, Q_{n-j}^{[m-1,\beta]}(y;b,c;\lambda;u,v), \qquad (2.14)$$

$$(b) \quad Q_n^{[m-1,\alpha]}(x+y;b,c;\lambda;u,v) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} Q_j^{[m-1,\alpha]}(y;b,c;\lambda;u,v)(x\log c)^{n-j}. \qquad (2.15)$$

DEMOSTRACIÓN 2.4.1 (a) *Por (2.12) se tiene,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_n^{[m-1,\alpha+\beta]}(x+y;b,c;\lambda;u,v)\frac{t^n}{n!} = \left(\frac{(2^u z^v)^m}{\lambda b^z + \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(z\log b)^l}{l!}}\right)^{\alpha+\beta} c^{(x+y)z}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{(2^u z^v)^m}{\lambda b^z + \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(z\log b)^l}{l!}}\right)^{\alpha} c^{xz} \left(\frac{(2^u z^v)^m}{\lambda b^z + \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(z\log b)^l}{l!}}\right)^{\beta} c^{yz} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} Q_n^{[m-1,\alpha]}(x;b,c;\lambda;u,v)\frac{z^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} Q_n^{[m-1,\beta]}(y;b,c;\lambda;u,v)\frac{z^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} Q_k^{[m-1,\alpha]}(x;b,c;\lambda;u,v)\, Q_{n-k}^{[m-1,\beta]}(y;b,c;\lambda;u,v)\frac{z^n}{n!}.
\end{aligned}
$$

De lo anterior se llega a (2.14).

(*b*) *Haciendo* $\beta = 0$ *en (2.14) se tiene,*

$$
\sum_{n=0}^{\infty} Q_n^{[m-1,\alpha]}(x+y;b,c;\lambda;u,v)\frac{z^n}{n!} = \left(\frac{(2^u z^v)^m}{\lambda b^z + \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(z\log b)^l}{l!}}\right)^{\alpha} c^{yz} c^{xz}. \tag{2.16}
$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} Q_n^{[m-1,\alpha]}(x+y;b,c;\lambda;u,v)\frac{z^n}{n!} &= \left(\frac{(2^u z^v)^m}{\lambda b^z + \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(z\log b)^l}{l!}}\right)^{\alpha} c^{yz} e^{\log c^{xz}} \\
&= \left(\frac{(2^u z^v)^m}{\lambda b^z + \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(z\log b)^l}{l!}}\right)^{\alpha} c^{yz} e^{(x\log c)z} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} Q_n^{[m-1,\alpha]}(y;b,c;\lambda;u,v)\frac{z^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} (x\log c)^n \frac{z^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} Q_k^{[m-1,\alpha]}(y;b,c;\lambda;u,v)(x\log c)^{n-k}\frac{z^n}{n!}.
\end{aligned}
$$

Por consiguiente, se llega a (2.15).

Corolario 2.1. Para $\alpha,\lambda,u,v \in \mathbb{C}$, $b,c \in \mathbb{R}^+$ y $n,m \in \mathbb{N}_0$, la nueva clase de polinomios tipo Apostol generalizados $Q_n^{[m-1,\alpha]}(x;b,c;\lambda;u,v)$ satisface las siguientes relaciones:

$$
Q_n^{[m-1,\alpha]}(x;b,c;\lambda;u,v) = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} Q_{n-j}^{[m-1,\alpha-1]}(b,c;\lambda;u,v)\, Q_j^{[m-1]}(x;b,c;\lambda;u,v), \tag{2.17}
$$

$$
Q_n^{[m-1,\alpha]}(x;b,c;\lambda;u,v) = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} Q_{n-j}^{[m-1,\alpha]}(b,c;\lambda;u,v)(x\log c)^j. \tag{2.18}
$$

Teorema 2.6

Para $\alpha, \lambda, u, v \in \mathbb{C}$, $b, c \in \mathbb{R}^{+}$, $n, m \in \mathbb{N}_0$ y $q \in \mathbb{Z}$, la nueva clase de polinomios tipo Apostol generalizados $Q_n^{[m-1,\alpha]}(x;b,c;\lambda;u,v)$ satisface la siguiente relación:

$$\frac{\partial^q}{\partial x^q}\left[Q_n^{[m-1,\alpha]}(x;b,c;\lambda;u,v)\right] = \frac{n!}{(n-q)!}(\log c)^q Q_{n-q}^{[m-1,\alpha]}(x;b,c;\lambda;u,v). \tag{2.19}$$

DEMOSTRACIÓN 2.4.2 *Aplicando (1.12) en (2.18) sigue,*

$$Q_n^{[m-1,\alpha]}(x;b,c;\lambda;u,v) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}Q_k^{[m-1,\alpha]}(b,c;\lambda;u,v)(x\log c)^{n-k}. \tag{2.19}$$

Ahora aplicando $\frac{\partial^q}{\partial x^q}$ en ambos miembros de (2.20), se sigue

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^q}{\partial x^q}Q_n^{[m-1,\alpha]}(x;b,c;\lambda;u,v) &= \frac{\partial^q}{\partial x^q}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}Q_k^{[m-1,\alpha]}(b,c;\lambda;u,v)(x\log c)^{n-k}\right]\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}Q_k^{[m-1,\alpha]}(b,c;\lambda;u,v)(\log c)^{n-k}\frac{\partial^q}{\partial x^q}\left[x^{n-k}\right]
\end{aligned}$$

Usando (1.7), desarrollando el combinatorio y amplificando por $(n-q)!$ *se tiene*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^q}{\partial x^q}\left[Q_n^{[m-1,\alpha]}(x;b,c;\lambda;u,v)\right] &= \sum_{k=0}^{n-q}\binom{n}{k}Q_k^{[m-1,\alpha]}(b,c;\lambda;u,v)(\log c)^{n-k}\frac{\Gamma(n-k+1)}{\Gamma(n-k-q+1)}x^{n-k-q}\\
&= \sum_{k=0}^{n-q}Q_k^{[m-1,\alpha]}(b,c;\lambda;u,v)(\log c)^{n-k}\frac{(n-q)!}{k!(n-q-k)!}\frac{n!}{(n-q)!}x^{n-q-k}.
\end{aligned}$$

Finalmente, aplicando (2.18) se obtiene (2.19)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^q}{\partial x^q}\left[Q_n^{[m-1,\alpha]}(x;b,c;\lambda;u,v)\right] &= \frac{n!}{(n-q)!}\sum_{k=0}^{n-q}\binom{n-q}{k}Q_k^{[m-1,\alpha]}(b,c;\lambda;u,v)(\log c)^q(x\log c)^{n-q-k}\\
&= \frac{n!}{(n-q)!}(\log c)^q\sum_{k=0}^{n-q}\binom{n-q}{k}Q_k^{[m-1,\alpha]}(b,c;\lambda;u,v)(x\log c)^{n-q-k}\\
&= \frac{n!}{(n-q)!}(\log c)^q Q_{n-q}^{[m-1,\alpha]}(x;b,c;\lambda;u,v).
\end{aligned}$$

Teorema 2.7

Para $q \in \mathbb{Z}, \alpha, \lambda, u, v \in \mathbb{C}$ y $b, c \in \mathbb{R}^{+}$, la nueva clase de polinomios tipo Apostol generalizados $Q_n^{[m-1,\alpha]}(x : b, c; \lambda; u, v)$ satisface la siguiente relación

$$z^q \left(\frac{(2^u z^v)^m}{\lambda b^z + \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(z \log b)^l}{l!}} \right)^{\alpha} c^{xz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n-q)!} Q_{n-q}^{[m-1,\alpha]}(x; b, c; \lambda; u, v) \frac{z^n}{n!}. \qquad (2.21)$$

DEMOSTRACIÓN 2.4.3 *Aplicando* $\frac{\partial^q}{\partial x^q}$ *en ambos miembros de (2.12), resulta*

$$\left(\frac{(2^u z^v)^m}{\lambda b^z + \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(t \log b)^l}{l!}} \right)^{\alpha} \frac{\partial^q}{\partial x^q} [c^{xz}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^q}{\partial x^q} \left[Q_n^{[m-1,\alpha]}(x; b, c; \lambda; u, v) \right] \frac{z^n}{n!}$$

usando el teorema (2.19), se sigue que

$$z^q (\log c)^q \left(\frac{(2^u z^v)^m}{\lambda b^z + \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(z \log b)^l}{l!}} \right)^{\alpha} c^{xz} = \sum_{n=0}^{\infty} (\log c)^q \frac{n!}{(n-q)!} Q_{n-q}^{[m-1,\alpha]}(x; b, c; \lambda; u, v) \frac{z^n}{n!};$$

como $c \in \mathbb{R}^{+}$ *se puede multiplicar por* $(\log c)^{-q}$ *en ambos miembros y se llega a la prueba.*

Ejemplo 2.1

Para $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}, m = 4, c = 2, a = 3, \alpha = 1, \mu = 2$ y $\nu = 5$, los primeros polinomios de Apostol Bernoulli generalizados y los polinomios tipo Apostol generalizados de nivel *m* son:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{B}_j^{[3,1]}(x;2,3;\lambda) &= 0, \quad j=0,1,2,3,\\
\mathfrak{B}_4^{[3,1]}(x;2,3;\lambda) &= \frac{24}{\lambda-1},\\
\mathfrak{B}_5^{[3,1]}(x;2,3;\lambda) &= \frac{120\left[\ln(2)x\lambda-\ln(2)x-\lambda\ln(2)+\ln(3)\right]}{(\lambda-1)^2}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q_j^{[3,1]}(x;2,3;\lambda;2;5) &= 0, \quad j=0,1,2,3,4,\\
Q_5^{[3,1]}(x;2,3;\lambda;2;5) &= 640\,\mathfrak{B}_4^{[3,1]}(x;2,3;\lambda),\\
Q_6^{[3,1]}(x;2,3;\lambda;2;5) &= 3\left(2^8\right)\mathfrak{B}_5^{[3,1]}(x;2,3;\lambda).
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2.2

Para $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{-1,1\}, m=3, c=e, a=3, \alpha=\sqrt{2}, \mu=\nu=4,$ los primeros polinomios generalizados de Apostol-Euler y los polinomios generalizados tipo Apostol de nivel *m* son:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{E}_0^{[2,\sqrt{2}]}(x;e,3;\lambda) &= \left(\frac{8}{\lambda+1}\right)^{\sqrt{2}},\\
\mathfrak{E}_1^{[2,\sqrt{2}]}(x;e,3;\lambda) &= \frac{8^{\sqrt{2}}}{(\lambda+1)^{1+\sqrt{2}}}\left[x\lambda+x-\sqrt{2}\lambda-\sqrt{2}\ln(3)\right],\\
\mathfrak{E}_2^{[2,\sqrt{2}]}(x;e,3;\lambda) &= \frac{8^{\sqrt{2}}}{(\lambda+1)^{2+\sqrt{2}}}\Big[(\lambda+1)^2x^2\\
&\quad -2\sqrt{2}(\lambda+1)(\lambda+\ln(3))x-2\sqrt{2}\lambda(1-\ln(3))^2+2(\lambda+\ln(3))^2\Big].\\
Q_j^{[2,\sqrt{2}]}(x;e,3;\lambda;4;4) &= 2^{\frac{5}{2}}\,\mathfrak{E}_j^{[2,\sqrt{2}]}(x;e,3;\lambda), \quad j=0,1,2,3.
\end{aligned}
$$

2.5 Matrices polinomiales

Se estudian ahora, ciertos tipos de matrices polinomiales y sus respectivas inversas, las condiciones utilizadas para presentar esta información son tenidas en cuenta al estudiar la matriz de los polinomios introducidos en el capítulo 3.

Definición 2.6

Para $\alpha \in \mathbb{C}$ se define la matriz de Bernoulli generalizada de tamaño $(n+1)\times(n+1)$ como, (cf. [40])

$$\mathcal{B}(x)^{(\alpha)} = B_{i,j}^{(\alpha)}(x) = \begin{cases} \binom{i}{j} B_{i-j}^{(\alpha)}(x), & \text{si} \quad i \geq j, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para valores fijos $\alpha = 1$, $x = 0$ se tiene, $B_n^{(1)}(x) = B_n(x)$; $B_n(0) = B_n$ llamadas, matriz polinomial de Bernoulli y matriz de Bernoulli respectivamente.

Teorema 2.8

La matriz de Bernoulli generalizada $\mathcal{B}^{(\alpha)}$ satisface la siguiente fórmula de producto.

$$\mathcal{B}^{(\alpha+\beta)}(x+y) = \mathcal{B}^{(\alpha)}(x)\,\mathcal{B}^{(\beta)}(y) = \mathcal{B}^{(\beta)}(x)\,\mathcal{B}^{(\alpha)}(y) = \mathcal{B}^{(\alpha)}(y)\,\mathcal{B}^{(\beta)}(x). \quad (2.22)$$

DEMOSTRACIÓN 2.5.1 *Sea* $B_{i,j}^{(\alpha,\beta)}(x,y)$ *la* (i,j) *entrada del producto matriz* $\mathcal{B}^{(\alpha)}(x)\,\mathcal{B}^{(\beta)}(y)$, *luego por la fórmula de adición (1.29) se tiene:*

$$\begin{aligned} B_{i,j}^{(\alpha,\beta)}(x,y) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{i}{k} B_{i-k}^{(\alpha)}(x) \binom{k}{j} B_{k-j}^{(\beta)}(y) \\ &= \sum_{k=j}^{i} \binom{i}{k} B_{i-k}^{(\alpha)}(x) \binom{k}{j} B_{k-j}^{(\beta)}(y) \\ &= \sum_{k=j}^{i} \binom{i}{j} \binom{i-j}{i-k} B_{i-k}^{(\alpha)}(x) B_{k-j}^{(\beta)}(y) \\ &= \binom{i}{j} \sum_{k=0}^{i-j} \binom{i-j}{k} B_{i-j-k}^{(\alpha)}(x) B_k^{(\beta)}(y) \\ &= \binom{i}{j} B_{i-j}^{(\alpha)}(x+y), \end{aligned}$$

lo que implica la primera igualdad de (2.22). *La segunda y tercera igualdad de* (2.22) *se pueden derivar de una manera similar.*

Como consecuencia del Teorema 2.8, se tienen los siguientes corolarios.

Corolario 2.2 Sea $(x_1,\ldots,x_k) \in \mathbb{R}^k$. Para α_j real o complejo, las matrices de Bernoulli $\mathcal{B}^{(\alpha_j)}(x)$ satisfacen la siguiente fórmula del producto, $j = 1,\ldots,k$.

$$\mathcal{B}^{(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k)}(x_1+x_2+\cdots+x_k) = \mathcal{B}^{(\alpha_1)}(x_1)\,\mathcal{B}^{(\alpha_2)}(x_2)\cdots\mathcal{B}^{(\alpha_k)}(x_k).$$

Corolario 2.3 La matriz de Bernoulli generalizada $\mathcal{B}^{(\alpha)}(x)$ satisface la siguiente identidad:

$$\left(\mathcal{B}^{(\alpha)}(x)\right)^k = \mathcal{B}^{(k\alpha)}(kx)$$

En particular,

$$(\mathcal{B}(x))^k = \mathcal{B}^{(k)}(kx), \tag{2.23}$$

$$\mathcal{B}^k = \mathcal{B}^{(k)}.$$

Para estudiar la inversa de la matriz de Bernoulli, se considera la matriz D de tamaño $(n+1)\times(n+1)$, cuyas entradas están definidas por

$$d_{i,j} = \begin{cases} \dfrac{1}{i-j+1}\dbinom{i}{j}, & i \geq j, \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Teorema 2.9

La inversa de la matriz de Bernoulli $\mathcal{B}$ está dada por

$$\mathcal{B}^{-1} = D.$$

Además,

$$\left[\mathcal{B}^{(k)}\left(\frac{k}{2}\right)\right]^{-1} = \mathcal{D}^k$$

DEMOSTRACIÓN 2.5.2 *Usamos la siguiente relación*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(1}{k+1}\binom{n}{k} B_{n-k} = \delta_{n,0},$$

donde $\delta_{n,0}$ *es el delta de Kronecker (cf., [28, p. 107-109]), se tiene*

$$\sum_{k=j}^{i}\binom{i}{k}\frac{1}{k-j+1}\binom{k}{j}B_{i-k}$$

$$=\binom{i}{j}\sum_{k=j}^{i}\binom{i-j}{k-j}\frac{1}{k-j+1}B_{i-k}$$

$$=\binom{i}{j}\sum_{k=0}^{i-j}\binom{i-j}{k}\frac{1}{k+1}B_{i-j-k} = \binom{i}{j}\delta_{i-j,0}$$

y en consecuencia, $\mathcal{B}\mathcal{D} = I_{n+1}$, por lo tanto $\mathcal{B}^{-1} = \mathcal{D}$.

El siguiente resultado establece una relación entre la matriz de Bernoulli generalizada y la matriz de Pascal generalizada de primer tipo.

Teorema 2.10

La matriz de Bernoulli generalizada $B^{(\alpha)}(x)$ satisface la siguiente relación.

$$\mathcal{B}^{(\alpha)}(x+y) = \mathcal{B}^{(\alpha)}(x)P[y] = P[x]\mathcal{B}^{(\alpha)}(y) = \mathcal{B}^{(\alpha)}(y)P[x]. \tag{2.24}$$

En particular,

$$\mathcal{B}(x+y) = P[x]\mathcal{B}(y) = P[y]\mathcal{B}(x), \tag{2.25}$$

$$\mathcal{B}(x) = P[x]\mathcal{B}. \tag{2.26}$$

Para detalles de la demostración del Teorema 2.10, (cf. [40]).

Ejemplo 2.3

Para el caso n=3.

$$\mathcal{B}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x-\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ x^2-x+\frac{1}{6} & 2x-1 & 1 & 0 \\ x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x & 3x^2-3x+\frac{1}{2} & 3x-\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 \\ x^2 & 2x & 1 & 0 \\ x^3 & 3x^2 & 3x & 1 \end{bmatrix}}_{P[x]} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}}$$

2.6 Extensiones de matrices tipo pascal generalizadas

Definición 2.7

Sean x,y dos números reales diferentes de cero. La extensión de la matriz de Pascal generalizada $\Phi_{i,j}[x,y]_n$ se define como:

$$\Phi_{i,j}[x,y]_n = \begin{cases} \binom{i}{j} x^{i-j} y^{i+j}, & i \geq j, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases} \tag{2.27}$$

donde $i, j = 0,1,2,...,n$.

Ejemplo 2.4

Matrriz de orden 4 x 4 dada en (2.27), viene expresada por:

$$\Phi_3[x,y] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ xy & y^2 & 0 & 0 \\ x^2y^2 & 2xy^3 & y^4 & 0 \\ x^3y^3 & 3x^2y^4 & 3xy^5 & y^6 \end{bmatrix}$$

El siguiente resultado muestra las entradas del producto de dos matrices dadas por (2.27).

Teorema 2.11

Para cuatro números diferentes de cero, x_1, y_1, x_2, y_2, se tiene

$$\Phi_{i,j}[x_1,y_1]_n \Phi_{i,j}[x_2,y_2]_n = \Phi_{i,j}\left[\frac{x_1}{y_2} + x_2y_1, y_1y_2\right]_n. \tag{2.28}$$

DEMOSTRACIÓN 2.6.1 *Sea* $\Phi_{i,j}[x_1,y_1]_n\Phi_{i,j}[x_2,y_2]_n = (C_{i,j}[x_1,y_1,x_2,y_2]_n)$. Entonces

$$\begin{aligned} C_{i,j}[x_1,y_1,x_2,y_2]_n &= \sum_{k=0}^{n} x_1^{i-k}y_1^{i+k}\binom{i}{k}x_2^{k-j}y_2^{k+j}\binom{k}{j} \\ &= \sum_{k=0}^{n} x_1^{i-k}y_1^{i+k}x_2^{k-j}y_2^{k+j}\binom{i}{j}\binom{i-j}{k-j} \\ &= \binom{i}{j}(y_1y_2)^{i+j}\sum_{k=0}^{n}\binom{i-j}{k-j}\left(\frac{x_1}{y_2}\right)^{i-k}(x_2y_1)^{k-j} \\ &= \binom{i}{j}(y_1y_2)^{i+j}\left(\frac{x_1}{y_2}+x_2y_1\right)^{i-j}. \end{aligned}$$

Como en la sección anterior, se necesita definir nuevas matrices para desarrollar propiedades que satisface la matriz (2.27). Sean las matrices $W_{i,j}[x,y]_n$, $U_{i,j}[x,y]_n$ definidas como sigue, (ver [39, p. 171]).

$$W_{i,j}[x,y]_n = \begin{cases} x^{i-j}y^{i+j}, & i \geq j, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases} \qquad i,j = 0,1,...,n.$$

$$\begin{aligned} U_{i,i}[x,y]_n &= y^{-2i} \quad \text{para} \quad i = 0,1,....,n. \\ U_{i+1,i}[x,y]_n &= -\frac{x}{y^{2i-1}} \quad \text{para} \quad i = 0,1,....,n-1. \\ U_{i,j}[x,y]_n &= 0 \quad \text{para} \quad i < j \quad o \quad j < i-1. \end{aligned} \qquad |(2.29)$$

Ejemplo 2.5

Matrices de orden 4 x 4 definidas en (2.29) y en (2.30), están dadas por

$$W_3[x,y] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ xy & y^2 & 0 & 0 \\ x^2y^2 & xy^3 & y^4 & 0 \\ x^3y^3 & x^2y^4 & xy^5 & y^6 \end{bmatrix}, \qquad U_3[x] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{x}{y} & \frac{1}{y^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{x}{y^3} & \frac{1}{y^4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{x}{y^5} & \frac{1}{y^6} \end{bmatrix}$$

El comportamiento de la matriz (2.27) para valores específicos de *x,y* se da a continuación:

$$\varphi_3[x,y] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ xy & y^2 & 0 & 0 \\ x^2y^2 & 2xy^3 & y^4 & 0 \\ x^3y^3 & 3x^2y^4 & 3xy^5 & y^6 \end{bmatrix}.$$

$$\varphi_3[1,1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\varphi_3[x,1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 \\ x^2 & 2x & 1 & 0 \\ x^3 & 3x^2 & 3x & 1 \end{bmatrix}$$

Luego, si en (2.27) hacemos $y = 1$, entonces

$$\mathcal{P}_{i,j}[x]_n = \Phi_{i,j}[x,1]_n. \tag{2.30}$$

Por otro lado, se tiene que

$$\mathcal{P}_{i,j} = \mathcal{P}_{i,j}[1]_n = \Phi_{i,j}[1,1]_n \tag{2.31}$$

Teorema 2.12

Para dos números reales x, y diferentes de cero, se tiene

$$\begin{aligned}
\varphi_{i,j}[-x,y]_n &= \varphi_{i,j}[x,-y]_n,\\
\varphi_{i,j}^{-1}[x,y]_n &= \varphi_{i,j}\left[-x,\frac{1}{y}\right]_n = \varphi_{i,j}\left[x,-\frac{1}{y}\right]_n,\\
W_{i,j}^{-1}[x,y]_n &= U_{i,j}[x,y]_n.
\end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN 2.6.2

$$\begin{aligned}
\varphi_{i,j}[-x,y]_n &= \begin{cases}\binom{i}{j}(-x)^{i-j}y^{i+j}, & i\geq j,\\ 0, & \textit{en otro caso.}\end{cases}\\
&= \begin{cases}\binom{i}{j}(-x)^{i}(-x)^{-j}y^{i}y^{j}, & i\geq j,\\ 0, & \textit{en otro caso.}\end{cases}\\
&= \begin{cases}\binom{i}{j}(-xy)^{i}\left(\frac{y}{-x}\right)^{j}, & i\geq j,\\ 0, & \textit{en otro caso.}\end{cases}\\
&= \begin{cases}\binom{i}{j}(x(-y))^{i}\left(\frac{-y}{x}\right)^{j}, & i\geq j,\\ 0, & \textit{en otro caso.}\end{cases}\\
&= \begin{cases}\binom{i}{j}x^{i}x^{-j}(-y)^{i}(-y)^{j}, & i\geq j,\\ 0, & \textit{en otro caso.}\end{cases}\\
&= \begin{cases}\binom{i}{j}x^{i-j}(-y)^{i+j}, & i\geq j,\\ 0, & \textit{en otro caso.}\end{cases}\\
&= \varphi_{i,j}[x,-y]_n.
\end{aligned}$$

Se demuestra ahora que, $\varphi_{i,j}\left[-x,\frac{1}{y}\right]_n = \varphi_{i,j}\left[x,-\frac{1}{y}\right]_n.$

$$
\begin{aligned}
\varphi_{i,j}\left[-x,\frac{1}{y}\right]_n &= \begin{cases} \binom{i}{j}(-x)^{i-j}\left(\frac{1}{(y)}\right)^{i+j}, & i\geq j,\\ 0, & \textit{en otro caso.}\end{cases}\\
&= \begin{cases} \binom{i}{j}(-x)^{i}(-x)^{-j}(y)^{-i}(y)^{-j}, & i\geq j,\\ 0, & \textit{en otro caso.}\end{cases}\\
&= \begin{cases} \binom{i}{j}\left(\frac{-x}{y}\right)^{i}(-xy)^{-j}, & i\geq j,\\ 0, & \textit{en otro caso.}\end{cases}\\
&= \begin{cases} \binom{i}{j}\left(\frac{x}{-y}\right)^{i}(x(-y))^{-j}, & i\geq j,\\ 0, & \textit{en otro caso.}\end{cases}\\
&= \begin{cases} \binom{i}{j}x^{i}x^{-j}(-y)^{-i}(-y)^{-j}, & i\geq j,\\ 0, & \textit{en otro caso.}\end{cases}\\
&= \begin{cases} \binom{i}{j}x^{i-j}(-y)^{-i-j}, & i\geq j,\\ 0, & \textit{en otro caso.}\end{cases}\\
&= \begin{cases} \binom{i}{j}x^{i-j}\left(\frac{1}{(-y)}\right)^{i+j}, & i\geq j,\\ 0, & \textit{en otro caso.}\end{cases}\\
&= \varphi_{i,j}\left[x,-\frac{1}{y}\right]_n.
\end{aligned}
$$

Se define la siguiente matriz:

$$
\overline{P}_{k-1}\left[\frac{x}{y}\right] = \begin{cases} \binom{i-1}{j-1}\left(\frac{x}{y}\right)^{i-j}, & i,j=0,1,2,\ldots,k,\\ 1, & i=j=0,\\ 0 & i\neq 0, j=0 \quad \vee \quad i=0, j\neq 0.\end{cases} \tag{2.32}
$$

Teorema 2.13

Sean *x,y* dos números reales diferentes de cero. Entonces se cumple,

$$W_{i,j}[x,y]_k \overline{P}_{i,j} \begin{bmatrix} \frac{x}{y} \end{bmatrix}_{k-1} = \Phi_{i,j}[x,y]_k, \qquad k \geq 1.$$

DEMOSTRACIÓN 2.6.3 *Sea* $W_{i,j}[x,y]_k \overline{P}_{i,j} \begin{bmatrix} \frac{x}{y} \end{bmatrix}_{k-1} = (C_{i,j}[x,y]_k)$*, luego tenemos que,* $C_{i,0}[x,y]_k = x^i y^i \quad i = 0,1,...,n$ *y* $C_{i,j}[x,y]_k = 0$ *para* $i < j$*. Entonces para* $i > j$ *tenemos,*

$$\begin{aligned} C_{i,j}[x,y]_k &= \sum_{h=0}^{k} x^{i-h} y^{i+h} \binom{h-1}{j-1} \left(\frac{x}{y}\right)^{h-j} \\ &= x^i y^i \sum_{h=0}^{i} x^{-j} y^j \binom{h-1}{j-1} \\ &= x^{i-j} y^{i+j} \binom{i}{j}. \end{aligned}$$

Una forma alternativa de definir (2.27) es la siguiente:

La extensión de la matriz de Pascal generalizada $\phi_{i,j}[x,y]_n = [\varphi_{i,j}[x,y]]$ se define como:

$$\varphi_{i,j}[x,y] = \begin{cases} \binom{i-1}{j-1} x^{i-j} y^{i+j-2}, & i \geq j, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{2.33}$$

Definición 2.8

Sean *x,y* dos números reales positivos, $n \in \mathbb{Z}^+$. Se define la extensión de la matriz de Fibonacci generalizada $\mathbf{F}_{i,j}[x,y]_n = [f_{i,j}[x,y]]$ como: (ver [21, p.480])

$$f_{i,j}[x,y] = \begin{cases} F_{i-j+1}x^{i-j}y^{i+j-2}, & i \geq j, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{2.34}$$

Ejemplo 2.6

Matriz de 3 x 3 definida en (2.34), esta dada por

$$\mathbf{F}_3[x,y] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ xy & y^2 & 0 \\ 2x^2y^2 & xy^3 & y^4 \end{bmatrix}$$

Se considera la siguiente matriz:

Definición 2.9

Para dos variables relaes diferentes de cero x, y, la matriz infinita $\mathbf{L}_{ij}[x,y] = [\iota_{ij}[x,y]]$ es definida como sigue (ver [21, p..482]):

$$\iota_{ij}[x,y] = \left(\binom{i-1}{j-1} - \binom{i-2}{j-1} - \binom{i-3}{j-1}\right)x^{i-j}y^{j-i}. \tag{2.35}$$

De acuerdo a la Definición 2.9 de la matriz, $\mathbf{L}[x,y]$, se tiene que

$$\iota_{1,1}[x,y] = 1,\ \iota_{1,j}[x,y] = 0, \text{ para } j \geq 2,$$

También,

$$\iota_{21}[x,y] = 0,\ \iota_{22}[x,y] = 1, \text{ y } \iota_{2j}[x,y] = 0, \text{ para } j \geq 3.$$

Además, se tiene que $\iota_{i,1}[x,y] = -x^{i-1}y^{1-i}$ para $i \geq 3$ y para $i, j \geq 2$,

$$\iota_{i,j}[x,y] = \iota_{i-1,j-1}[x,y] + \iota_{i-1,j}[x,y]xy^{-1}. \tag{2.36}$$

Ejemplo 2.7

Matriz de 3 x 3 definida en (2.35), esta dada por:

$$\mathbf{L}_3[x,y] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x^2y^{-2} & xy^{-1} & 1 \end{bmatrix}$$

Teorema 2.14

Sea $\mathbf{L}[x,y]$ la matriz infinita definida en (2.35). Para la matriz infinita generalizada de Pascal $\varphi[x,y]$ y la matriz infinita generalizada $F[x,y]$, tenemos.

$$\varphi_{i,j}[x,y] = \mathbf{F}_{i,j}[x,y] * \mathbf{L}_{i,j}[x,y].$$

Para ver detalles de la prueba (cf, [39]).

Capítulo 3

Nueva familia de polinomios generalizados tipo Apostol Frobenius-Euler de nivel m

En este capítulo se toma como base las familias de polinomios estudiadas en el capítulo anterior, se define una nueva extensión de los polinomios generalizados tipo Apostol Frobenius-Euler $\mathcal{H}_n^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u)$. Se demuestran algunas propiedades algebraicas y diferenciales de estos nuevos polinomios así como también fórmulas de conexión con otros polinomios y números. Además, se introduce una generalización de la matriz polinomial de Apostol Frobenius-Euler y algunas de sus propiedades. Por último, se mostrarán algunos ejemplos.

3.1 Nueva familia de polinomios $\mathcal{H}_n^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u)$–algunas propiedades

Definición 3.1

Para parámetros $\alpha,\lambda,u \in \mathbb{C}$ y $a,c \in \mathbb{R}^+$, la nueva familia de polinomios tipo Apostol Frobenius-Euler generalizados de orden α y nivel m en variable x, denotada como $\mathcal{H}_n^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u)$ se define por la siguiente función generatriz:

$$\left[\frac{\displaystyle\sum_{h=0}^{m-1}\frac{(z\ln a)^h}{h!}-u^m}{\lambda c^z-u^m}\right]^{\alpha} c^{xz}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{H}_n^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u)\frac{z^n}{n!},$$

donde $|z| < \left| \frac{\ln(u^m)}{\ln(c)} - \frac{\ln(\lambda)}{\ln(c)} \right|$.

Para $x = 0$ se obtienen los números tipo Apostol Frobenius-Euler generalizados con

$\lambda \in \mathbb{C}$, $a,c \in \mathbb{R}^+$, orden $\alpha \in \mathbb{C}$ y nivel $m \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{H}_n^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u) := \mathcal{H}_n^{[m-1,\alpha]}(0;c,a;\lambda;u). \tag{3.1}$$

Se observa que los polinomios $\mathcal{H}_n^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u)$ cumplen las careterísticas de la Definición dada en 1.2, por lo tanto, se puede decir que los polinomios $\mathcal{H}_n^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u)$ son de Appell.

Teorema 3.1

Para $m \in \mathbb{N}$, sea $\{\mathcal{H}_n^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u)\}_{n\geq 0}$, la sucesión de la nueva familia de polinomios tipo Apostol Frobenius-Euler generalizados de orden α y nivel m en variable x. Entonces las siguientes propiedades se cumplen:

(a) Para $\alpha = 0$ y $n \in \mathbb{N}_0$

$$\mathcal{H}_n^{[m-1,0]}(x;c;a;\lambda;u) = (x \ln c)^n. \tag{3.4}$$

(b) Para $\alpha, \lambda \in \mathbb{C}$ y $n,k \in \mathbb{N}_0$, se tiene la relación

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_n^{[m-1,\alpha]}(x;c;a;\lambda;u) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathcal{H}_{n-k}^{[m-1,\alpha-1]}(c;a;\lambda;u)(x \ln c)^k, \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathcal{H}_{n-k}^{[m-1,\alpha-1]}(c;a;\lambda;u)\mathcal{H}_k^{[m-1,1]}(x;c;a;\lambda;u). \end{aligned} \tag{3.5}$$

(c) Relación Diferencial. Para $m \in \mathbb{N}$ y $n, j \in \mathbb{N}_0$ con $0 \leq j \leq n$, se cumple

$$[\mathcal{H}_n^{[m-1,\alpha]}(x;c;a;\lambda;u)]^{(j)} = \frac{n!}{(n-j)!}(\ln c)^j \mathcal{H}_{n-j}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u). \quad (3.6)$$

(d) Fórmula integral. Para $m \in \mathbb{N}$, se tiene

$$\int_{x_0}^{x_1} \mathcal{H}_n^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u)\,dx = \frac{\ln c}{n+1}\left[\mathcal{H}_{n+1}^{[m-1,\alpha]}(x_1;c,a;\lambda;u) - \mathcal{H}_{n+1}^{[m-1,\alpha]}(x_0;c,a;\lambda;u)\right]$$

(e) Adición del argumento.

$$\mathcal{H}_n^{[m-1,\alpha+\beta]}(x+y;c,a;\lambda;u) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathcal{H}_k^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u)\,\mathcal{H}_{n-k}^{[m-1,\beta]}(y;c,a;\lambda;u), \quad (3.7)$$

$$\mathcal{H}_n^{[m-1,\alpha]}(x+y;c,a;\lambda;u) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathcal{H}_{n-k}^{[m-1,\alpha]}(y;c,a;\lambda;u)(x\ln c)^k, \quad (3.8)$$

$$((x+y)\ln c)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathcal{H}_{n-k}^{[m-1,\alpha]}(y;c;a;\lambda;u)\mathcal{H}_k^{[m-1,-\alpha]}(x;c;a;\lambda;u). \quad (3.9)$$

DEMOSTRACIÓN 3.1.1 *Se demostrarán las propiedades (3.7) y (3.9), las otras se demuestran con argumentos análogos. Para (3.7) se tiene por la Definición 3.1,*

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{H}_n^{[m-1,\alpha+\beta]}(x+y;c,a;\lambda;u)\frac{t^n}{n!} &= \left[\frac{\sum_{h=0}^{m-1}\frac{(z\ln a)^h}{h!} - u^m}{\lambda c^z - u^m}\right]^{(\alpha+\beta)} c^{(x+y)z} \\
&= \left[\frac{\sum_{h=0}^{m-1}\frac{(z\ln a)^h}{h!} - u^m}{\lambda c^z - u^m}\right]^{\alpha} c^{xz}\left[\frac{\sum_{h=0}^{m-1}\frac{(z\ln a)^h}{h!} - u^m}{\lambda c^z - u^m}\right]^{\beta} c^{yz} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{H}_n^{[m-1,\alpha]}(x;ca;\lambda;u)\frac{z^n}{n!}\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{H}_n^{[m-1,\beta]}(y;c;a;\lambda;u)\frac{z^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathcal{H}_k^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u)\mathcal{H}_{n-k}^{[m-1,\beta]}(y;c,a;\lambda;u)\frac{z^n}{n!}
\end{aligned}$$

Se estudia ahora la prueba de (3.9).

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n^{[m-1,\alpha+\beta]}(x+y;c,a;\lambda;u)\frac{z^n}{n!} &= \left[\frac{\sum_{h=0}^{m-1}\frac{(z\ln a)^h}{h!}-u^m}{\lambda c^z-u^m}\right]^{(\alpha+\beta)} c^{(x+y)z} \\
&= \left[\frac{\sum_{h=0}^{m-1}\frac{(z\ln a)^h}{h!}-u^m}{\lambda c^z-u^m}\right]^{\alpha} c^{xz}\left[\frac{\sum_{h=0}^{m-1}\frac{(z\ln a)^h}{h!}-u^m}{\lambda c^z-u^m}\right]^{\beta} c^{yz} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u)\frac{z^n}{n!}\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n^{[m-1,-\alpha]}(y;c;a;\lambda;u)\frac{z^n}{n!} \\
&= c^{(x+y)z} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}((x+y)\log c)^n\frac{z^n}{n!}.
\end{aligned}
$$

3.2 Fórmulas de conexión de los polinomios $\mathcal{H}_n^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u)$

Los siguientes teoremas muestran algunas relaciones de los polinomios $\{\mathcal{H}_n^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u)\}$ con los polinomios de Genocchi, los polinomios de Jacobi, los polinomios de Bernoulli generalizados $B_n^{[m-1]}(x)$ y los números de Stirling de segunda clase, entre otras.

Teorema 3.2

Para $m \in \mathbb{N}$, la nueva familia de polinomios tipo Apostol Frobenius-Euler generalizados de orden α y nivel m en variable x, está relacionada con los polinomios de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, por medio de la siguiente expresión:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{H}_n^{[m-1,\alpha]}(x+y;c,a;\lambda;u) \\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\sum_{j=k}^{n} j!(\ln c)^j\binom{j+\alpha}{j-k}\binom{n}{j}\frac{(1+\alpha+\beta+2k)}{(1+\alpha+\beta+k)_{j+1}}\mathcal{H}_{n-j}^{[m-1,\alpha]}(y;c,a;\lambda;\mu;\nu)P_k^{(\alpha,\beta)}(1-2x).
\end{aligned} \tag{3.10}
$$

DEMOSTRACIÓN 3.2.1 *Sustituyendo* (1.72) *en el lado derecho de* (3.8) *y usando identidades de coeficientes binomiales apropiadas (ver, por ejemplo [3, 6, 9]), se tiene*

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{H}_n^{[m-1,\alpha]}(x+y;c,a;\lambda;u)\\
&=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\mathcal{H}_j^{[m-1,\alpha]}(y;c,a;\lambda;u)(n-j)!(\ln c)^{n-j}\sum_{k=0}^{n-j}(-1)^k\binom{n-j+\alpha}{n-j-k}\frac{(1+\alpha+\beta+2k)}{(1+\alpha+\beta+k)_{n-j+1}}P_k^{(\alpha,\beta)}(1-2x)\\
&=\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-j}\binom{n}{j}\mathcal{H}_j^{[m-1,\alpha]}(y;c,a;\lambda;u)(n-j)!(\ln c)^{n-j}(-1)^k\binom{n-j+\alpha}{n-j-k}\frac{(1+\alpha+\beta+2k)}{(1+\alpha+\beta+k)_{n-j+1}}P_k^{(\alpha,\beta)}(1-2x)\\
&=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n}{j}\binom{n-j+\alpha}{n-j-k}\mathcal{H}_j^{[m-1,\mu]}(y;c,a;\lambda;u)(n-j)!(\ln c)^{n-j}\frac{(1+\alpha+\beta+2k)}{(1+\alpha+\beta+k)_{n-j+1}}P_k^{(\alpha,\beta)}(1-2x)\\
&=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\sum_{j=k}^{n}j!(\ln c)^j\binom{j+\alpha}{j-k}\binom{n}{j}\frac{(1+\alpha+\beta+2k)}{(1+\alpha+\beta+k)_{j+1}}\mathcal{H}_{n-j}^{[m-1,\alpha]}(y;c,a;\lambda;u)P_k^{(\alpha,\beta)}(1-2x).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, (3.10) *se cumple.*

Teorema 3.3

Para $m\in\mathbb{N}$, los polinomios tipo Apostol Frobenius-Euler generalizados de nivel m $\mathcal{H}_n^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u)$, están relacionados con los polinomios de Bernoulli generalizados de nivel m $B_n^{[m-1]}(x)$, por medio de la siguiente fórmula:

$$
\mathcal{H}_n^{[m-1,\alpha]}(x+y;c,a;\lambda;u)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=k}^{n}\frac{k!(\ln c)^j}{(k+m)!}\binom{n}{j}\binom{j}{k}\mathcal{H}_{n-j}^{[m-1,\alpha]}(y;c,a;\lambda;\mu;\nu)B_{j-k}^{[m-1]}(x). \tag{3.11}
$$

DEMOSTRACIÓN 3.2.2 *Sustituyendo* (1.60) *en el lado derecho de* (3.8)*, es suficiente seguir los argumentos dados en la demostración del Teorema 3.2 y haciendo las modificaciones correspondientes se llega a la prueba de (3.11).*

Teorema 3.4

Para $m\in\mathbb{N}$, la nueva familia de polinomios tipo Apostol Frobenius-Euler generalizados de nivel m $\mathcal{H}_n^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u)$, está relacionada con los polinomios de Genocchi $G_n(x)$, por medio de la siguiente identidad:

$$\mathcal{H}_n^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u)$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{(\ln c)^k}{k+1}\left[\binom{n}{k}\mathcal{H}_{n-k}^{[m-1,\alpha]}(y;c,a;\lambda;u)+\sum_{j=k}^{n}\binom{n}{j}\binom{j}{k}\mathcal{H}_{n-j}^{[m-1,\alpha]}(y;c,a;\lambda;u)(\ln c)^{j-k}\right]G_{k+1}(x)$$
(3.12)

DEMOSTRACIÓN 3.2.3 *Al sustituir* (1.26) *en el lado derecho de* (3.8)*, se observa que*

$$\mathcal{H}_n^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u)$$
$$=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\mathcal{H}_j^{[m-1,\alpha]}(y;c,a;\lambda;u)\frac{(\ln c)^{n-j}}{2(n-j+1)}\left[\sum_{k=0}^{n-j}\binom{n-j+1}{k+1}G_{k+1}(x)+G_{n-j+1}(x)\right]$$
$$=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\mathcal{H}_j^{[m-1,\alpha]}(y;c,a;\lambda;u)\frac{(\ln c)^{n-j}}{2(n-j+1)}\sum_{k=0}^{n-j}\binom{n-j+1}{k+1}G_{k+1}(x)$$
$$+\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\mathcal{H}_j^{[m-1,\alpha]}(y;c,a;\lambda;u)\frac{(\ln c)^{n-j}}{2(n-j+1)}G_{n-j+1}(x).$$

Luego, usando identidades apropiadas (ver [3, 6, 9]), se obtiene:

$$\mathcal{H}_n^{[m-1,\alpha]}(x+y;c,a;\lambda;u)$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{(\ln c)^k}{k+1}\left[\sum_{j=k}^{n}\binom{n}{j}\binom{j}{k}\mathcal{H}_{n-j}^{[m-1,\alpha]}(y;c,a;\lambda;u)(\ln c)^{j-k}+\binom{n}{k}\mathcal{H}_{n-k}^{[m-1,\alpha]}(y;c,a;\lambda;u)\right]G_{k+1}(x)$$

Por lo tanto, (3.12) *se cumple.*

Teorema 3.5

Para $m\in\mathbb{N}$, la nueva familia de polinomios tipo Apostol Frobenius-Euler generalizados de nivel m $\mathcal{H}_n^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u)$, está relacionada con los polinomios de Apostol-Euler $\mathfrak{E}_n(x;\lambda)$, por medio de la siguiente expresión:

$$\mathcal{H}_n^{[m-1,\alpha]}(x+y;c,a;\lambda;u)$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left[\lambda\mathcal{H}_n^{[m-1,\alpha]}(y+1;c,a;\lambda;u)+(\ln c)^j\mathcal{H}_n^{[m-1,\alpha]}(y;c,a;\lambda;u)\right]\mathfrak{E}_{n-j}(x;\lambda).$$
(3.13)

DEMOSTRACIÓN 3.2.4 *Reemplazando* (1.39) *en el lado derecho de* (3.8) *se tiene,*

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H}_n^{[m-1,\alpha]}(x+y;c,a;\lambda;u)\\
&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathcal{H}_k^{[m-1,\alpha]}(y;c,a;\lambda;u)(\ln c)^{n-k}\left(\frac{1}{2}\right)\left[\lambda\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n-k}{j}\mathfrak{E}_j(x;\lambda)+\mathfrak{E}_{n-k}(x;\lambda)\right]\\
&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathcal{H}_k^{[m-1,\alpha]}(y;c,a;\lambda;u)(\ln c)^{n-k}\left(\frac{\lambda}{2}\right)\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n-k}{j}\mathfrak{E}_j(x;\lambda)\\
&\quad+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathcal{H}_k^{[m-1,\alpha]}(y;c,a;\lambda;u)(\ln c)^{n-k}\left(\frac{1}{2}\right)\mathfrak{E}_{n-k}(x;\lambda). \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

De la primera suma en (3.14) *se tiene,*

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathcal{H}_k^{[m-1,\alpha]}(y;c,a;\lambda;u)(\ln c)^{n-k}\left(\frac{\lambda}{2}\right)\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n-k}{j}\mathfrak{E}_j(x;\lambda)\\
&=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n}{k}(\ln c)^{n-k}\left(\frac{\lambda}{2}\right)\binom{n-k}{j}\mathcal{H}_k^{[m-1,\alpha]}(y;c,a;\lambda;u)\mathfrak{E}_j(x;\lambda)\\
&=\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{\lambda}{2}\right)\binom{n}{j}\mathfrak{E}_j(x;\lambda)\sum_{k=0}^{n-j}\binom{n-j}{k}\mathcal{H}_k^{[m-1,\alpha]}(y;c,a;\lambda;u)(\ln c)^{n-k}\\
&=\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{\lambda}{2}\right)\binom{n}{j}\mathfrak{E}_j(x;\lambda)\mathcal{H}_{n-j}^{[m-1,\alpha]}(y+1;c,a;\lambda;u). \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

Para la segunda suma en (3.14)*, se obtiene*

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathcal{H}_k^{[m-1,\alpha]}(y;c,a;\lambda;u)(\ln c)^{n-k}\left(\frac{1}{2}\right)\mathfrak{E}_{n-k}(x;\lambda)\\
&=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathcal{H}_{n-k}^{[m-1,\alpha]}(y;c,a;\lambda;u)(\ln c)^{k}\mathfrak{E}_k(x;\lambda). \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

Combinando (3.15) *y* (3.16) *se tiene,*

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H}_n^{[m-1,\alpha]}(x+y;c,a;\lambda;u)\\
&=\left(\frac{\lambda}{2}\right)\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\mathfrak{E}_j(x;\lambda)\mathcal{H}_{n-j}^{[m-1,\alpha]}(y+1;c,a;\lambda;u)\\
&\quad+\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\mathcal{H}_{n-j}^{[m-1,\alpha]}(y;c,a;\lambda;u)(\ln c)^{j}\mathfrak{E}_j(x;\lambda)\\
&=\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left[\lambda\mathcal{H}_n^{[m-1,\alpha]}(y+1;c,a;\lambda;u)+(\ln c)^{j}\mathcal{H}_n^{[m-1,\alpha]}(y;c,a;\lambda;u)\right]\mathfrak{E}_{n-j}(x;\lambda)\ .
\end{aligned}$$

Por lo tanto (3.13) se cumple.

Para $m \in \mathbb{N}$, $\alpha, \lambda, u, \in \mathbb{C}$, $a, c \in \mathbb{R}^+$ y $n \in \mathbb{N}_0$, se cumple

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_n^{[m-1,\alpha]}(x+y;c,a;\lambda;u) &= \sum_{k=0}^{n} k!\binom{x}{k}\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n}{j}\mathcal{H}_j^{[m-1,\alpha]}(y;c,a;\lambda;u)(\ln c)^{n-j}S(n-j,k)\\ &= \sum_{k=0}^{n} k!\binom{x}{k}\sum_{j=k}^{n}\binom{n}{n-j}\mathcal{H}_{n-j}^{[m-1,\alpha]}(y;c,a;\lambda;u)(\ln c)^{j}S(j,k).\end{aligned} \tag{3.17}$$

DEMOSTRACIÓN 3.2.5 *Al sustituir* (1.8) *en el lado derecho de* (3.8), *se tiene que*

$$\begin{aligned}&\mathcal{H}_n^{[m-1,\alpha]}(x+y;c,a;\lambda;u)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathcal{H}_k^{[m-1,\alpha]}(y;c,a;\lambda;u)(\ln c)^{n-k}\left(\sum_{j=0}^{n-k}\binom{x}{j}k!S(n,k)\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n}{k}\mathcal{H}_k^{[m-1,\alpha]}(y;c,a;\lambda;u)(\ln c)^{n-k}\left(\binom{x}{j}k!S(n,k)\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n} k!\binom{x}{k}\sum_{j=k}^{n}\binom{n}{n-j}\mathcal{H}_{n-j}^{[m-1,\alpha]}(y;c,a;\lambda;u)(\ln c)^{j}S(j,k).\end{aligned}$$

Por lo tanto, (3.17) *se demuestra.*

3.3 Implementación de ejemplos de los polinomios $\mathcal{H}_n^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u)$

Se concluye esta sección presentando algunos ejemplos de los polinomios aquí definidos, estos han sido programados en MAPLE.

Ejemplo 3.1

Para un $\lambda \in \mathbb{C}$, $m = 2$, $c = 2$, $a = 3$, $\alpha = \frac{1}{2}$, y $u = 2$ los primeros polinomios de la nueva familia tipo Apostol Frobenius-Euler generalizados de orden α y nivel m en variable x, son:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_0^{[1,(\frac{1}{2})]}(x;2,3;\lambda;2) &= \sqrt{\frac{3}{\lambda-4}},\\
\mathcal{H}_1^{[1,(\frac{1}{2})]}(x;2,3;\lambda;2) &= \sqrt{\frac{-3}{\lambda-4}}x\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\ln 3}{\lambda-4}+\frac{3\lambda\ln 2}{(\lambda-4)^2}\right)+x\ln 4\right],\\
\mathcal{H}_2^{[1,(\frac{1}{2})]}(x;2,3;\lambda;2) &= \frac{1}{2}x^2\left[\left(\frac{-3}{4}\sqrt{\frac{-3}{\lambda-4}}\left(\frac{\ln 3}{\lambda-4}+\frac{3\lambda\ln 2}{(\lambda-4)^2}\right)^2+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-3}{\lambda-4}}\frac{-2\ln 3\ln 2}{(\lambda-4)^2}\right.\right.\\
&\quad \left.-\frac{6\lambda^2\ln 4}{(\lambda-4)^3}+\frac{3\lambda\ln 4}{(\lambda-4)^2}\right)+x\ln 2\sqrt{\frac{-3}{\lambda-4}}\left(\frac{\ln 3}{\lambda-4}+\frac{3\ln 2}{(\lambda-4)^4}\right)\\
&\quad \left.+x^2\ln 4\sqrt{\frac{-3}{\lambda-4}}\right].
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.2

Para un $\lambda \in \mathbb{C}$, $m = 4$, $c = 2$, $a = 3$, $\alpha = 1$, y $u = 2$ los primeros polinomios de la nueva familia tipo Apostol Frobenius-Euler generalizados de orden α y nivel m en variable x, son:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_0^{[3,1]}(x;2,3;\lambda;2) &= \frac{-15}{\lambda-16},\\
\mathcal{H}_1^{[3,1]}(x;2,3;\lambda;2) &= x\left[\frac{\ln 3}{\lambda-16}+\frac{\lambda 15\ln 2}{(\lambda-16)^2}-x\frac{15\ln 2}{\lambda-16}\right],\\
\mathcal{H}_2^{[3,1]}(x;2,3;\lambda;2) &= \frac{1}{2}x^2\left[\frac{\ln 9}{\lambda-16}-\lambda\frac{2\ln 3\ln 2}{(\lambda-16)^2}+x\frac{2\ln 3\ln 2}{\lambda-16}-\lambda^2\frac{30\ln 4}{(\lambda-16)^3}+x\frac{30\lambda\ln 4}{(\lambda-16)^2}\right.\\
&\quad \left.+\lambda\frac{15\ln 4}{(\lambda-16)^2}-x^2\frac{15\ln 4}{\lambda-16}\right].
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.3

Para un $\lambda \in \mathbb{C}$, $m = 2$, $c = 3$, $a = e$, $\alpha = \frac{1}{3}$, y $u = 5$ los primeros polinomios de la nueva familia tipo Apostol Frobenius-Euler generalizados de orden α y nivel m en variable

x, son:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}_0^{[1,(\frac{1}{3})]}(x;3,e;\lambda;5) &= \sqrt[3]{\frac{-24}{\lambda-25}},\\
\mathcal{H}_1^{[1,(\frac{1}{3})]}(x;3,e;\lambda;5) &= x\Big[\frac{1}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{\lambda-25}{-24}\right)^2}\Big(\frac{\ln(\frac{3060513257434037}{1125899906842624})}{\lambda-25}+\lambda\frac{24\ln 3}{(\lambda-25)^2}\Big)\\
&\quad +x\ln 3\sqrt[3]{\frac{-24}{\lambda-25}}\Big],\\
\mathcal{H}_2^{[1,(\frac{1}{3})]}(x;3,e;\lambda;5) &= \frac{1}{2}x^2\Big[\Big(\frac{2}{9}\sqrt[3]{\left(\frac{\lambda-25}{-24}\right)^5}\frac{\ln(\frac{3060513257434037}{1125899906842624})}{\lambda-25}+\lambda\frac{24\ln 3}{(\lambda-25)^2}\Big)^2\\
&\quad +\frac{2}{3}x\sqrt[3]{\left(\frac{\lambda-25}{-24}\right)^2}\ln 3\Big(\frac{\ln(\frac{3060513257434037}{1125899906842624})}{\lambda-25}+\lambda\frac{24\ln 3}{(\lambda-25)^2}\Big)\\
&\quad +\frac{1}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{\lambda-25}{-24}\right)^2}\Big(-2\ln 3\frac{\ln(\frac{3060513257434037}{1125899906842624})}{(\lambda-25)}-\lambda^2\frac{-48\ln 9}{(\lambda-25)^3}\\
&\quad +\lambda\frac{24\ln 9}{(\lambda-25)^2}\Big)\\
&\quad +x^2\ln 9\sqrt[3]{\frac{-24}{\lambda-25}}\Big].
\end{aligned}
$$

3.4 Enfoque matricial de los polinomios $\mathcal{H}_n^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u)$

Definición 3.2

La matriz de la nueva familia de polinomios tipo Apostol Frobenius-Euler generalizados de nivel m, $\mathcal{V}_{i,j}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u)$ de tamaño $(n+1)$ x $(n+1)$ con $m\in\mathbb{N}$, $\alpha,\lambda,u\in\mathbb{C}$ y a,c números reales positivos, se define por:

$$
\mathcal{V}_{i,j}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u)=\begin{cases}\binom{i}{j}\mathcal{H}_{i-j}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u), & i\geq j,\\ 0, & \text{en otro caso.}\end{cases}
$$

Las matrices:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{V}^{[m-1]}(x;c,a;\lambda;u) &:= \mathcal{V}^{[m-1,1]}(x;c,a;\lambda;u),\\
\mathcal{V}^{[m-1]}(c,a;\lambda;u) &:= \mathcal{V}^{[m-1]}(0;c,a;\lambda;u).
\end{aligned}
$$

Se denominan, la matriz polinomial Apostol-Frobenius-Euler y la matriz ApostolFrobenius-Euler, respectivamente.

Para $\alpha = 0$, se cumple $\mathcal{H}_n^{[m-1,0]}(x;c,a;\lambda;u) = (x\ln(c))^n$. Así,

$$\mathcal{V}^{[m-1,0]}(x;c,a;\lambda;u) = P_c[x].$$

Es claro que, (3.8) produce la siguiente identidad:

$$\mathcal{V}^{[m-1,\alpha]}(x+y;c,a;\lambda;u) = \mathcal{V}^{[m-1,\alpha]}(y;c,a;\lambda;u)P_c[x].$$

Teorema 3.7

Para $m \in \mathbb{N}$, sea $\{\mathcal{H}_n^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u)\}_{n\geq 0}$, $\{\mathcal{H}_n^{[m-1,\beta]}(x;c,a;\lambda;u)\}_{n\geq 0}$, la sucesión de la nueva familia de polinomios tipo Apostol Frobenius-Euler generalizados de orden α y nivel m en variable x. Entonces las siguientes fórmulas del producto se cumplen:

$$\begin{aligned}\mathcal{V}^{[m-1,\alpha+\beta]}(x+y;c,a;\lambda;u) &= \mathcal{V}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u)\,\mathcal{V}^{[m-1,\beta]}(y;c,a;\lambda;u) \\ &= \mathcal{V}^{[m-1,\beta]}(x;c,a;\lambda;u)\,\mathcal{V}^{[m-1,\alpha]}(y;c,a;\lambda;u) \\ &= \mathcal{V}^{[m-1,\alpha]}(y;c,a;\lambda;u)\,\mathcal{V}^{[m-1,\beta]}(x;c,a;\lambda;u).\end{aligned} \tag{3.18}$$

DEMOSTRACIÓN 3.4.1 *Sea* $B_{i,j,c}^{[m-1,\alpha,\beta]}(a;\lambda;u)(x,y)$ *la entrada* (i,j) *del producto de las matrices* $\mathcal{V}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u)\,\mathcal{V}^{[m-1,\beta]}(y;c,a;\lambda;u)$, *luego por la fórmula de adición* (3.7) *se cumple:*

$$\begin{aligned}B_{i,j,c}^{[m-1,\alpha,\beta]}(a;\lambda;u)(x,y) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{i}{k}\mathcal{H}_{i-k}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u)\binom{k}{j}\mathcal{H}_{k-j}^{[m-1,\beta]}(y;c,a;\lambda;u) \\ &= \sum_{k=j}^{i}\binom{i}{k}\mathcal{H}_{i-k}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u)\binom{k}{j}\mathcal{H}_{k-j}^{[m-1,\beta]}(y;c,a;\lambda;u) \\ &= \sum_{k=j}^{i}\binom{i}{j}\binom{i-j}{i-k}\mathcal{H}_{i-k}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u)\mathcal{H}_{k-j}^{[m-1,\beta]}(y;c,a;\lambda;u) \\ &= \binom{i}{j}\sum_{k=0}^{i-j}\binom{i-j}{k}\mathcal{H}_{i-j-k}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u)\mathcal{H}_{k}^{[m-1,\beta]}(y;c,a;\lambda;u) \\ &= \binom{i}{j}\mathcal{H}_{i-j}^{[m-1,\alpha+\beta]}(x+y;c,a;\lambda;u),\end{aligned}$$

lo que implica la primera igualdad del teorema. La segunda y tercera igualdad se pueden obtener de una manera similar.

Corolario 3.1 Para $m \in \mathbb{N}$, sea $\{\mathcal{H}_n^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u)\}_{n\geq 0}$, $\{\mathcal{H}_n^{[m-1,\beta]}(x;c,a;\lambda;u)\}_{n\geq 0}$, la sucesión de la nueva familia de polinomios tipo Apostol Frobenius-Euler generalizados de orden α y nivel *m* en variable *x* y $P_c[x]$ la matriz de Pascal generalizada de primer tipo en base *c*. Entonces:

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}^{[m-1,\alpha]}(x+y;c,a;\lambda;u) &= \mathcal{V}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u)P_c[y] \\
&= P_c[x]\mathcal{V}^{[m-1,\alpha]}(y;c,a;\lambda;u) \\
&= \mathcal{V}^{[m-1,\alpha]}(y;c,a;\lambda;u)P_c[x].
\end{aligned}$$

En particular

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}^{[m-1]}(x+y;c,a;\lambda;u) &= P_c[x]\mathcal{V}^{[m-1]}(y;c,a;\lambda;u) \\
&= P_c[y]\mathcal{V}^{[m-1]}(x;c,a;\lambda;u).
\end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN 3.4.2 *Para* β = 0 *de* (3.18) *se tiene,*

$$\mathcal{V}^{[m-1,\alpha]}(x+y;c,a;\lambda;u) = \mathcal{V}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u)\mathcal{V}^{[m-1,0]}(y;c,a;\lambda;u)$$

Dado que, $\mathcal{V}^{[m-1,0]}(y;c,a;\lambda;u) = P_c[y]$, *entonces,*

$$\mathcal{V}^{[m-1,\alpha]}(x+y;c,a;\lambda;u) = \mathcal{V}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u)P_c[y]. \tag{3.19}$$

Un argumento similar permite mostrar que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}^{[m-1,\alpha]}(x+y;c,a;\lambda;u) &= P_c[x]\mathcal{V}^{[m-1,\alpha]}(y;c,a;\lambda;u) \\
&= \mathcal{V}^{[m-1,\alpha]}(y;c,a;\lambda;u)P_c[x].
\end{aligned}$$

Finalmente, la sustitución α=1 *en* (3.19) *y su combinación con las ecuaciones anteriores completa la prueba.*

Usando la relación (1.73) y el Colorario 3.4 se obtiene la siguiente factorización para $\mathcal{V}^{[m-1,\alpha]}(x+y;c,a;\lambda;u)$ en términos de matrices de suma.

$$\mathcal{V}^{[m-1,\alpha]}(x+y;c,a;\lambda;u) = \mathcal{V}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u)G_{n,c}[y]G_{n-1,c}[y]\cdots G_{1,c}[y].$$

3.5 Implementación de ejemplos matriciales

Bajo la elección apropiada de los parámetros, nivel y orden, es posible proporcionar algunos ejemplos ilustrativos de las matrices generalizadas de polinomios Apostol Frobenius-Euler.

Ejemplo 3.4

Para $m=1$, $c=a=e=\exp(1)$, $\alpha=1$, $\lambda=-1$. Los primeros cuatro polinomios de $\mathcal{H}_k^{[1-1,1]}(x;e,e;1;u)$ $k=0,1,2,3$ son:

$$\mathcal{H}_0^{[1-1,1]}(x;e,e;1;u) = 1,$$

$$\mathcal{H}_1^{[1-1,1]}(x;e,e;1;u) = x - \frac{1}{1-u},$$

$$\mathcal{H}_2^{[1-1,1]}(x;e,e;1;u) = x^2 - \frac{2}{1-u}x + \frac{1+u}{(1-u)^2},$$

$$\mathcal{H}_3^{[1-1,1]}(x;e,e;1;u) = x^3 - \frac{3}{1-u}x^2 + \frac{3(1+u)}{(1-u)^2}x - \frac{u^2+4u+1}{(1-u)^3}.$$

Por lo tanto, para $n=3$ se sigue:

$$\mathcal{V}^{[m-1,1]}(x;e,e;1;u) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x-\frac{1}{1-u} & 1 & 0 & 0 \\ x^2-\frac{2}{1-u}x+\frac{1+u}{(1-u)^2} & x-\frac{1}{1-u} & 1 & 0 \\ x^3-\frac{3}{1-u}x^2+\frac{3(1+u)}{(1-u)^2}x-\frac{u^2+4u+1}{(1-u)^3} & x^2-\frac{2}{1-u}x+\frac{1+u}{(1-u)^2} & x-\frac{1}{1-u} & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 3.5

Para $m = 1$, $c = a = e = \exp(1)$, $\lambda = 1$ y $u = -1$. Los primeros cuatro polinomios $\mathcal{H}_k^{[1-1,\alpha]}(x;e,e;1;-1)$, $k = 0,1,2,3$ son:

$$\mathcal{H}_0^{[1-1,\alpha]}(x;e,e;1;-1) = 1,$$

$$\mathcal{H}_1^{[1-1,\alpha]}(x;e,e;1;-1) = x - \frac{\alpha}{2},$$

$$\mathcal{H}_2^{[1-1,\alpha]}(x;e,e;1;-1) = x^2 - \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{4},$$

$$\mathcal{H}_3^{[1-1,\alpha]}(x;e,e;1;-1) = x^3 - \frac{3\alpha}{2}x^2 + \frac{3\alpha(\alpha-1)}{4}x - \frac{3\alpha^2(\alpha-1)}{8}.$$

Es así que, para $n = 3$ se deduce:

$$\mathcal{V}^{[m-1,\alpha]}(x;e,e;1;-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x-\frac{\alpha}{2} & 1 & 0 & 0 \\ x^2-\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{4} & 2x-\alpha & 1 & 0 \\ x^3-\frac{3\alpha}{2}x^2+\frac{3\alpha(\alpha-1)}{4}x-\frac{3\alpha^2(\alpha-1)}{8} & 3\left(x^2-\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{4}\right) & 3\left(x-\frac{\alpha}{2}\right) & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3.6

Del ejemplo 3.3, para $\lambda \in \mathbb{C}$, $m = c = 2$, $a = 3$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $u = 2$, se tiene:

$$\mathcal{V}^{[1,\frac{1}{2}]}(x;2,3;\lambda;2) = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{3}{\lambda-4}} & 0 & 0 \\ \mathcal{H}_1^{[1,(\frac{1}{2})]}(x;2,3;\lambda;2) & \sqrt{\frac{3}{\lambda-4}} & 0 \\ \frac{32}{\sqrt{1+\lambda}} & 0 & 0 \\ \mathcal{H}_2^{[1,(\frac{1}{2})]}(x;2,3;\lambda;2) & 2\mathcal{H}_1^{[1,(\frac{1}{2})]}(x;2,3;\lambda;2) & \sqrt{\frac{3}{\lambda-4}} \end{bmatrix}$$

3.6 Factorización de la nueva matriz $\mathcal{V}^{[m-1,\alpha]}(x+y;c,a;\lambda;u)$, a través de las matrices de Fibonacci, Lucas y Pell

Para obtener la factorización de la nueva matriz $\mathcal{V}^{[m-1,\alpha]}(x+y;c,a;\lambda;u)$ en términos de las matrices de Fibonacci y Lucas se consideran las siguientes matrices:

Definición 3.3

Para $m \in \mathbb{N}$, a, c números reales positivos, $\lambda, u \in \mathbb{C}$, α real o complejo y $0 \leq i, j \leq n$, sea $\mathbb{K}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u)$ la matriz cuyas entradas están dadas por (cf. [40]):

$$\begin{aligned} \tilde{r}_{i,j}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u) &= \binom{i}{j}\mathcal{H}_{i-j}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u) - \binom{i-1}{j}\mathcal{H}_{i-j-1}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u) \\ &\quad -\binom{i-2}{j}\mathcal{H}_{i-j-2}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u). \end{aligned}$$

Similarmente, sea $\mathcal{B}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u)$ la matriz cuyas entradas están dadas por (cf. [40]):

$$\begin{aligned} \tilde{s}_{i,j}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u) &= \binom{i}{j}\mathcal{H}_{i-j}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u) - \binom{i}{j+1}\mathcal{H}_{i-j-1}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u) \\ &\quad -\binom{i}{j+2}\mathcal{H}_{i-j-2}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u). \end{aligned}$$

OBSERVACIÓN 3.6.1 *De las Definiciones de* $\mathbb{K}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u)$ *y* $\mathcal{B}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u)$ *se tiene que:*

$$\begin{aligned} \tilde{r}_{0,0}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u) &= \tilde{r}_{1,1}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u) = \tilde{s}_{0,0}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u) \\ &= \tilde{s}_{1,1}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u) = \mathcal{H}_{0}^{[m-1,\alpha]}(c,a;\lambda;u), \end{aligned}$$

$$\tilde{r}_{0,j}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u) = \tilde{s}_{0,j}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u) = 0, \quad j \geq 1,$$

$$\begin{aligned} \tilde{r}_{1,0}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u) &= \tilde{s}_{1,0}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u) \\ &= \mathcal{H}_{1}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u) - \mathcal{H}_{0}^{[m-1,\alpha]}(c,a;\lambda;u), \end{aligned}$$

$$\tilde{r}_{1,j}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u) = \tilde{s}_{1,j}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u) = 0, \quad j \geq 2,$$

$$\begin{aligned} \tilde{r}_{i,0}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u) &= \tilde{s}_{i,0}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u) \\ &= \mathcal{H}_{i}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u) - \mathcal{H}_{i-1}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u) \\ &\quad -\mathcal{H}_{i-2}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u), \quad i \geq 2. \end{aligned}$$

Teorema 3.8

La matriz polinomial de Apostol Frobenius-Euler generalizada de nivel m, $\mathcal{V}^{[m-1,\alpha]}(x+y;c,a;\lambda;u)$ puede ser factorizada en términos de la matriz de Fibonacci F de la siguiente forma:

$$\mathcal{V}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u) = \mathcal{F}\,\mathbb{K}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u), \tag{3.20}$$

o,

$$\mathcal{V}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u) = \mathcal{B}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u)\,\mathcal{F}. \tag{3.21}$$

DEMOSTRACIÓN 3.6.1 *Dado que la relación* (3.20) *es equivalente a*

$$\mathcal{F}^{-1}\,\mathcal{V}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u) = \mathbb{K}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u),$$

siguiendo las ideas de [22, Teorema 4.1], haciendo las modificaciones correspondientes y teniendo en cuenta las observación 3.6.1, sigue (3.20).

De las relaciones (3.20) y (3.21) sigue la siguiente identidad:

$$\mathbb{K}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u) = \mathcal{F}^{-1}\,\mathcal{B}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u)\,\mathcal{F}.$$

Se propone a continuación otro tipo de factorización a través de la matriz de Lucas, para tal fin, se hace necesario introducir las siguientes matrices:

Definición 3.4

Para $m \in \mathbb{N}$; $a,c \in \mathbb{R}^+$, $\lambda, u \in \mathbb{C}$, α real o complejo y $0 \leq i, j \leq n$, sea $\mathcal{L}_1^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u)$ la matriz cuyas entradas están dadas por

$$\begin{aligned} l_{i,j,1}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u) \;&=\; \binom{i}{j}\mathcal{H}_{i-j}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u) - 3\binom{i-j}{j}\mathcal{H}_{i-j-1}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u) \\ &\quad +5\sum_{k=j}^{i-2}(-1)^{i-k}2^{i-k-2}\binom{k}{j}\mathcal{H}_{k-j}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u). \end{aligned}$$

Similarmente, sea $\mathcal{L}_2^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u)$ la matriz cuyas entradas están dadas por

$$\begin{aligned} l_{i,j,2}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u) &= \binom{i}{j}\mathcal{H}_{i-j}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u) - 3\binom{i}{j+1}\mathcal{H}_{i-j-1}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u) \\ &+5\sum_{k=j+1}^{i}(-1)^{k-j}2^{k-j-2}\binom{i}{k}\mathcal{H}_{i-k}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u). \end{aligned}$$

Un razonamiento análogo al utilizado en la demostración del Teorema 3.6 permite probar el siguiente resultado.

Teorema 3.9

La matriz polinomial de Apostol Frobenius-Euler generalizada de nivel *m*, $\mathcal{V}^{[m-1,\alpha]}(x+y;c,a;\lambda;u)$ puede ser factorizada en términos de la matriz de Lucas $\mathcal{L}$ de la siguiente forma:

$$\mathcal{V}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u) = \mathcal{L}\mathcal{L}_1^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u), \tag{3.22}$$

$$\mathcal{V}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u) = \mathcal{L}_2^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u)\mathcal{L}. \tag{3.23}$$

3.7 Implementación de ejemplo usando el Teorema 3.8

El siguiente ejemplo muestra de manera particular la factorización dada para la matriz $\mathcal{V}^{[m-1,\alpha]}(x+y;c,a;\lambda;u)$, en el Teorema 3.8.

Ejemplo 3.7

Para $n=2$, usando la Definición 3.3 se tiene

$$\mathbb{K}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u) = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 \\ a_1-a_0 & a_0 & 0 \\ a_2-a_1-a_0 & 2a_1-a_0 & a_0 \end{bmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} a_0 &= \mathcal{H}_0^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u), \\ a_1 &= \mathcal{H}_1^{[1-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u), \\ a_2 &= \mathcal{H}_2^{[1-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u). \end{aligned}$$

De la Definición 1.18, se tiene

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ahora, multiplicando las matrices F y $\mathbb{K}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u)$ se obtiene,

$$\begin{aligned} F\,\mathbb{K}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 \\ a_1 - a_0 & a_0 & 0 \\ a_2 - a_1 - a_0 & 2a_1 - a_0 & a_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 \\ a_2 & 2a_1 & a_0 \end{bmatrix} = \mathcal{V}_3^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u). \end{aligned}$$

Se propone ahora, estudiar la factorización de la matriz $\mathcal{V}^{[m-1,\alpha]}(x+y;c,a;\lambda;u)$ a partir de la matriz de Pell, S dada en la Definición 1.22, para ello, se hace necesario considerar la siguiente matriz:

Definición 3.5

Para $m \in \mathbb{N}$, a,c números reales positivos, $\lambda, u \in \mathbb{C}$, α números reales o complejos y sea $0 \leq i,j \leq n$, $\mathbb{L}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u)$ la matriz cuyas entradas están dadas por

$$\begin{aligned} l_{i,j}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u) &= \binom{i-1}{j-1}\mathcal{H}_{i-j}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u) - 2\binom{i-2}{j-1}\mathcal{H}_{i-j-1}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u) \\ &\quad - \binom{i-3}{j-1}\mathcal{H}_{i-j-2}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u). \end{aligned}$$

Es fácil demostrar el siguiente resultado a partir de un razonamiento análogo al utilizado en la demostración del Teorema 3.6.

Teorema 3.10

La matriz polinomial de Apostol-Frobenius-Euler generalizada de nivel m, $\mathcal{V}^{[m-1,\alpha]}(x+y;c,a;\lambda;u)$ puede ser factorizada en términos de la matriz de Pell *S,* de la siguiente forma:

$$\mathcal{V}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u) = S\mathbb{L}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u). \tag{3.24}$$

Ejemplo 3.8

Para $n=2$, usando la Definición 3.5 se tiene

$$\mathbb{L}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u) = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 \\ a_1-2a_0 & a_0 & 0 \\ a_2-2a_1-a_0 & 2a_1-2a_0 & a_0 \end{bmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} a_0 &= \mathcal{H}_0^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u), \\ a_1 &= \mathcal{H}_1^{[1-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u), \\ a_2 &= \mathcal{H}_2^{[1-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u). \end{aligned}$$

De la Definición 1.22, se tiene

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ahora, multiplicando las matrices S y $\mathbb{L}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u)$ se obtiene,

$$\begin{aligned} S\mathbb{L}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 \\ a_1-2a_0 & a_0 & 0 \\ a_2-2a_1-a_0 & 2a_1-2a_0 & a_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 \\ a_2 & 2a_1 & a_0 \end{bmatrix} = \mathcal{V}_3^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u). \end{aligned}$$

Capitulo 4

Conclusión

Para el desarrollo de la presente investigación se hizo necesario el estudio de familias de polinomios teniendo en cuenta sus funciones generatrices; en tal sentido se estudiaron polinomios y números de Bernoulli, Euler y Genocchi, polinomios de Apostol-Bernoulli, polinomios de Apostol-Euler y polinomios de Apostol-Genocchi, entre otros. Adicionalmente, se estudiaron matrices polinomiales tipo Pascal, así como algunas de sus propiedades algebraicas. Estos tópicos fueron presentados en los capítulos 1 y 2.

En el capítulo 3 se introduce la definición de la nueva familia de polinomios generalizados tipo Apostol Frobenius-Euler de nivel *m*, $\mathcal{H}_n^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u)$, , y la nueva matriz polinomial de estos polinomios; se demuestran algunos teoremas sobre propiedades que cumple esta familia de polinomios tales como relación diferencial, fórmula integral, adición del argumento y fórmulas de conexión de esta nueva familia de polinomios con algunos polinomios mostrados en los capítulos 1 y 2. Así mismo, siguiendo las ideas de [26,36], se define la matriz $\mathcal{V}^{[m-1,\alpha]}(x+y;c,a;\lambda;u)$ y se demuestra su relación con la matriz de Pascal y la matriz de Fibonacci, entre otras.

Las perspectivas de investigación sobre los resultados obtenidos, permiten involucrar a los estudiantes del Programa de Matemáticas y de Maestría en Ciencias Matemáticas de la Universidad del Atlántico en el marco del semillero de Funciones Especiales: Teoría de Aproximación, orientado por uno de los autores, como también a estudiantes de

Ciencias e Ingeniería e investigadores cuyo interés sean las Funciones especiales y sus Aplicaciones. Se espera asesorar tesis de Pregrados y de Maestrías en cuyo proceso se estudien problemas abiertos, producto de la investigación aquí presentada, participación en congresos especializados para difundir los resultados obtenidos y avanzar en el nivel de la investigación para generar artículos con fines de publicaciones en revistas de alto impacto.

Bibliografía

[1] Apostol, T.: On the Lerch Zeta function. Pacific J. Math. 1, 161-167. (1951).

[2] Apostol, T.: Introduction to Analitic Number Theory. Springer-Verlag, New York. (1976).

[3] Askey, R.: Orthogonal Polynomials and Special Functions, Regional Conference Series in Applied Mathematics. SIAM. J. W. Arrowsmith Ltd., Bristol 3, England. (1975).

[4] Bayad, A., Kim, T.: Identities for Apostol-Type Frobenius-Euler Polynomias Resulting from the Study of a Nonlinear Operator. Russi. Jou. Mat. Phy. 23, 164-171. (2016).

[5] Choi, J., Kim, D.S., Kim, T., Kim, Y.H.: A note on some identities of Frobenius-Euler numbers and polynomials. Int. J. Math. Math. Sci. 2012, 1-9. (2012).

[6] Comtet, L.: The Art of Finite and Infinite Expansions. Reidel Dordrecht and Boston. (1974).

[7] Erdélyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F., Tricomi, F.: Higher Trascendental Functions. Vol 1. (1953).

[8] Cheon G.-S. and Kim J.-S. Stirling matrix via Pascal matrix, Linear Algebra Appl. Vol 329, 49-59. (2001).

[9] Graham, R.L., Knuth, D.E., Patashnik, O.: Concrete Mathematics, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., New York. (1994).

[10] Hernández-Llanos, P., Quintana, Y., Urieles, A.: About extensions of generalized Apostol-type polynomials. Results Math. 68, 203-225. (2015).

[11] Kurt, B.: Some relationships between the generalized Apostol-Bernoulli and Apostol-Euler polynomials. Turk. J. Anal. Number Theory. 1, 54-58. (2013).

[12] Kurt, B., Simsek, Y.: On the generalized Apostol-type Frobenius-Euler polynomials. Adv. Difference Equ. 1, 1-10. (2013).

[13] Kurt, B.: On the Multiple Sums of Bernoulli, Euler and Genocchi Polynomials. Int. Journal of Math. Analysis. 8, 373-387. (2013).

[14] Comtet, L. Advanced Combinatorics. The art of finite and infinite expansions. Translated from French by J. W. Nienhuys. (1974).

[15] Lee, G.-Y, Kim, J.-S. Lee. S.-G.: Factorizations and eigenvalues of Fibonacci and symmetric Fibonacci matrices, Fibonacci Quart. 1, 203-213. (2002).

[16] Lu, D.-Q., Luo, Q.-M.: Some properties of the generalized Apostol-type polynomials. Bound. Value Probl. 64, 1-13. (2013).

[17] Luck, Y.: The Special Functions and their Approximations. Acudemic Press (1969).

[18] Luo, Q.-M.: Extensions of the Genocchi polynomials and its Fourier expansions and integral representations. Osaka J. Math. 48, 291-309. (2011).

[19] Luo, Q.-M., Srivastava, H.M.: Some generalizations of the Apostol-Bernoulli and Apostol-Euler polynomials. J. Math. Anal. Appl. 1, 290-302. (2005).

[20] Luo, Q.-M., Srivastava, H.M.: Some relationships between the Apostol-Bernoulli and Apostol-Euler polynomials. Comput. Math. Appl. 51, 631-642. (2006).

[21] Gwang, L. and Seong, C. The generalized Pascal matrix via the generalized Fibonacci matrix and the generalized Pell matrix. J. Korean Math. Soc. 45, 479-491. (2008).

[22] Natalini, P., Bernardini, A.: A generalization of the Bernoulli polynomials. J. Appl. Math. 3, 155-163. (2003).

[23] Oldham, K., Spanier, J.: The fractional Calculus. T. Appl. of Differentiation. El Sevier Science (1974).

[24] Quintana, Y. Ramírez, W. and Urieles, A.: On an operational matrix method based on generalized Bernoulli polynomials of level m. Calcolo. 55(3), 29 (2018).

[25] Quintana, Y. Ramírez, W. and Urieles, A.: Generalized Apostol-Type polynomials matrix and its algebraic properties. Math. Repo. (2019). 21(2), 249-264.

[26] Rainville, ED.: Special Functions. Macmillan Company, New York (1960). Reprinted by Chelsea publishing Company, Bronx. (1971).

[27] Ramírez, W., Castilla, L., Urieles, G.: An Extended Generalized q-Extensions for the Apostol Type Polynomials, Abstract and Applied Analysis. Abstract and Applied Analisis (2018).

[28] Riordan, J.: Combinatorial identities. Wiley, New York, London and Sydney. (1968).

[29] Simsek, Y.: Generating functions for generalized Stirling type numbers, array type polynomials, Eulerian type polynomials and their application. arXiv:1111.3848v2.

[30] Srivastava, H.M., Choi, J.: Series associated with the Zeta and related funtions. Kluwer Academic. Springor Netherlands (2001).

[31] Srivastava, H.M., Choi, J.: Zeta and q-Zeta Functions and Associated Series and Integrals. Elsevier, Amsterdam. (2012).

[32] Srivastava, H.M. Manocha, H.L.: A Treatise on Generating Functions. Ellis Horwood Ltd., West Sussex, England. (1984).

[33] Szego, G.: Orthogonal Polynomials, American Math. Soc. Providence, Rhode Island. (1939).

[34] Tremblay, R., Gaboury, S. and Fugère, B-J.: A new class of generalized Apostol-Bernoulli and some analogues of the Srivastava-Pintér addition theorem. Appl. Math. Lett. 24, 1888-1893. (2011).

[35] Yeon, G. and Seong, H.: The generalized Pascal matrix via the generalized Fibonacci matrix and the generalized Pell matrix. J. Korean Math. 45, 479 -991. (2008).

[36] Wang, W., Jia, C., Wang, T.: Some results on the Apostol-Bernoulli and Apostol-Euler polynomials, Comput. Math. Appl. 55, 1322-1332. (2008).

[37] Whittaker, E., Watson, G.: A course of modern Analysis. (1915).

[38] Zhang, Z. and Zhang, Y.: The Lucas matrix and some combinatorial identities. Indian J. Pure Appl. Math. (2007).

[39] Zhang, Z. Liu, M. An extension of the generalized Pascal matrix and its algebraic properties. (1998).

[40] Zhang, Z. Wang, J.: Bernoulli matrix and its algebraic properties. (2006).

Acerca de los autores

Alejandro Urieles Guerrero

Docente e investigador de la Universidad del Atlántico adscrito a la Facultad de Ciencias Básicas, Programa de Matemáticas en la línea de análisis. Perteneció al Departamento de Matemáticas Puras y Aplicadas de la Universidad Simón Bolívar (USB) Caracas, Venezuela. Es Licenciado en Matemáticas y Física, Especialista en Matemática Avanzada, M.Sc. en Matemáticas y Dr. en Matemáticas. Su investigación se ha basado principalmente en funciones especiales y análisis armónico donde registra varias publicaciones en revistas especializadas de alto impacto. El Dr. Urieles es reviewer de revistas de matemáticas puras y aplicadas y par evaluador reconocido por Colciencias. Actualmente orienta el semillero de investigación Teoría de Aproximación: Funciones Especiales en la Universidad del Atlántico.

María José Ortega Wilches

Docente e investigadora de la Universidad de la Costa (CUC), adscrita al Departamento de Ciencias Naturales y Exactas. Impartió docencia en la Universidad del Atlántico en las Facultades de Ingeniería y Educación. En la Universidad Central de Venezuela (UCV) participó en el proyecto “La Educación Matemática para Ingeniería y Arquitectura: aplicaciones de la matemática en contexto”, adscrita al Departamento de Educación para Ingeniería. Es Licenciada en Educación con énfasis en Matemáticas y M.Sc. en Didáctica de las Matemáticas. Autora de varias publicaciones en distintos temas de la enseñanza de las matemáticas y análisis matemático.

William Ramírez Quiroga

Docente e investigador de la Universidad de la Costa (CUC), adscrito al Departamento de Ciencias Naturales y Exactas. Impartió docencia en la Universidad del Atlántico en las Facultades de Ingeniería y Educación. Es Licenciado en Educación con énfasis en Matemáticas y M.Sc. en Ciencias Matemáticas. Autor de varias publicaciones en funciones especiales registradas en revistas especializadas de alto impacto.

Listado de Símbolos

$\mathbb{N}_0$	el conjunto de los números naturales incluyendo el cero.
$\mathbb{Z},\mathbb{N},\mathbb{R},\mathbb{C}$	números enteros, naturales, reales y complejos respectivamente.
$\mathbb{P}$	espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales.
$\mathcal{P}$	espacio vectorial de los polinomios con coeficientes complejos.
$\mathbb{M}(\mathbb{K})$	espacio vectorial de las matrices $(n+1)\times(n+1)$ con entradas en un campo $\mathbb{K}$.
B_n	números de Bernoulli.
E_n	números de Euler.
G_n	números de Genocchi.
$B_n(x)$	polinomios de Bernoulli.
$E_n(x)$	polinomios de Euler.
$G_n(x)$	polinomios de Genocchi.
$H_n(u)$	números de Frobenius–Euler.
$H_n(x;u)$	polinomios de Frobenius–Euler.
$\mathfrak{B}_n(\lambda;x)$	*n*-ésimo polinomio de Apostol-Bernoulli.
$\mathfrak{E}_n(\lambda;x)$	*n*-ésimo polinomio de Apostol-Euler.
$\mathfrak{G}_n(\lambda;x)$	*n*-ésimo polinomio de Apostol-Genocchi.
$H_n(x;\lambda;u)$	*n*-ésimo polinomio de Apostol-Frobenius–Euler.
$\mathcal{H}_n^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u)$	*n*-ésimo polinomio tipo Apostol Frobenius–Euler generalizado.
$\mathcal{Q}_n^{[m-1,\alpha]}(x;b,c;\lambda;u;v)$	nueva clase de polinomios tipo Apostol generalizados.
$\beta(x)^{(\alpha)}$	matriz de Bernoulli.
$\mathfrak{I}=[f_{i,j}]$	matriz de Fibonacci.
$S=[s_{i,j}]$	matriz de Pell.
$\mathcal{V}^{[m-1,\alpha]}(x;c,a;\lambda;u)$	matriz generalizada de los polinomios Apostol-Frobenius-Euler.