

**AUTORIZACIÓN DE LOS AUTORES PARA LA CONSULTA, LA
REPRODUCCIÓN PARCIAL O TOTAL, Y PUBLICACIÓN ELECTRÓNICA DEL
TEXTO COMPLETO**

Puerto Colombia, **09 DE OCTUBRE DE 2020**

Señores

DEPARTAMENTO DE BIBLIOTECAS

Universidad del Atlántico

Cuidad

Asunto: Autorización Trabajo de Grado

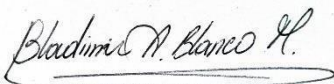
Cordial saludo,

Yo, **BLADIMIR ANDRES BLANCO MONTES.**, identificado(a) con **C.C. No. 1.140.886.364.** de **BARRANQUILLA**, autor(a) del trabajo de grado titulado **BIFURCACIONES TRANSCRITAS DE UNA FAMILIA CUADRÁTICA MULTIPARAMÉTRICA** presentado y aprobado en el año **2020** como requisito para optar al título Profesional de **MATEMÁTICO.**; autorizo al Departamento de Bibliotecas de la Universidad del Atlántico para que, con fines académicos, la producción académica, literaria, intelectual de la Universidad del Atlántico sea divulgada a nivel nacional e internacional a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Los usuarios del Departamento de Bibliotecas de la Universidad del Atlántico pueden consultar el contenido de este trabajo de grado en la página Web institucional, en el Repositorio Digital y en las redes de información del país y del exterior, con las cuales tenga convenio la Universidad del Atlántico.
- Permitir consulta, reproducción y citación a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato CD-ROM o digital desde Internet, Intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer.

Esto de conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, "Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores", los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

Atentamente,



Firma

BLADIMIR ANDRES BLANCO MONTES

C.C. No. 1.140.886.364. de BARRANQUILLA

DECLARACIÓN DE AUSENCIA DE PLAGIO EN TRABAJO ACADÉMICO PARA GRADO

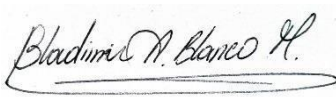
Este documento debe ser diligenciado de manera clara y completa, sin tachaduras o enmendaduras y las firmas consignadas deben corresponder al (los) autor (es) identificado en el mismo.

Puerto Colombia, **09 DE OCTUBRE DE 2020**

Una vez obtenido el visto bueno del director del trabajo y los evaluadores, presento al **Departamento de Bibliotecas** el resultado académico de mi formación profesional o posgradual. Asimismo, declaro y entiendo lo siguiente:

- El trabajo académico es original y se realizó sin violar o usurpar derechos de autor de terceros, en consecuencia, la obra es de mi exclusiva autoría y detento la titularidad sobre la misma.
- Asumo total responsabilidad por el contenido del trabajo académico.
- Eximo a la Universidad del Atlántico, quien actúa como un tercero de buena fe, contra cualquier daño o perjuicio originado en la reclamación de los derechos de este documento, por parte de terceros.
- Las fuentes citadas han sido debidamente referenciadas en el mismo.
- El (los) autor (es) declara (n) que conoce (n) lo consignado en el trabajo académico debido a que contribuyeron en su elaboración y aprobaron esta versión adjunta.

Título del trabajo académico:	BIFURCACIONES TRANSCRITAS DE UNA FAMILIA CUADRÁTICA MULTIPARAMÉTRICA
Programa académico:	MATEMÁTICAS

Firma de Autor 1:							
Nombres y Apellidos:	BLADIMIR ANDRES BLANCO MONTES						
Documento de Identificación:	CC	X	CE		PA	Número:	1.140.886.364
Nacionalidad:	COLOMBIANO			Lugar de residencia:			
Dirección de residencia:							
Teléfono:				Celular:			



Universidad
del Atlántico

CÓDIGO: FOR-DO-111

VERSIÓN: 0

FECHA: 03/06/2020

FORMULARIO DESCRIPTIVO DEL TRABAJO DE GRADO

TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO DE GRADO	BIFURCACIONES TRANSCRITAS DE UNA FAMILIA CUADRÁTICA MULTIPARAMÉTRICA
AUTOR(A) (ES)	BLADIMIR ANDRES BLANCO MONTES
DIRECTOR (A)	ALBERTO REYES LINEROS
CO-DIRECTOR (A)	JORGE RODRIGUEZ CONTRERAS
JURADOS	ALEXANDER GUTIERREZ P BORIS REYES CASSIANI
TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TÍTULO DE	MATEMATICO
PROGRAMA	MATEMATICAS
PREGRADO / POSTGRADO	PREGRADO
FACULTAD	CIENCIAS BASICAS
SEDE INSTITUCIONAL	SEDE NORTE
AÑO DE PRESENTACIÓN DEL TRABAJO DE GRADO	2020
NÚMERO DE PÁGINAS	45
TIPO DE ILUSTRACIONES	IMÁGENES, RETRATOS DE FASE Y PLANOS.
MATERIAL ANEXO (VÍDEO, AUDIO, MULTIMEDIA O PRODUCCIÓN ELECTRÓNICA)	NO APLICA
PREMIO O RECONOCIMIENTO	APOYO ECONOMICO RECIBIDO EN CONVOCATORIA



Universidad del Atlántico
Facultad de Ciencias Básicas
Programa de Matemáticas

Bifurcaciones Transcriticas De Una Familia Cuadrática Multiparamétrica.

Trabajo de grado presentado como requisito para optar el título de Matemático

Autor: Bladimir Andrés Blanco Montes

Msc. Alberto Reyes Linero

Barranquilla, Atlántico
2020

Aprobación

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad del Atlántico como integrantes del jurado examinador del trabajo de grado titulado **“Bifurcaciones Transcriticas De Una Familia Cuadrática Multiparamétrica”**, presentado por el estudiante **Bladimir Andrés Blanco Montes**, titular de la Cédula de Ciudadanía **1.140.886.364**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Universidad para optar al título de Matemático.

Director

Jurado

Jurado

Índice general

Agradecimientos	IV
Resumen	V
Introducción	VI
1. Preliminares	1
1.1. Teoremas Para la Singularidad En El Plano Finito	2
1.2. Teorema de la Variedad Estable.	6
1.3. Biturcaciones	8
1.3.1. Tipos de bifurcación	9
1.4. Estudio de singularidades en el Infinito	11
2. Estudio De La Familia	14
2.1. Reduccion a 5 Familias I, II, III, IV, V.	14
3. Plano Finito	17
3.1. Familia I	17
3.2. Familia II	17
3.3. Familia III	18
3.4. Familia IV	18
3.5. Familia V	19
4. Biturcaciones	26
4.1. Familia V	26
5. Plano Infinito	29
5.1. Familia I	29
5.2. Familia II	30
5.3. Familia III	31
5.4. Familia IV	31
5.5. Familia V	32
6. Retrato De Fase	34

7. Conclusiones

36

Referencias

.....

37

Agradecimientos

A Dios por darme la fuerza y la sabiduría suficiente, en las ocasiones donde el camino se tornaba muy difícil, permitiéndome así llegar a la meta.

A mis padres, Josefina Montes y Juan Blanco Puello, quienes han sido mi motor para terminar este pregrado. A mis hermanos, Juan Carlos Blanco Montes y Diana Blanco Montes que han depositado su confianza en mis capacidades, brindándome apoyo en todos mis proyectos.

A todos mis compañeros y amigos como Harold Acosta, Rafael Gonzalez, Miguel Berrocal, Isaias Beleño, Efren Mesino, Cristian Joly y Eduardo Perez, quienes estuvieron en este camino de principio a fin, gracias a todos por compartir su conocimiento, el tiempo y la dedicación en cada uno de los semestres de este camino que estuvo llenos de mucho aprendizaje y risas.

A todos los profesores que hicieron posible este proceso. A PhD. Jorge Luis Rodríguez Contreras, quien durante la asignatura de E.D.O. me mostró las matemáticas con otro punto de vista. A PhD. Tovias Castro, quien siempre estuvo dispuesto a resolver mis inquietudes; y a Msc. Alberto Reyes Linero por apoyarme y guiarme para terminar este trabajo de grado.

Resumen

El objetivo principal de este trabajo de grado, es proponer el estudio de las bifurcaciones transcriticas de una familia cuadratica multiparametrica asociada al siguiente sistema:

$$\begin{aligned}x' &= y \\y' &= \alpha x^{m+k-1} + \beta x^{m-k-1} y - \gamma x^{2m-2k-1}\end{aligned}\tag{1}$$

Con $\alpha = a(2m + k)$, $\beta = b(2m - k)$ y $\gamma = a^2 m x^{4k} + c x^{2k} + b^2 m$.

Este sistema es el ejercicio 11 de la sección 1.3.3 del libro [12], la motivación para realizar este trabajo fue la lectura de los artículos [1], [2] y [3]; los cuales fueron de mucha ayuda para desarrollar este trabajo de grado.

Inicialmente se trata de hacer una investigación sobre las familias cuadráticas multiparametrica asociadas al sistema diferencial polinomial, considerando casos específicos y así obtener con facilidad las familias. Luego, se hace un estudio a cada familia en el plano finito, aplicando tópicos de la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales, hallando sus puntos críticos, analizando su estabilidad y luego observamos las bifurcaciones presentes en una familia cuadrática multiparametrica.

Después, se hace un estudio en el plano infinito utilizando la compactificación de Poincaré a cada familia dada por medio de cartas, el cual se basa en la proyección estereografica de la esfera en el plano. Donde, veremos un mejor enfoque al estudiar el comportamiento de las trayectorias cercanas al infinito usando la llamada esfera de Poincaré.

Por ultimo, en este trabajo, se usan programas como P4 ([13]), donde llevamos a cabo para ilustrar el comportamiento de cada familia en el plano infinito por medio del disco de Poincaré, además utilizamos el software de GeoGebra ([14]) para analizar de manera detallada las bifurcaciones presente en una familia cuadratica multiparametrica.

Introducción

El conocimiento y crecimiento de las ecuaciones diferenciales en el mundo surgieron de la misma forma que se plantearon otras ramas de la matemática, a través de la necesidad que tenía el ser humano en cómo resolver problemas físicos y matemáticos de acuerdo con sus investigaciones ya obtenidas, de aquí nace una nueva rama de la matemática que hoy en día es muy importante como son las ecuaciones diferenciales.

A finales del siglo XVII Newton, Leibniz y Los Hermanos Bernoulli dieron paso a las ecuaciones diferenciales, estas se utilizaron en la solución de problemas tanto geométricos como físicos. Posteriormente a esto, Newton vio muy útil el uso de las ecuaciones diferenciales para la soluciones de varios problemas que anteriormente no se podían solucionar, de igual forma el éxito de las ecuaciones diferenciales va en primer lugar a H. Poincaré quien introduce un enfoque cualitativo la cuál desarrolla una serie de nuevas técnicas, expuestas en el “Analysis Situs”, un apéndice de “Les methodes nouvelles de la mecanique celeste”, de donde se originan lo que son la geometría y la topología modernas.

Los sistemas dinámicos es un área “joven” de las matemáticas, aunque se remontan a Newton con sus estudios sobre mecánica celeste, y a H. Poincaré, quien inició el estudio cualitativo de las ecuaciones diferenciales.

En este contexto, Poincaré concebía un sistema dinámico, como un campo de vectores en el espacio fase y una solución como una curva tangente en cada punto a los vectores de dicho campo. Su mayor interés, que por aquel entonces eran los problemas de la mecánica celeste, fue la descripción del retrato fase, es decir, de todo el conjunto de soluciones, así como de la estabilidad de las soluciones, que para él consistían en el análisis cualitativo de los resultados.

Hoy, más de cien años después de la muerte de Poincaré, los sistemas dinámicos son una de las ramas de mayor actividad en el mundo de las matemáticas. Por sus diferentes caminos, han desfilado nombres como S. Smale, Sinai, A. Douady, M. Herman, D. Sullivan, Andronov, Birkhoff, Kolmogorov, Liapunov, Lorenz, Moser, V. I. Arnold y muchos más; por mencionar solo algunos de los ilustres matemáticos que han nutrido con inmortales resultados a los sistemas dinámicos. Los cuales, hoy en día, explican un sin número de fenómenos en diversas áreas del conocimiento, y desde luego, un gran número de problemas matemáticos. Para darnos una idea, con un sistema dinámico se puede explicar, desde el movimiento de un péndulo simple, hasta el movimiento planetario.

Actualmente hay una “explosión ” de esta área de estudio a nivel mundial, en muchos contextos diferentes. Una característica fascinante de los sistemas dinámicos es la profunda interacción que tienen con otras áreas de las matemáticas y del conocimiento, como la física, la química, la biología y la economía.

Tratando de precisar el concepto de sistemas dinámicos, podemos decir que es el estudio de fenómenos deterministas, es decir, es estudiar todo lo que se mueve. Todos los fenómenos en los que hay alguna magnitud que evoluciona con el tiempo. En términos matemáticos un sistema dinámico es un par (M, F) donde M representa el contexto espacio temporal, es decir, el ambiente del sistema. Este es conocido como espacio de estados o espacio de fases. Además F es una aplicación del espacio de estados en el mismo, también denominado la ley de evolución del sistema o ley de transición estados. El conjunto M es generalmente un variedad diferenciable (una superficie suave localmente).

Si queremos ser formales, podemos decir que un sistema dinámico es una familia infinita de funciones (homeomorfismos locales) de un espacio (métrico) en sí mismo, cerrada bajo composiciones, siempre que éstas tengan sentido.

Como dicho anteriormente, Poincaré dio inicio a la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales el cual propone la descripción del retrato de fase de una ecuación diferencial la cual es una herramienta valiosa en el estudio de las ecuaciones.

La configuración de las curvas en el espacio de fase revela información sobre la existencia de atractores, repulsores y ciclos límite; este último desollara un concepto teórico muy importante como el mapeo de retorno o el Teorema de la Región Anular, el cual con la contribución del matemático I. Bendixson en 1901 se transformó en el famoso Teorema de Poincaré-Bendixson. El resultado anterior confirma que las soluciones en las cuales realmente estamos interesados, son aquellas que llamamos singulares (asociadas a puntos críticos, orbitas periódicas). Esto es debido a que bajo condiciones de compatibilidad, cualquier otra solución tiende hacia un conjunto de curvas singulares, llamadas conjunto límite. Por lo tanto, el retrato fase se determina por el carácter y la configuración de las soluciones singulares.

Después de haberse establecido una teoría para el análisis cualitativo de los sistemas lineales de ecuaciones diferenciales, se demostró que esta se podía aplicar a los sistemas no lineales. Los sistemas cuadráticos son uno de los más simples ejemplos de ecuaciones diferenciales no lineales y también presentan la mayoría de las dificultades de los sistemas no lineales en general. Solo hasta 1987, se logró demostrar que dado un sistema cuadrático este tiene un número finito de ciclos límite.

El estudio de la teoría cualitativa es de vital importancia para los sistemas dinámicos, puesto que brinda una visualización del comportamiento de ciertas curvas al redor de diversos puntos críticos del sistema, además permite modelar fenómenos de la naturaleza. Es por esta razón que a continuación se estará profundizando algunos temas que posteriormente se utilizarán en el desarrollo de este trabajo de grado.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se describen los preliminares que a consideración son necesarios para que cualquier lector pueda entender de mejor manera cada sección que conforma este trabajo de investigación.

Definición. 1.1. Un sistema polinomial en el plano de grado n esta dado por:

$$\begin{aligned}x' &= P(x,y) \\ y' &= Q(x,y)\end{aligned}\tag{1.1}$$

donde $P, Q \in C[x,y]$, (conjunto de los polinomios en dos variables) y n es el grado absoluto de los polinomios P y Q .

Definición. 1.2. El campo vectorial polinomial asociado a sistema (1.1), esta dado por $X := (P, Q)$, el cual también se puede escribir como:

$$X = P(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Definición. 1.3. Una foliación de un campo vectorial polinomial de (1.1) esta dada por:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)}$$

Ejemplo. 1.4. Dado el sistema polinomial en el plano:

$$\begin{aligned}x' &= y \\ y' &= -x\end{aligned}\tag{1.2}$$

El campo vectorial polinomial asociado a este sistema esta dado por $X = (y, -x)$, el cual también se escribe como:

$$X = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}.$$

Una foliación es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} = -\frac{y}{x}$$

Definición. 1.5. Dado el sistema (1.1), el punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ es un punto crítico del sistema si, $P(x_0, y_0) = 0$ y $Q(x_0, y_0) = 0$. Además en ellos la solución del sistema es constante.

Ejemplo. 1.6. Para el sistema:

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= f(x, y), \end{aligned} \tag{1.3}$$

Donde f es una función entera digamos polonómica, los puntos críticos del sistema son de la forma $(x_0, 0)$, donde $y = 0$ y $f(x_0, 0) = 0$.

Definición. 1.7. Un sistema no lineal es de la forma:

$$x' = f(x) \tag{1.4}$$

Donde $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ y E es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n .

Definición. 1.8. Un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ es un punto crítico del sistema no lineal (1.4) si $f(x_0) = 0$. Un punto críticos x_0 es hiperbólico si ninguno de los valores propios de la matriz $Df(x_0)$ tiene parte real cero. El sistema no lineal (1.4) con la matriz $A = Df(x_0)$ es llamado la Linealización del sistema (1.4) en x_0 .

1.1. Teoremas Para la Singularidad En El Plano Finito

Teorema. 1.9. Teorema de Los Puntos Singulares Hiperbólicos.

Sea $(0, 0)$ una singularidad aislada del campo vectorial,

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + A(x, y) \\ y' &= cx + dy + B(x, y) \end{aligned} \tag{1.5}$$

Donde F y G son analíticas en una vecindad del origen y tiene expansiones en series que comienzan con términos de grado dos en x e y . Decimos que $(0, 0)$ es una singularidad no degenerada si $ad - bc \neq 0$. Sean λ_1 y λ_2 los valores propios de $DX(0, 0)$. Entonces:

- (a) Si λ_1, λ_2 son reales y $\lambda_1 \lambda_2 < 0$, entonces $(0, 0)$ es punto silla, cuyas separatrices tienden a $(0, 0)$ en las direcciones dadas por los vectores propios asociados con λ_1 y λ_2 (ver Fig (1.1) (a)).
- (b) Si λ_1, λ_2 son reales y $\lambda_1 \lambda_2 > 0$, entonces $(0, 0)$ es un nodo. Si $\lambda_1 > 0 (\lambda_1 < 0)$ entonces es un fuente (sumidero) (ver Fig (1.1) (b)).

(c) Si $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ y $\lambda_2 = \alpha - \beta i$ con $\alpha, \beta \neq 0$ entonces $(0, 0)$ es un un foco. Si $\alpha > 0$ o ($\alpha < 0$) entonces es repulsor (atractor) (ver Fig (1.1) (c)).

(d) Si $\lambda_1 = \beta i$ y $\lambda_2 = -\beta i$, entonces $(0, 0)$ es un centro lineal, topológicamente un foco o un centro (ver Fig (1.1) (d)).

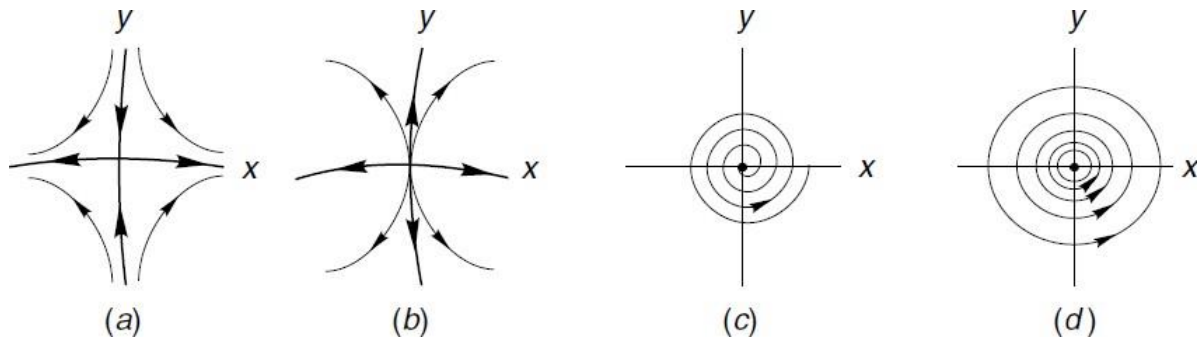


Figura 1.1: Retrato de fase de los puntos singulares Hiperbólicos

Para un estudio mas detallado de la temática ver [10] pág 71]

Ejemplo. 1.10. Clasifiquemos los puntos críticos del siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^2 - y^2 - 1 \\ \dot{y} &= 2y \end{aligned} \tag{1.6}$$

Los puntos críticos asociados al sistema (1.6) serán $(\pm 1, 0)$ ya que, si $y = 0$ entonces $x = \pm 1$.

$$M(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Luego el punto $(1, 0)$ es:

$$M(1, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Así, $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 2$, luego aplicando el Teorema (1.9), observamos que $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ y $\lambda_1 > 0$, por tanto el punto $(1, 0)$ es un nodo fuente.

Ahora para el punto $(-1, 0)$ es:

$$M(-1, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora, $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = 2$, luego aplicando el Teorema (1.9), vemos que $\lambda_1\lambda_2 < 0$, por tanto el punto $(-1, 0)$ es un punto silla.

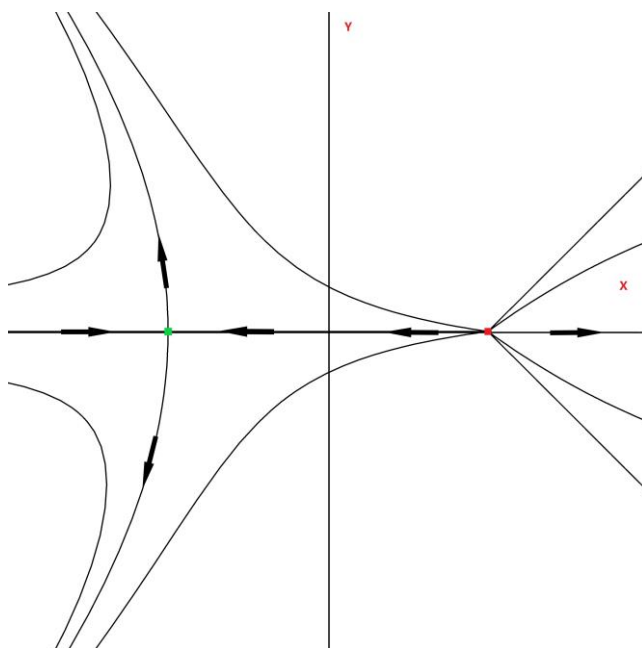


Figura 1.2: Retrato de fase del sistema 1.6

Teorema. 1.11. Teorema De Los Puntos Singulares Nilpotentes Sea $(0, 0)$ una singularidad aislada del sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + A(x, y) \\ \dot{y} &= B(x, y) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Donde X e Y son analíticas en una vecindad del origen y tienen expansiones que comienzan con términos de segundo grado en x e y . Sea $y = f(x) = a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$ una solución de la ecuación $y + A(x, y) = 0$ en una vecindad de $(0, 0)$, y supongamos que tiene la siguiente expansión de serie de la función $F(x) = B(x, f(x)) = ax^m(1 + \dots)$ y $G(x) = (\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y})(x, f(x)) = bx^n(1 + \dots)$ donde $a \neq 0$, $m \geq 2$, y $n \geq 1$. Entonces:

- (1) Si $F(x) \equiv G(x) \equiv 0$, entonces el retrato de fase de X esta dado por Fig.1.3 (a).
- (2) Si $F(x) \equiv 0$ y $G(x) = bx^n + \dots$ para $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$ y $b \neq 0$, entonces el retrato de fase de X esta dado por Fig.1.3 (b o c).
- (3) Si $G(x) \equiv 0$ y $F(x) = ax^m \dots$ para $m \in \mathbb{N}$ con $m \geq 1$ y $a \neq 0$, entonces:
 - (i) Si m es impar y $a > 0$, entonces el origen de X es una silla Fig.1.3 (d) y si $a < 0$, entonces es un centro o un foco como en la Fig.1.3 (e-g)
 - (ii) Si m es par, entonces el origen de X es una cuspide como en la Fig.1.3 (h).

(4) Si $F(x) = ax^m + \dots$ y $G(x) = bx^n + \dots$ con $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $a \neq 0$ y $b \neq 0$. Entonces nosotros tenemos:

- (i) Si m es par y
 - (i.a) $m < 2n + 1$, entonces el origen de X es una cuspide como en la Fig. 1.3 (h).
 - (i.b) $m > 2n + 1$, entonces el origen de X es un nodo-silla como en la Fig. 1.3 (i o j).
- (ii) Si m es impar y $a > 0$, entonces el origen de X es una silla como en la Fig. 1.3 (d).
- (iii) Si m es impar, $a < 0$ y
 - (iii.a) $m < 2n + 1$, o $m = 2n + 1$ y $b^2 + 4a(n + 1) < 0$, entonces el origen de X es un centro o un foco como en la Fig. 1.3 (e-g).
 - (iii.b) n es impar y $m > 2n + 1$, o $m = 2n + 1$ y $b^2 + 4a(n + 1) \geq 0$. Entonces el origen de X consiste de un sector hiperbólico y un sector elíptico como en la Fig. 1.3 (k).
 - (iii.c) n es par y $m > 2n + 1$, o $m = 2n + 1$ y $b^2 + 4a(n + 1) \geq 0$. Entonces el origen de X es un nodo. Es un nodo atractor si $b < 0$ y repulsor si $b > 0$ Fig. 1.3 (l y m).

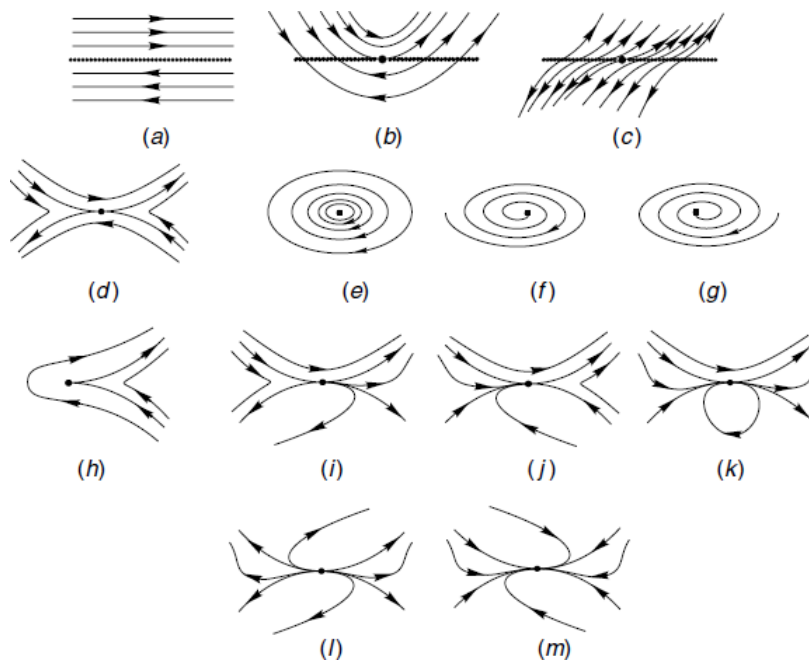


Figura 1.3: Retrato de fase de puntos singulares nilpotentes

Para un estudio más detallado de la temática ver [10] pág 116]

Ejemplo. 1.12. Clasifiquemos el punto críticos del siguiente sistema:

$$\begin{aligned} x' &= x^3 + y \\ y' &= x^3 \end{aligned} \tag{1.8}$$

El punto crítico asociado al sistema (1.8) es (0, 0).

$$M(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 & 1 \\ 3x^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Evaluando el punto crítico (0, 0) en nuestra matriz jacobiana:

$$M(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Así, $\lambda^2 = 0$ por lo tanto tenemos una singularidad nilpotente. Luego aplicando el Teorema (1.11), sea $y = f(x)$ la solución de $y + A(x, y) = 0$, donde $A(x, y) = x^3$ entonces $y = -x^3$, por otro lado tenemos que $B(x, y) = x^3$, así obtenemos que $F(x) = x^3$ y $G(x) = 3x^2$ entonces $m = 3, a > 0$. Por tanto el origen del sistema (1.8) es un punto silla.

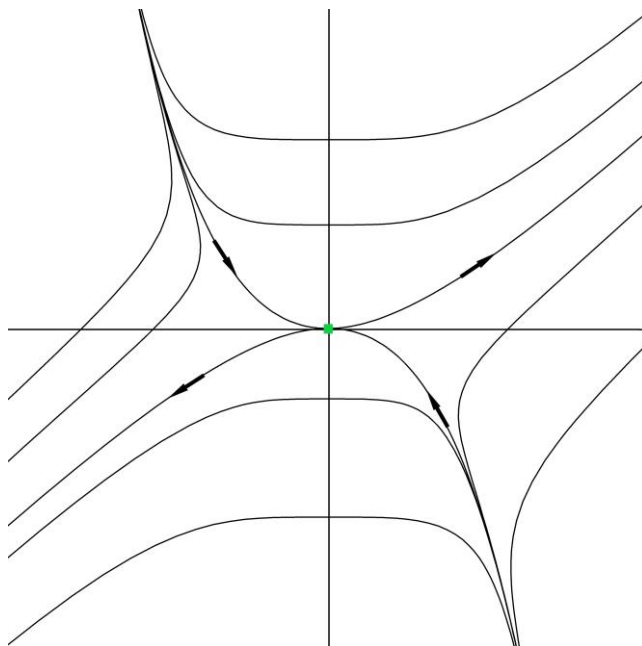


Figura 1.4: Retrato de fase del sistema (1.8)

1.2. Teorema de la Variedad Estable.

El Teorema de la Variedad Estable es uno de los resultados mas importante en la teoría cualitativa local de las E.D.O. El Teorema muestra que cerca a un punto de equilibrio

hiperbolico x_0 , el sistema no lineal (1.4) tiene una variedad estable e inestable S y U tangente a x_0 .

Teorema. 1.13. Teorema de la Variedad Estable.

Sea E un subconjunto de \mathbb{R}^n conteniendo el origen, sea $f \in C^1(E)$, y sea φ_t el flujo del sistema no lineal (1.4). Suponga que $f(0) = 0$ y que $Df(0)$ tiene k valores propios con parte real negativa y $n - k$ valores propios con parte real positiva. Entonces existe una variedad k -dimensional S tangente al subespacio estable E^s del sistema $x' = Ax$ en 0 tal que para todo $t \geq 0$, $\varphi_t(S) \subset S$ y para todo $x_0 \in S$.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_t(x_0) = 0;$$

y existe una variedad u $n - k$ dimensional diferenciable tangente al subespacio inestable E^u de $x' = Ax$ en 0 tal que para todo $t \leq 0$, $\varphi_t(U) \subset U$ y para todo $x_0 \in U$.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_t(x_0) = 0.$$

Para un estudio mas detallado de la temática ver [8] pág 105], observemos que si $f \in C^1(E)$ y $f(0) = 0$, entonces el sistema (1.4) puede escribirse como

$$x' = Ax + F(x) \tag{1.9}$$

donde $A = Df(0)$, $F(x) = f(x) - Ax$, $F \in C^1(E)$, $F(0) = 0$ y $DF(0) = 0$. Además, hay una matriz $C_{n \times n}$ invertible tal que

$$B = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$$

donde los valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ de la matriz P de $k \times k$ tiene parte real negativa y los valores propios $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n$ de la matriz Q de $(n - k) \times (n - k)$ tiene parte real positiva. Tomando $y = C^{-1}x$, el sistema (1.9) entonces tiene la forma

$$y' = By + G(y) \tag{1.10}$$

donde $G(y) = C^{-1}F(Cy)$.

En [8] nos muestra que la solución de la ecuación integral.

$$u(t, a) = U(t)a + \int_0^t U(t-s)G(u(s, a))ds - \int_t^\infty V(t-s)G(u(s, a))ds$$

satisface (1.10) y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, a) = 0.$$

Además, le da un esquema iterativo para computación de la solución:

$$u^{(0)}(t, a) = 0$$

$$u^{(j+1)}(t, a) = U(t)a + \int_0^t U(t-s)G(u^{(j)}(s, a))ds - \int_t^\infty V(t-s)G(u^{(j)}(s, a))ds$$

Ejemplo. 1.14. Veamos la estabilidad al siguiente sistema:

$$\begin{aligned} x' &= -x - y^2 \\ y' &= x^2 + y \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$A = B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F(x) = G(x) = \begin{pmatrix} -y^2 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

$$U(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ entonces,}$$

$$u^{(0)}(t, a) = 0.$$

$$u^{(1)}(t, a) = e^{-t} a_1$$

$$u^{(2)}(t, a) = \begin{pmatrix} e^{-t} a_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-(t-s)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2s} a_1^2 \end{pmatrix} ds - \int_t^\infty \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{(t-s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2s} a_1^2 \end{pmatrix} ds =$$

$$u^{(3)}(t, a) = \begin{pmatrix} e^{-t} a_1 + \frac{1}{3}(e^{-4t} - e^{-t}) a_1^3 \\ \frac{e^{-2t}}{3} a_1^2 \end{pmatrix}$$

En lo que sigue podemos mostrar que $u^4(t, a) - u^3(t, a) = O(a_1^5)$ y por lo tanto podemos aproximar por $\psi_2(a_1) = -\frac{1}{3} a_1^2 + O(a_1^5)$ y la variedad estable puede aproximarse por

$$S : y = -\frac{1}{3} x^2 + O(a_1^5)$$

como $x_1 \rightarrow 0$. Del mismo modo obtener

$$U : x = -\frac{1}{3} y^2 + O(a_1^5)$$

1.3. Bifurcaciones

Anteriormente hemos dado las diferentes definiciones y teoremas para el estudio cualitativo sobre una familia, cerca de sus puntos críticos. En caso contrario es necesario hacer un análisis propio del sistema.

Definición. 1.15. Sea el siguiente sistema y consideramos que ahora dependen de un parámetro λ , de la forma:

$$x' = f(x, \lambda) \quad (1.12)$$

Donde f es una función que depende continuamente tanto de x como del parámetro λ . Si un cambio suave en λ produce un cambio cualitativo o topológico en el comportamiento del sistema plano (1.12), se dice que ha ocurrido una bifurcación.

Las bifurcaciones pueden clasificarse como locales o globales:

- Una bifurcación local ocurre cuando el cambio en el parámetro causa un cambio en la estabilidad de un punto de equilibrio.

Es claro, que las bifurcaciones locales se presentan cuando el sistema linealizado en una vecindad de un punto crítico tiene valor propio con parte real que pasa por 0. Esto es, una bifurcación local ocurre en (x_0, λ_0) siempre que $Df(x_0, \lambda_0)$ tenga un valor propio con parte real nula.

Las bifurcaciones locales pueden determinarse a través del estudio de la estabilidad del sistema.

- En contraste, las bifurcaciones globales no dependen de la estabilidad local pues se refieren a cambios cualitativos en el comportamiento dentro de conjuntos invariantes más grandes como lo son ciclos límite o trayectorias que se extienden una distancia grande.

1.3.1. Tipos de bifurcación

Existen muchos tipos de bifurcación, sin embargo, no todos están clasificados. En general, las bifurcaciones se clasifican por el cambio de estabilidad en puntos de equilibrio hiperbólicos, en los ciclos límite hiperbólicos o cambios en ambas variantes al tiempo debidos a la modificación de un parámetro.

Definición. 1.16. Bifurcaciones de-codimensión uno Estas bifurcaciones requieren de la variación de un solo parámetro para darse en el sistema, todas presentan una forma normal, es decir, un sistema topológicamente equivalente, ya sea local o global al sistema inicial. Para obtener la forma normal de cada una en la teoría se realizan cambios de variable topológicamente equivalentes específicos en cada caso. En este trabajo solo se mostrará la forma normal.

Definición. 1.17. Bifurcación Transcrítica Una bifurcación transcrítica un punto crítico existe para todo valor del parámetro λ pero intercambian su estabilidad con otro punto crítico luego de la "colisión" entre ellos.

Ejemplo. 1.18.

$$\begin{aligned}x' &= \lambda x - x^2 \\y' &= -y\end{aligned}\tag{1.13}$$

Los puntos críticos son $P_1 = (0, 0)$ y $P_2 = (\lambda, 0)$. La matriz jacobiana es:

$$\mathbf{M}(x, y) = \begin{pmatrix} \lambda - 2x & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Si $\lambda > 0$, entonces $(0, 0)$ es un punto silla y $(\lambda, 0)$ es un nodo asintóticamente estable.
- Cuando $\lambda = 0$, los nodos colisionan en uno solo: $(0, 0)$ que es semiestable.
- Cuando $\lambda < 0$, la estabilidad se intercambia: $(0, 0)$ es un nodo asintóticamente estable y $(\lambda, 0)$ un punto de silla.

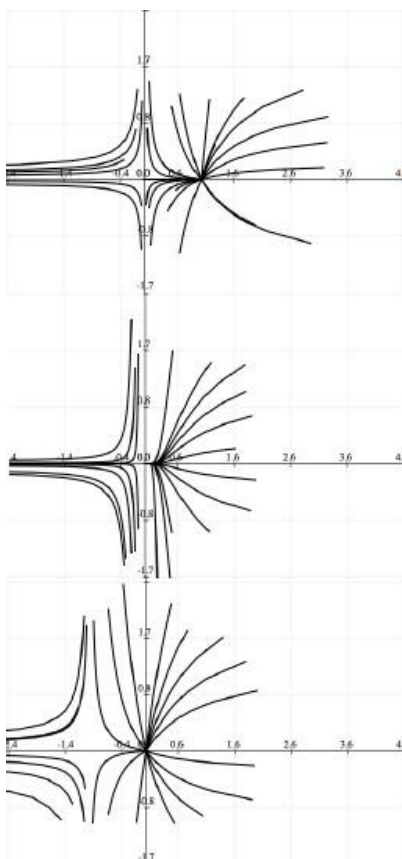


Figura 1.5: Diagrama de fase del sistema del sistema antes, durante y después de una bifurcación transcritical.

Definición. 1.19. Bifurcación Silla-Foco-Silla Llamaremos una Bifurcaciones silla-foco-silla cuando tengamos un cambio de parámetro, el cual implica que dos puntos críticos, una silla, colapsan en un foco y posteriormente recuperan su estabilidad original.

Para un estudio más detallado de la temática ver [4] pág 51] y [11] pág 314]

1.4. Estudio de singularidades en el Infinito

Para estudiar el comportamiento de las trayectorias de un sistema diferencial cerca del infinito, es posible utilizar una compactificación. Una de las posibles construcciones se basa en la proyección estereográfica de la esfera en el plano, en cuyo caso un único “punto en el infinito” está unido al plano.

Un mejor enfoque para estudiar el comportamiento de trayectorias cercanas al infinito es usar la llamada esfera de Poincaré, esta esfera tiene la ventaja de que los puntos singulares en el infinito se extienden a lo largo del ecuador de la esfera y, por lo tanto, son de una naturaleza más simple que los puntos singulares de La esfera de Bendixson. Sin embargo, algunos de los puntos singulares en el infinito en la esfera de Poincaré pueden ser muy complicados.

Teorema. 1.20. Consideremos en \mathbb{R}^3 la esfera $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ y el plano $\pi = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_3 = 1\}$, que es tangente a S^2 en el punto $(0, 0, 1)$. Sea r una recta que pasa por el origen $(0, 0, 0)$ y un punto P de π , entonces r intercepta S^2 en dos puntos P_+ y P_- , donde el primero esta en el hemisferio abierto superior $H_+ = \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2; x_3 > 0\}$ y el segundo esta en el hemisferio abierto inferior $H_- = \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2; x_3 < 0\}$.

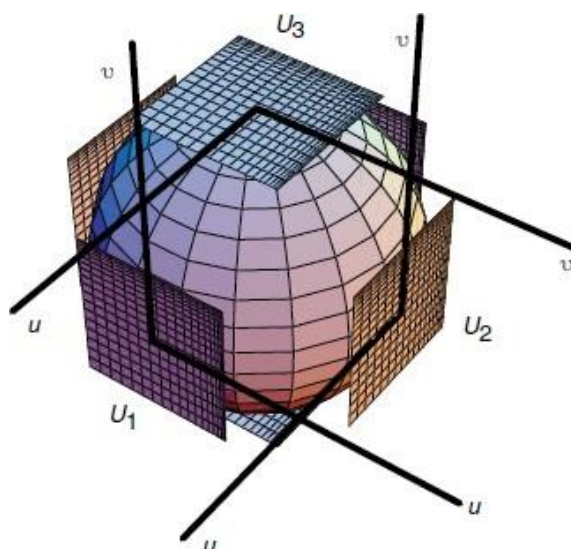


Figura 1.6: Las cartas locales (U_k, φ_k) , para $k = 1, 2, 3$. en la esfera de Poincaré.

Luego las expresiones para $p(X)$ en la carta local (U_1, φ_1) esta dada por:

$$\begin{aligned} u' &= v^d - uP\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) + Q\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right), \\ v' &= -v^{d+1}P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right). \end{aligned} \quad (1.14)$$

La expresión para (U_2, φ_2) es:

$$\begin{aligned} u' &= v^d P\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right) - uQ\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right), \\ v' &= -v^{d+1} Q\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Y para (U_3, φ_3) es:

$$\begin{aligned} u' &= P(u, v), \\ v' &= Q(u, v). \end{aligned} \quad (1.16)$$

Donde d es el máximo grado del polinomio.

Para un estudio más detallado de la temática ver [13] pág 151]

Ejemplo. 1.21. Veamos el retrato de fase en el disco de Poincaré del siguiente sistema.

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= -y \end{aligned} \quad (1.17)$$

Este sistema (1.17) tiene un único punto singular en el plano finito, el origen, el cual es un punto silla.

Sea \mathcal{X} el vector asociado al sistema (1.17). Entonces la expresión para $p(\mathcal{X})$ en la Carta U_1 usando la transformación (1.14).

$$\begin{aligned} u' &= -2u \\ v' &= -v \end{aligned} \quad (1.18)$$

El único punto crítico en la Carta U_1 , el origen, el cual es un nodo estable en el infinito dado por el Teorema (1.9).

Ahora, la expresión para la Carta U_2 , usando la transformación (1.15).

$$\begin{aligned} u' &= 2u \\ v' &= v \end{aligned} \quad (1.19)$$

De igual razonamiento, el unico punto crítico en la Carta U_2 , el origen, el cual es un nodo inestable en el infinito dado por el Teorema (1.9).

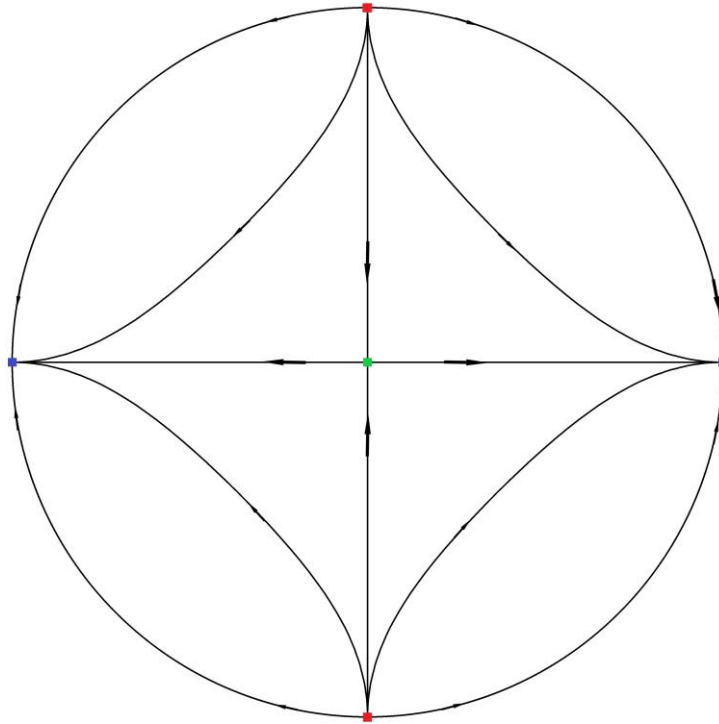


Figura 1.7: El retrato de fase en el disco de Poincaré del sistema (1.17)

Capítulo 2

Estudio De La Familia

En este trabajo se propone el estudio de los caso cuadrático asociado al sistema con $a, b, c, m, k \in \mathbb{R}$ dado por.

$$\begin{aligned}x' &= y \\y' &= \alpha x^{m+k-1} + \beta x^{m-k-1} - \gamma x^{2m-2k-1}\end{aligned}\tag{2.1}$$

Con $\alpha = a(2m + k)$, $\beta = b(2m - k)$ y $\gamma = a^2 m x^{4k} + c x^{2k} + b^2 m$.

Entonces (2.1) puede escribirse como:

$$\begin{aligned}x' &= y \\y' &= a(2m + k)x^{m+k-1} + b(2m - k)x^{m-k-1} - (a^2 m x^{4k} + c x^{2k} + b^2 m)x^{2m-2k-1}\end{aligned}\tag{2.2}$$

Inicialmente hallamos los casos cuadráticos de las familias equivalentemente a fin al sistema, considerando casos específicos. Luego procedemos a estudiar la estabilidad de los puntos críticos en el plano finito, su variedad estable, la existencia de bifurcaciones y por ultimo el comportamiento de los puntos criticos en el plano infinito.

2.1. Reducción a 5 Familias I, II, III, IV, V.

Proposición. 2.1. Para $a, b, c, m, k \in \mathbb{R}$ y $s, p, r \in \mathbb{Z}^+$. Los sistemas cuadráticos asociados a cada (2.1) son equivalentemente afín a las siguientes familias:

I. Para $a = 0$, $b = 0$ y $c \neq 0$.

$$\begin{aligned}x' &= y \\y' &= -cx^2\end{aligned}\tag{2.3}$$

II. Para $a = 0$, $b \neq 0$ y $c = 0$.

$$\begin{aligned}x' &= y \\y' &= 2byx\end{aligned}\tag{2.4}$$

III. Para $a = 0$, $b = 0$ y $c = 0$.

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= 2ayx \end{aligned} \quad (2.5)$$

IV. Para $a = 0$, $b = 0$ y $c \neq 0$

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= a \frac{2}{p+4} y - \frac{3}{2} a^2 x - cx^2 \end{aligned} \quad (2.6)$$

V. Para $a = 0$, $b \neq 0$ y $c \neq 0$.

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= b \frac{-s+4}{2} y - \frac{3}{2} bx - cx^2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Demostración: Analizamos cada subfamilia de [2, pág 12], donde observamos las diferentes posibilidades para las constantes a , b y c , sean iguales a 0. A continuación algunos casos de la demostración:

I. Para $a = 0$, $b = 0$ y $c \neq 0$.

Observamos 2 casos:

Caso 1. si $s = 0$ entonces $p = 1$. **Caso 2.** si $s = 1$ entonces $p = 0$.

Así en este caso nos queda el sistema asociado:

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -cx^2 \end{aligned}$$

IV. Para $a \neq 0$, $b = 0$ y $c \neq 0$.

Observamos que el $\text{grad}(Q) = \text{máx}\{2s + 1, r\}$. Así,

Caso 1. Si el $\text{grad}(Q) = 2s + 1$ entonces $2s + 1 = 2$, por lo tanto $s = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}^+$.

Caso 2. Si el $\text{grad}(Q) = r$ entonces $r = 2$ y $s = 0$.

Así en este caso nos queda el sistema asociado:

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= a \frac{2}{p+4} y - \frac{3}{2} a^2 x - cx^2 \end{aligned}$$

VI. Para $a \neq 0$, $b = 0$ y $c = 0$.

Observamos que el $\text{grad}(Q) = \text{máx}\{2p + 1, 2s + 1\}$.

Caso 1. Si el $\text{grad}(Q) = 2p + 1$ entonces $2p + 1 = 2$ así $p = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}^+$.

Caso 2. Si el $\text{grad}(Q) = 2s + 1$ entonces $2s + 1 = 2$ así $s = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}^+$.

Por lo tanto esta familia no tiene caso cuadrático asociado.

VII. Para $a \neq 0$, $b \neq 0$ y $c \neq 0$.

Observamos que el $\text{grad}(Q) = \text{máx} \{2p + 1, 2s + 1, s + p + 1\}$

Caso 1. Si el $\text{grad}(Q) = 2p + 1$ entonces $2p + 1 = 2$ así $p = \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}^+$.

Caso 2. Si el $\text{grad}(Q) = 2s + 1$ entonces $2s + 1 = 2$ así $s = \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}^+$.

Caso 3. Si el $\text{grad}(Q) = s + p + 1$ entonces nos devolvemos al razonamiento en la familia I, así haciendo $s = 0$ entonces $p = 1$, pero tenemos un término de $2p + 1 = 3$ y ya este caso sería cúbico, de igual razonamos para cuando sea $p = 0$ y $s = 1$.

Por lo tanto esta familia no tiene caso cuadrático asociado.

□

Capítulo 3

Plano Finito

En este capítulo se analiza la estabilidad de los puntos críticos de las diferentes familias en el plano finito utilizando los diferentes tópicos anteriormente descritos.

3.1. Familia I

Proposición. 3.1. El punto $(0, 0)$ es una cúspide.

Demostración: El puntos críticos asociado al sistema (2.3) es $(0, 0)$. La matriz Jacobiana del sistema es:

$$(x, y) = \mathbf{M} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2cx & 0 \end{pmatrix}$$

Luego,

$$\mathbf{M}(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Así, vemos que $\lambda^2 = 0$. Luego aplicando el Teorema (1.11), sea $y = f(x)$ la solución de $y + A(x, y) = 0$, donde $A(x, y) = 0$ entonces $y = 0$, por otro lado tenemos que $B(x, y) = -cx^2$, así obtenemos que $F(x) = -cx^2$ y $G(x) = 0$ entonces $m = 2$ y $a = 0$. Por tanto el origen del sistema (2.3) es una cúspide. \square

3.2. Familia II

Proposición. 3.2. $(x, 0)$ una recta de puntos críticos

Demostración: $(x, 0)$ que es una recta de puntos críticos asociadas al sistema (2.4). Así vemos una aproximación del sistema por variable separable.

$$y = bx^2 + k, \text{ donde } k \text{ es una constante.}$$

\square

3.3. Familia III

Proposición. 3.3. $(x, 0)$ una recta de puntos críticos

Demostración: $(x, 0)$ es una recta de puntos críticos asociadas al sistema (2.5). Así vemos una aproximación del sistema por variable separable.

$$y = ax^2 + k, \text{ donde } k \text{ es una constante.}$$

□

3.4. Familia IV

Proposición. 3.4. a) Si $p \in \mathbb{Z}^+$ entonces $(0, 0)$ es un nodo estable si $a < 0$ e inestable si $a > 0$, y $(-\frac{3a^2}{2c}, 0)$ es una silla.

b) Si $p = 0$, $(0, 0)$ es un foco estable si $a < 0$ e inestable si $a > 0$, y $(-\frac{3a^2}{2c}, 0)$ es una silla.

Demostración: Los puntos críticos asociados al sistema (2.6) son: $(0, 0)$ y $(-\frac{3a^2}{2c}, 0)$. Ahora, sea $d = a(p + 4)$ y la matriz Jacobiana del sistema es:

$$M(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{3}{2}a^2 - 2cx & \frac{d}{2} \end{pmatrix}$$

Luego,

$$M(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{3}{2}a^2 & \frac{d}{2} \end{pmatrix}$$

y,

$$M(-\frac{3a^2}{2c}, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{2}a^2 & \frac{d}{2} \end{pmatrix}$$

a. Para la $M(0, 0)$, los valores propios son:

$\lambda^1 = \frac{1}{4}d + \sqrt{\frac{d^2 - 24a^2}{4}}$ y $\lambda^2 = \frac{1}{4}d - \sqrt{\frac{d^2 - 24a^2}{4}}$. Aplicando el Teorema (1.9) observamos que $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ por tanto $(0, 0)$ es un nodo estable si $a < 0$ e inestable si $a > 0$.

Ahora, para la $M(-\frac{3a^2}{2c}, 0)$, los valores propios son:

$\lambda^1 = \frac{1}{4}d + \sqrt{\frac{d^2 + 24a^2}{4}}$ y $\lambda^2 = \frac{1}{4}d - \sqrt{\frac{d^2 + 24a^2}{4}}$. Aplicando el Teorema (1.9) ob-

tenemos que $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ entonces $(-\frac{3a^2}{2c}, 0)$ es una punto silla.

b. Si $p = a$, para $M(0, 0)$ los valores propios son:

$\lambda_1 = \frac{a}{2}(2 + i\sqrt{2})$ y $\lambda_2 = \frac{a}{2}(2 - i\sqrt{2})$. Aplicando el Teorema (1.9) obtenemos que $(0, 0)$ es un foco, si $a > 0$ inestable y $a < 0$ estable.

Ahora, para la $M(\frac{-3a^2}{4}, 0)$, los valores propios son:

$\lambda_1 = \frac{a}{4} \sqrt{4 + 2\sqrt{10}}$ y $\lambda_2 = \frac{a}{4} \sqrt{4 - 2\sqrt{10}}$. Aplicando el Teorema (1.9) obtenemos que

$\lambda_1 \lambda_2 < 0$ entonces $(\frac{-3a^2}{4}, 0)$ es un punto silla.

□

3.5. Familia V

Antes de mostrar la siguiente proposición, definimos las siguientes regiones:

$$\begin{aligned}
 R_1 &= \{(b, c, d) \in \mathbb{R}^3 \mid d^2 - 24b > 0\} \\
 R_2 &= \{(b, c, d) \in \mathbb{R}^3 \mid d^2 - 24b = 0\} \\
 R_3 &= \{(b, c, d) \in \mathbb{R}^3 \mid d^2 - 24b < 0, c > 0\} \\
 R_4 &= \{(b, 0, d) \in \mathbb{R}^3 \mid d^2 - 24b > 0\} \\
 R_5 &= \{(b, 0, d) \in \mathbb{R}^3 \mid d^2 - 24b = 0\} \\
 R_6 &= \{(b, 0, d) \in \mathbb{R}^3 \mid d^2 - 24b < 0\} \\
 R_7 &= \{(0, c, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid c > 0\} \\
 R_8 &= \{(b, c, d) \in \mathbb{R}^3 \mid c < 0\}
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Notamos que $\mathbb{R}^3 = \bigcup_{i=1}^8 R_i$. Ahora, en R_3 consideramos los siguientes subconjuntos:

$$\begin{aligned}
 E_1 &= \{(b, c, d) \in \mathbb{R}^3 \mid d^2 - 24b < 0, d > 0, c > 0\} \\
 E_2 &= \{(b, c, d) \in \mathbb{R}^3 \mid d^2 - 24b < 0, d < 0, c > 0\} \\
 E_3 &= \{(b, c, d) \in \mathbb{R}^3 \mid d^2 + 24b < 0, d > 0, c > 0\} \\
 E_4 &= \{(b, c, d) \in \mathbb{R}^3 \mid d^2 - 24b < 0, d < 0, c > 0\} \\
 E_5 &= \{(b, c, d) \in \mathbb{R}^3 \mid d^2 - 24b < 0, d > 0, c < 0\} \\
 E_6 &= \{(b, c, d) \in \mathbb{R}^3 \mid d^2 - 24b < 0, d < 0, c < 0\} \\
 E_7 &= \{(b, c, d) \in \mathbb{R}^3 \mid d^2 + 24b < 0, d > 0, c < 0\} \\
 E_8 &= \{(b, c, d) \in \mathbb{R}^3 \mid d^2 - 24b < 0, d < 0, c < 0\} \\
 E_9 &= \{(b, c, d) \in \mathbb{R}^3 \mid d^2 - 24b > 0, d > 0, c > 0\} \\
 E_{10} &= \{(b, c, d) \in \mathbb{R}^3 \mid d^2 - 24b > 0, d < 0, c > 0\} \\
 E_{11} &= \{(b, c, d) \in \mathbb{R}^3 \mid d^2 - 24b > 0, d < 0, c < 0\} \\
 E_{12} &= \{(b, c, d) \in \mathbb{R}^3 \mid d^2 - 24b > 0, d > 0, c < 0\}
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Proposición. 3.5. Dada la familia (2.7) con $(b, c, d) \in \mathbb{R}^3$, entonces:

- a) Si $(b, c, d) \in R_1$ y $b > 0$ entonces el punto crítico $(0, 0)$ es un foco inestable y el punto crítico $(\frac{-3b}{2c}, 0)$ es una silla. Si $b < 0$ entonces el punto crítico $(0, 0)$ es una silla y el punto $(\frac{-3b}{2c}, 0)$ es un nodo estable.

b) Si $(b, c, d) \in \mathbb{R}_2$ y $b > 0$ entonces el punto crítico $(0, 0)$ es un nodo inestable y el punto $(\frac{-3b}{2c}, 0)$ es una silla.

c) Si $(b, c, d) \in \mathbb{R}_3$ y $b > 0$ entonces el punto crítico $(0, 0)$ es un foco estable y el punto crítico $(\frac{-3b}{2c}, 0)$ es una silla. Si $b < 0$ entonces el punto crítico $(0, 0)$ es un foco inestable y el punto crítico $(\frac{-3b}{2c}, 0)$ es un nodo inestable.

Demostración: Sea $d = b(s + 4)$, entonces Los puntos críticos asociados al sistema (2.7) son: $(0, 0)$ y $(\frac{-3b}{2c}, 0)$. luego, La matriz Jacobiana son:

$$M(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{3}{2}b - 2cx & \frac{d}{2} \end{pmatrix} \#$$

Luego,

$$M(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3b}{2} & \frac{d}{2} \end{pmatrix} \#$$

Para $M(0, 0)$, los valores propios son:

$$\lambda_1 = \frac{1}{4} d + \sqrt{\frac{d^2 - 24b}{4}} \quad \text{y} \quad \lambda_2 = \frac{1}{4} d - \sqrt{\frac{d^2 - 24b}{4}}$$

Ahora, para $(\frac{-3b}{2c}, 0)$ tenemos que:

$$M\left(\frac{-3b}{2c}, 0\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3b}{2} & \frac{b(s+4)}{2} \end{pmatrix} \#$$

Con valores propios:

$$\lambda_1 = \frac{1}{4} d + \sqrt{\frac{d^2 + 24b}{4}} \quad \text{y} \quad \lambda_2 = \frac{1}{4} d - \sqrt{\frac{d^2 + 24b}{4}}$$

a. Si $(b, c, d) \in \mathbb{R}_1$ tal que $d^2 - 24b > 0$ Para $(0, 0)$, tenemos que $\lambda_1 \lambda_2 = \frac{-3b}{2}$, entonces aplicando el Teorema (1.9) obtenemos que el punto crítico $(0, 0)$ es un nodo inestable si $b > 0$ y una silla si $b < 0$.

Ahora, para la $M(\frac{-3b}{2c}, 0)$ tenemos que $d^2 + 24b > 48b$, entonces:

1. Si $b > 0$, vemos que $\lambda_1 \lambda_2 = \frac{-3b}{2}$, entonces aplicando el Teorema (1.9) vemos que el punto crítico $(\frac{-3b}{2c}, 0)$ es una silla. Si $b < 0$, $\lambda_2 < 0$, entonces el punto crítico es un nodo estable.
2. Si $b < 0$ y $d^2 + 24b \in [48b, 0)$, entonces el punto crítico $(\frac{-3b}{2c}, 0)$ es un foco estable.
3. Si $b < 0$ y $d^2 + 24b \geq 0$, entonces el punto crítico $(\frac{-3b}{2c}, 0)$ es un nodo estable.

- b. Si $(b, c, d) \in R_2$ tal que $d^2 - 24b = 0$ entonces si $b \geq 0$ Para $M(0, 0)$ $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{d}{4}$, luego el punto critico $(0, 0)$ es un nodo inestable. Luego, notamos que si $b = 0$, entonces esto corresponde a la familia (2.3). Ahora, para $M(\frac{-3b}{2c}, 0)$, si $b > 0$ tal que $d^2 - 24b > 0$, además $\lambda_1 \lambda_2 = \frac{-3b}{2c}$, luego aplicando el Teorema (1.9) el punto critico $(\frac{-3b}{2c}, 0)$ es una silla.
- c. Si $(b, c, d) \in R_3$, tal que si $\sqrt{d^2 - 24b} < 0$ entonces $b < 0$. Para $M(0, 0)$ los valores propios son: $\lambda_1 = \frac{1}{4}(d + i\sqrt{24b - d^2})$ y $\lambda_2 = \frac{1}{4}(d - i\sqrt{24b - d^2})$, luego aplicando el Teorema (1.9), el punto critico $(0, 0)$ es un foco inestable. Ahora, para $b > 0$ vemos que $d^2 + 24b > 0$, tal que para $M(\frac{-3b}{2c}, 0)$ tenemos que $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$. Luego, $\lambda_1 \lambda_2 = \frac{-3b}{2}$ así, aplicando el Teorema (1.9) tenemos que el punto critico $(\frac{-3b}{2c}, 0)$ es una silla.

□

Proposición. 3.6. Dada la familia (2.7) con $c = 0$, entonces:

- a) si $(b, c, d) \in R_4$ y $b > 0$, entonces el punto critico $(0, 0)$ es una silla. Si $b < 0$, entonces el punto critico $(0, 0)$ es un nodo estable.
- b) Si $(b, c, d) \in R_5$ y $b > 0$, entonces el punto critico $(0, 0)$ es un nodo inestable.
- c) Si $(b, c, d) \in R_6$ y $b > 0$, entonces el punto critico es un foco inestable. Si $b < 0$, entonces el punto critico $(0, 0)$ es un foco estable.

Demostración: Con $c = 0$, la familia (2.7) tiene la forma:

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= \frac{d}{2}y - \frac{3}{2}bx \end{aligned}$$

Aquí, vemos que el único punto critico asociado al sistema (3.5) es $(0, 0)$. Entonces, la matriz jacobiana del sistema evaluada en el punto critico es:

$$M(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{3b}{2} & \frac{d}{2} \end{pmatrix}$$

Para $M(0, 0)$, los valores propios son:

$$\lambda_1 = \frac{1}{4} \left(d + \sqrt{d^2 - 24b} \right) \quad \text{y} \quad \lambda_2 = \frac{1}{4} \left(d - \sqrt{d^2 - 24b} \right)$$

- a. Si $(b, 0, d) \in R_4$ tal que $d^2 - 24b > 0$, tenemos que $\lambda_1 \lambda_2 = \frac{-3b}{2}$, entonces si $b > 0$ así, aplicando el Teorema (1.9) El punto critico $(0, 0)$ es una silla y si $b < 0$ y $\lambda_1 < 0$ entonces el punto critico $(0, 0)$ es un nodo estable.

b. Si $(b, 0, d) \in R_5$ tal que $d^2 - 24b = 0$, tenemos que $\lambda_1 \lambda_2 = \frac{d}{4}$, así, aplicando el Teorema (1.9) el punto crítico $(0, 0)$ es un nodo inestable.

c. Si $(b, 0, d) \in R_6$ tal que $d^2 - 24b < 0$, tenemos que $\lambda_1 = \frac{1}{4}(d + i\sqrt{24b - d^2})$ y $\lambda_2 = \frac{1}{4}(d - i\sqrt{24b - d^2})$, entonces si $b > 0$ aplicando el Teorema (1.9) el punto crítico $(0, 0)$ es un foco inestable y si $b < 0$ y $\lambda_1 < 0$ entonces el punto crítico $(0, 0)$ es un foco estable.

□

Ahora, veremos las variedades estable asociadas a los sistemas (2.6) y (2.7)

Proposición. 3.7. La variedad estable asociada al sistema (2.6) en el punto $(-\frac{3a^2}{2c}, 0)$ es:

$$S : y = \frac{c(x + \frac{3a^2}{2c})^2}{(v-w)(v-2w)}$$

Demostración: Veamos la estabilidad de la familia (2.6) en el punto $(-\frac{3a^2}{2c}, 0)$ aplicando el teorema (1.13):

Veamos los valores propios de la matriz jacobiana de la familia (2.6) evaluada en el punto $(-\frac{3a^2}{2c}, 0)$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3a^2}{2} & \frac{d}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{Sea, } w = \lambda_1 = \frac{1}{4}[d + \sqrt{d^2 + 24a^2}] \quad \text{y} \quad v = \lambda_2 = \frac{1}{4}[d - \sqrt{d^2 + 24a^2}].$$

$$\text{Entonces, } B(x) = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}$$

$$F(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -cx^2 \end{pmatrix}, \quad G(x) = \begin{pmatrix} cx^2 & 1 \\ v-w & -1 \end{pmatrix}$$

$$U(t) = \begin{pmatrix} e^{wt} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{vt} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego,

$$u^{(0)}(t, b) = 0.$$

$$u^{(1)}(t, b) = \begin{pmatrix} e^{wt} b_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u^{(2)}(t, b) = e^{wt}b_1 \int_0^t e^{w(t-s)} \left[\frac{b^2 c}{v-w} e^{2ws} \right] ds + \int_0^t e^{w(t-s)} \left[\frac{b^2 c}{v-w} e^{2ws} \right] ds =$$

$$e^{wt}b_1 + \frac{b^2 c}{w(v-w)} [e^{wt} - 1]$$

$$u^{(2)}(t, b) = \frac{b^2 c e^{2wt}}{(v-w)(v-2w)}$$

Por lo tanto podemos aproximar por $\psi_2(b_1) = b_1$, entonces la variedad estable puede aproxi-

$$\frac{1}{2c}$$

marse por



$$S : y = \frac{c(x + \frac{3a^2}{2c})^2}{(v-w)(v-2w)}$$

como $x \rightarrow 0$. Del mismo modo obtener la inestable

$$U : x + \frac{3a^2}{2c} = \frac{2cy^2}{(v-w)(v-2w)}$$



2c

2c



1 4

$$\sqrt{\frac{1}{2}}$$

2 = 4 [

Proposición. 3.8. La variedad estable asociada al sistema (2.7):

a) Para $b < 0$ en el punto $(0, 0)$ es:

$$S : y = \frac{cx^2}{(v-w)(v-2w)}$$

$$S : y = \frac{c(x + \frac{3b}{2})^2}{(v-w)(v-2w)}$$

Demostracion: a) Veamos la estabilidad de la familia (2.7) para $b < 0$ en el punto $(0, 0)$ aplicando el teorema (1.13):

Veamos los valores propios de la matriz jacobiana de la familia (2.7) evaluada en el punto $(0, 0)$.

$$\begin{matrix} " & & \\ & 0 & 1 \end{matrix} \#$$

$$\frac{1}{d - \sqrt{d^2 - 24b}}.$$

$$\text{Entonces, } B(x) = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}$$

$$, G(x) = \begin{matrix} cx^2 & 1 \\ v-w & -1 \end{matrix}$$

$$U(t) = \begin{pmatrix} e^{wt} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{vt} \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego,

$$u^{(0)}(t, a) = 0.$$

$$u^{(1)}(t, a) = \begin{pmatrix} e^{wt} a_1 \\ 0 \\ e^{wt} a \end{pmatrix} \int_t^\infty \frac{1}{e^{w(t-s)}} \begin{pmatrix} a^2 c \\ e^{2ws} \end{pmatrix} \int_t^\infty \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{v(t-s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^2 c \\ e^{2ws} \end{pmatrix} ds =$$

$$u^{(2)}(t, a) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \int_t^\infty \frac{1}{v-w} e^{2ws} ds =$$

$$\begin{pmatrix} e^{wt} a_1 + \frac{a^2 c e^{2wt} [e^{wt} - 1]}{w(v-w)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u^{(2)}(t, a) = \frac{a^2 c e^{2wt}}{(v-w)(v-2w)} \quad \square \quad 2c$$

$$\sqrt{\frac{\quad}{2}}$$

— —

$$\sqrt{\frac{\quad}{2}}$$

Por lo tanto podemos aproximar por $\psi_2(a_1) = a_1$, entonces la variedad estable puede apro-

—

ximarse por

$$S : y = \frac{cx^2}{(v-w)(v-2w)}$$

como $x \rightarrow 0$. Del mismo modo obtener la inestable

$$U : x = \frac{2cy^2}{(v-w)((v-2w))}$$

b) Veamos la estabilidad de la familia (2.7) en el punto $(\frac{-3b}{\#}, 0)$, esto es cuando es $b > 0$:

$$\begin{matrix} 0 & 1 \\ \# & \end{matrix}$$

" # " # " #

$$A = 3b d$$

2 2

46

$$= \frac{1}{4} [d - d + 24b].$$

$$\text{Entonces, } B(x) = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}$$

$$, G(x) = \frac{cx^2}{v-w} \quad \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix}$$

$$e^{wt} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$, a = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$U(t) = \quad , \quad V(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{vt} \end{pmatrix}$$

$$u^{(0)}(t, a) = 0.$$

$$u^{(1)}(t, a) = \frac{e^{wt} a_1}{e^{wt} a} \int_0^t e^{w(t-s)} \left[\frac{a^2 c}{v-w} e^{2ws} \int_0^\infty 0 \cdot 0 \right] e^{v(t-s)} ds = \frac{a^2 c}{v-w} e^{wt} \int_0^t e^{(v-w)s} ds$$

$$u^{(2)}(t, a) = \frac{0^1}{0} + \frac{0}{0} \cdot \frac{a^2 c}{v-w} \int_0^t e^{(v-w)s} ds = \frac{a^2 c}{v-w} \left[\frac{e^{(v-w)t} - 1}{v-w} \right]$$

$$e^{wt} a_1 + \frac{a^2 c e^{2wt} [e^{wt} - 1]}{w(v-w)}$$

$$\frac{2c}{v-w}$$

$$u^{(2)}(t, a) = \frac{a^2 c e^{2wt}}{(v-w)(v-2w)}$$

Por lo tanto podemos aproximar por $\psi_2(a_1) = a_1$, entonces la variedad estable puede apro-

ximarse por

$$S : y = -\frac{c(x + \frac{3b}{2})^2}{(v-w)(v-2w)}$$

como $x \rightarrow 0$. Del mismo modo obtener

$$U : x + \frac{3b}{2} = 2cy^2$$

Capítulo 4

Bifurcaciones

En este capítulo analizaremos el estudio de las bifurcaciones de la familia (2.7).

4.1. Familia V

Proposición. 4.1. Sean los conjuntos R_7 y R_8 , ellos son bifurcaciones transcriticas del sistema (2.7)

Demostración: Sea $P_1 : (0, 0)$ y $P_2 : (\frac{3b}{2c}, 0)$ de la proposición (3.5). Si $(b, c, d) \in E_3$ entonces P_1 es una silla y P_2 es un foco inestable, cuando $(b, c, d) \in R_7$, P_1 y P_2 , ellos colapsan en un punto critico, cuyo punto es una cúspide. Luego, cuando $(b, c, d) \in E_2$ entonces P_1 es un foco inestable y P_2 es una silla. Similarmente, ocurre el mismo comportamiento cuando observamos que $(b, c, d) \in E_2$, entonces $(b, c, d) \in R_7$ y finalmente $(b, c, d) \in E_4$.

Ahora, sea $P_1 : (0, 0)$ y $P_2 : (\frac{3b}{2c}, 0)$ de la proposición (3.5). If $(b, c, d) \in E_4$ entonces P_1 es una silla y P_2 es un foco estable, cuando $(b, c, d) \in R_8$, P_1 y P_2 , ellos colapsan en un punto critico, cuyo punto es una cúspide. Luego, cuando $(b, c, d) \in E_1$ entonces P_1 es un foco estable y P_2 es una silla. Similarmente, ocurre el mismo comportamiento cuando observamos que $(b, c, d) \in E_1$, entonces $(b, c, d) \in R_8$ y finalmente $(b, c, d) \in E_3$.

Por lo tanto, los conjuntos R_7 y R_8 son bifurcaciones transcriticas de la familia (2.7) \square

Proposición. 4.2. El conjunto $\{(b, 0, d) | d^2 - 24b < 0\}$ es una bifurcación Silla-Foco-Silla para el sistema (2.7).

Demostración: Por la proposición (3.5), si $(b, c, d) \in E_1$, el punto P_1 es un foco estable y P_2 es una silla. Ahora, cuando $(b, c, d) \in \{(b, 0, d) | d^2 - 24b < 0, d > 0\}$ por la proposición (3.6), P_1 y P_2 ellos colapsan en un foco inestable cuando (b, c, d) va al conjunto E_5 . Luego, ellos aparece de nuevo P_1 y P_2 como un foco estable y una silla respectivamente. \square

Proposición. 4.3. El conjunto $\{(b, 0, d) | d^2 - 24b < 0\}$ es una bifurcación Silla-Foco-Silla para el sistema (2.7).

Demostración: Por la proposición (3.5), si $(b, c, d) \in E_2$, el punto P_1 es un foco inestable y P_2 es una silla. ahora, cuando $(b, c, d) \in \{(b, 0, d) | d^2 - 24b < 0, d < 0\}$ por la proposición (3.6), P_1 y P_2 ellos colapsan en un foco estable cuando (b, c, d) va al conjunto E_6 . Luego, ellos aparece de nuevo P_1 y P_2 como un foco inestable y una silla respectivamente. □

Proposición. 4.4. Sean los conjuntos E_9 y E_{10} , ellos son bifurcaciones locales del sistema (2.7).

Demostración: Sea $P_1 : (0, 0)$ de la proposición (3.5). Si $(b, c, d) \in E_9$ entonces P_1 es un nodo estable. Ahora, cuando $(b, c, d) \in E_{10}$ el punto P_1 es un nodo inestable. Por lo tanto, las regiones E_9 y E_{10} son bifurcaciones locales del sistema (2.7). □

Proposición. 4.5. Sean los conjuntos E_{11} y E_{12} , ellos son bifurcaciones locales del sistema (2.7)

Demostración: Sea $P_2 : (\frac{3b}{2c}, 0)$ de la proposición (3.5). Si $(b, c, d) \in E_{12}$ entonces P_2 es un nodo inestable. Ahora, cuando $(b, c, d) \in E_{11}$ el punto P_2 es un nodo estable. Por lo tanto, las regiones E_{11} y E_{12} son bifurcaciones locales del sistema (2.7). □

A continuación podrás observar de forma detallada las regiones, conjuntos y un mejor análisis sobre las bifurcaciones de la Familia (2.7):

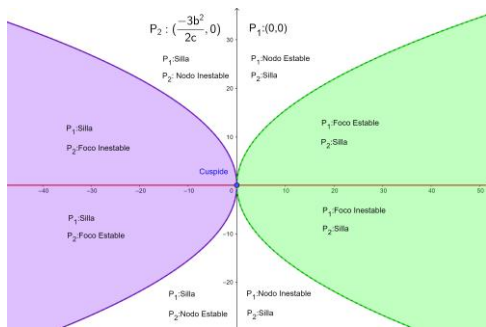


Figura 4.1: Familia I (2.3)

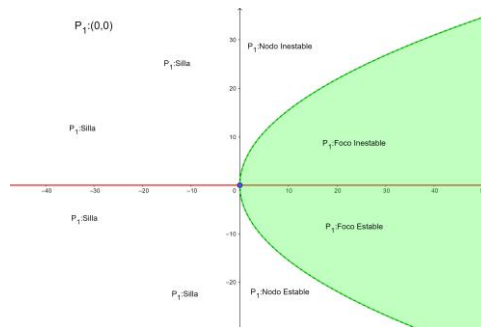


Figura 4.2: (2.7), $c = 0$.

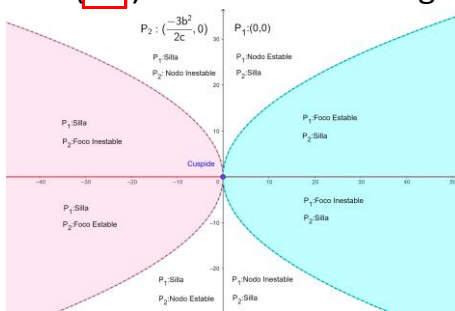


Figura 4.3: (2.7), $c < 0$.

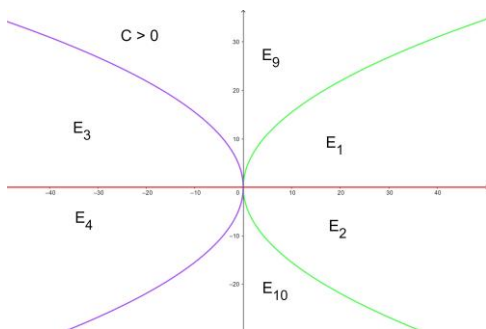


Figura 4.4: (2.7), $c > 0$.

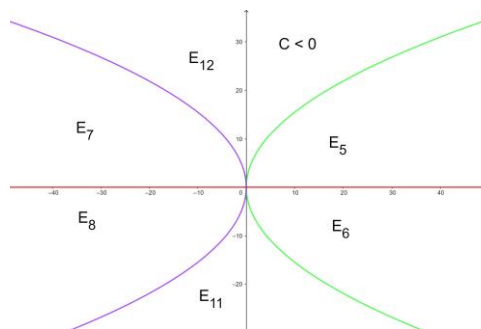


Figura 4.5: (2.7), $c < 0$.

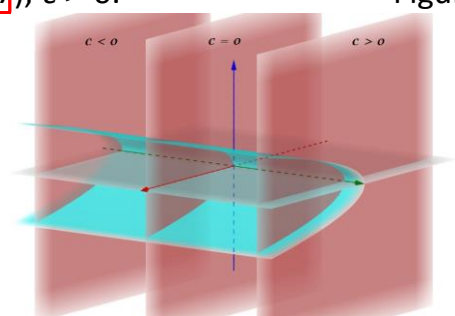


Figura 4.6: (2.7), $c < 0$.

Capítulo 5

Plano Infinito

En este capítulo se analiza la estabilidad de los puntos críticos de las diferentes familias en el plano infinito utilizando la compactificación de Poincaré definida anteriormente.

5.1. Familia I

En la Carta U_1 el sistema asociado a la familia (2.3) es:

$$\begin{aligned}u' &= -u^2v - c \\v' &= -uv^2\end{aligned}\tag{5.1}$$

El sistema anterior no tiene puntos críticos en el infinito.

En la Carta U_2 el sistema asociado a la familia (2.3) es:

$$\begin{aligned}u' &= v + cu^3 \\v' &= -cu^2v\end{aligned}\tag{5.2}$$

Proposición. 5.1. El $(0, 0)$ es un nodo atractor si $c < 0$ y repulsor si $c > 0$.

Demostración: El punto crítico del sistema (5.2) es $P : (0, 0)$. La matriz jacobiana del sistema es:

$$M(u, v) = \begin{pmatrix} 3cu^2 & 1 \\ -2cuv & -cu^2 \end{pmatrix}$$

Luego,

$$M(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Así, $\lambda^2 = 0$. Luego aplicando el Teorema (1.11), sea $v+A(u, v) = 0$ la solución de $v+A(u, v) = 0$, donde $A(u, v) = cu^3$ entonces $v = -cu^3$, por otro lado tenemos que $B(u, v) = cu^2v$, así

obtenemos que $F(u) = -c^2u^5$ y $G(x) = 4cu^2$ entonces $m = 5$, $n = 2$, $a = -c^2$, $b = 4c$ y $m = 2n + 1$, además $b^2 + 4a(n + 1) < 0$. Por tanto el origen del sistema (5.2) en el plano infinito un nodo atractor si $c < 0$ y un nodo repulsor si $c > 0$. \square

Para ver una ilustración detallado del sistema sobre la esfera de Poincaré ver la figura (6.1).

5.2. Familia II

En la Carta U_1 el sistema asociado a la familia (2.4) es:

$$\begin{aligned} u' &= -u^2v + 2b \\ v' &= -uv^2 \end{aligned} \quad (5.3)$$

El sistema anterior no tiene puntos críticos en el infinito.

En la Carta U_2 el sistema asociado a la familia (2.4).

$$\begin{aligned} u' &= v - 2bu^2 \\ v' &= -2buv \end{aligned} \quad (5.4)$$

Proposición. 5.2. El punto $(0, 0)$ tiene un sector hiperbólico y un sector elíptico.

Demostración: El punto crítico asociado al sistema (5.4) es $P : (0, 0)$. La matriz jacobiana del sistema es:

$$M(u, v) = \begin{pmatrix} -4bu & 1 \\ -2bv & -2bu \end{pmatrix}$$

Luego,

$$M(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Así, $\lambda^2 = 0$. Luego aplicando el Teorema (1.11), sea $v + A(u, v) = 0$ la solución de $v + A(u, v) = 0$, donde $A(u, v) = -2bu^2$ entonces $v = -2bu^2$, por otro lado tenemos que $B(u, v) = -2buv$, así obtenemos que $F(u) = -4b^2u^3$ y $G(x) = 6bu$ entonces $m = 2n + 1$ y $b^2 + 4a(n + 1)$. Por tanto el origen del sistema (5.4) en el plano infinito tiene un sector hiperbólico y un sector elíptico. \square

Para ver una ilustración detallado del sistema sobre la esfera de Poincaré ver la figura (6.2).

5.3. Familia III

En la Carta U_1 el sistema asociado a la familia (2.5) es:

$$\begin{aligned} u' &= -u^2v + 2a \\ v' &= -uv^2 \end{aligned} \quad (5.5)$$

El sistema anterior no tiene puntos críticos en el infinito.

En la Carta U_2 el sistema asociado a la familia (2.5).

$$\begin{aligned} u' &= v - 2au^2 \\ v' &= -2auv \end{aligned} \quad (5.6)$$

Proposición. 5.3. El punto $(0, 0)$ tiene un sector hiperbólico y un sector elíptico.

Demostración: El punto crítico asociado al sistema (5.6) es $P : (0, 0)$.

La matriz jacobiana del sistema es:

$$M(u, v) = \begin{pmatrix} -4au & 1 \\ -2av & -2au \end{pmatrix}$$

Luego,

$$M(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Así, $\lambda^2 = 0$. Luego aplicando el Teorema (1.11), sea $v + A(u, v) = 0$ la solución de $v + A(u, v) = 0$, donde $A(u, v) = -2au^2$ entonces $v = -2au^2$, por otro lado tenemos que $B(u, v) = -2auv$, así obtenemos que $F(u) = -4a^2u^3$ y $G(x) = 6au$ entonces $m = 2n + 1$ y $b^2 + 4a(n + 1)$. Por tanto el origen del sistema (5.6) en el plano infinito tiene un sector hiperbólico y un sector elíptico. \square

Para ver una ilustración detallado del sistema sobre la esfera de Poincaré ver la figura (6.3).

5.4. Familia IV

Haciendo una sustitución de, $d = a(p + 4)$.

En la Carta U_1 el sistema asociado a la familia (2.6).

$$\begin{aligned} u' &= -u^2v + \frac{d}{2} - \frac{3a^2v}{2} - c \\ v' &= -uv^2 \end{aligned} \quad (5.7)$$

El sistema anterior no tiene puntos críticos en el infinito.

En la Carta U_2 el sistema asociado a la familia (2.6).

$$\begin{aligned} u' &= v - \frac{d}{2} + \frac{3}{2}a^2u^2v + cu^3 \\ v' &= -\frac{d}{2} + \frac{3}{2}a^2uv^2 + cu^2v \end{aligned} \quad (5.8)$$

Proposición. 5.4. El punto $(0, 0)$ es un nodo estable si $c < 0$ y inestable si $c > 0$.

Demostración: El punto crítico asociado al sistema (5.8) es $P : (0, 0)$.

La matriz jacobiana del sistema es:

$$M(u, v) = \begin{pmatrix} -\frac{dv}{2} + 3a^2v + 3cu^2 & 1 - \frac{du}{2} + \frac{3}{2}a^2u^2 \\ \frac{3}{2}a^2v^2 & -dv + 3a uv + cu^2 \end{pmatrix}$$

Luego,

$$M(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Así, $\lambda^2 = 0$. Luego aplicando el Teorema (1.11), sea $v = f(u)$ una solución de $v + A(u, v) = 0$ entonces sea $v = f(u) = -cu^3 + \dots$ una aproximación a la solución por series de Taylor, además tenemos que $B(u, v) = -\frac{dv^2}{2} + \frac{3}{2}a^2uv^2 + cu^2v$, entonces $F(u) = -c^2u^5 + \dots$ y $G(u) = cu^2 + \dots$, así $m = 5, n = 2, b = 4c$ y $a = -c^2$. Por tanto el origen en el plano infinito es un nodo estable si $c < 0$ e inestable si $c > 0$. \square

Para ver una ilustración detallado del sistema sobre la esfera de Poincaré ver la figura (6.4).

5.5. Familia V

Haciendo una sustitución de, $d = a(s + 4)$.

En la Carta U_1 el sistema asociado a la familia (2.7).

$$\begin{aligned} u' &= -u^2v + \frac{duv}{2} - \frac{3bv}{2} - c \\ v' &= -uv^2 \end{aligned} \tag{5.9}$$

El sistema anterior no tiene puntos críticos en el infinito.

En la Carta U_2 el sistema asociado a la familia (2.7)

$$\begin{aligned} u' &= v - \frac{duv}{2} + \frac{3}{2}bu^2v + cu^3 \\ v' &= -\frac{dv^2}{2} + \frac{3}{2}buv^2 + cu^2v \end{aligned} \tag{5.10}$$

Proposición. 5.5. El punto $(0, 0)$ es un nodo estable si $c < 0$ e inestable si $c > 0$.

Demostración: El punto crítico asociado al sistema (5.10) es $P : (0, 0)$.

La matriz jacobiana del sistema es:

$$M(u, v) = \begin{pmatrix} -\frac{dv}{2} + 3buv + 3cu^2 & 1 - \frac{du}{2} + \frac{3}{2}bu^2 \\ \frac{3}{2}bv^2 + 2cuv & -2dv + 3buv + cu^2 \end{pmatrix}$$

Luego,

$$M(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Así, $\lambda^2 = 0$. Luego aplicando el Teorema (1.11), sea $v = f(u)$ una solución de $v + A(u, v) = 0$ entonces sea $v = f(u) = -cu^3 + \dots$ una aproximación a la solución por series de Taylor, además tenemos que $B(u, v) = -\frac{dv^2}{2} + \frac{3}{2}buv^2 + cu^2v$, entonces $F(u) = -c^2u^5 + \dots$ y $G(u) = cu^2 + \dots$, así $m = 5, n = 2, b = 4c$ y $a = -c^2$. Por tanto el origen en el plano infinito es un nodo estable si $c < 0$ e inestable si $c > 0$. \square

Para ver una ilustración detallado del sistema sobre la esfera de Poincaré ver la figura (6.5) y (6.6) .

Capítulo 6

Retrato De Fase

En este capítulo podemos observar el retrato de fase de cada Familia cuadrática multi-paramétrica.

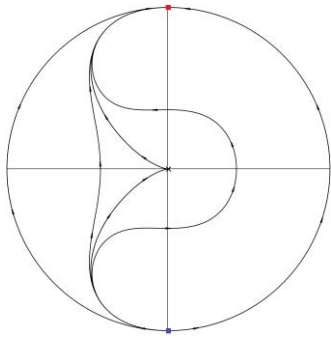


Figura 6.1: Familia I (2.3)

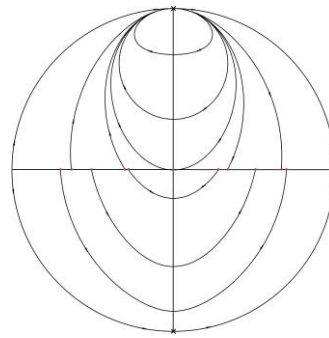


Figura 6.2: Familia II (2.4)

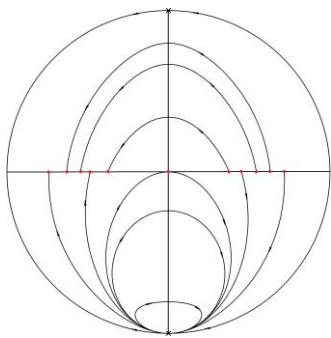


Figura 6.3: Familia III (2.5)

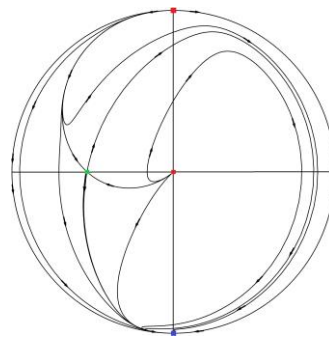


Figura 6.4: Familia IV (2.6)

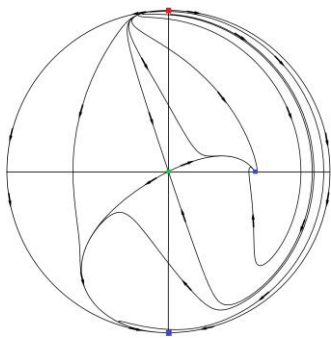


Figura 6.5: Familia V (2.7) cuando $b < 0$.

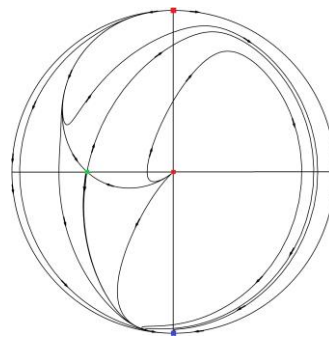


Figura 6.6: Familia V (2.7) cuando $b > 0$.

Bibliografía

- [1] P.B. ACOSTA-HUMÁNEZ, J.T LAZARO, J.J. MORALES-RUIZ, CH. PANTAZI , *On the integrability of polynomial fields in the plane by means of Picard-Vessiot theory*, (2015). Available at arXiv:1012.4796.
- [2] P. B. ACOSTA-HUMÁNEZ, A. REYES-LINERO AND J. RODRÍGUEZ-CONTRERAS, *Algebraic and qualitative remarks about the family $yy' = (\alpha x^{m+k-1} + \beta x^{m-k-1})y + \gamma x^{2m-2k-1}$* , preprint 2014.
Available at arXiv:1807.03551.
- [3] P. B. ACOSTA-HUMÁNEZ, A. REYES-LINERO AND J. RODRÍGUEZ-CONTRERAS, *Galoisian and Qualitative Approaches to Linear Polyanin-Zaitsev Vector Fields*, preprint 2018. Available at arXiv:1807.05272.
- [4] JORGE ALBERTO TORRES HENAO, *Sistemas Dinámicos Planos*. Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas, Medellín, Colombia (2013). <http://bdigital.unal.edu.co/9478/>
- [5] MARÍA LUISA VÍLCHEZ LOBATO, FRANCISCO VELASCO MORENTE, JUAN JOSÉ GARCÍA DEL HOYO , *Bifurcaciones transcriticals y ciclos límites en un modelo dinámico de competición entre dos especies. Una aplicación a la pescadera de engraulis encrasi-cholus de la Región Suratlántica española*, (2002).
- [6] XIE XIANGDONG, ZHANG JIANFENG , *Plane Polynomial System and It's Accompany System*, (2004).
- [7] VALERY A. GAIKO, *Multiple limit cycle bifurcations of the FitzHugh-Nagumo neuronal model*, (2011)
- [8] PERKO, L., *Differential Equations and Dynamical Systems (New York: Springer Verlag)*, 2001.
- [9] GUCKEINHEIMER, J., Y HOLMES, P. 1983, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields (New York: Springer Verlag)*.
- [10] DUMORTIER F., LLIBRE J., ARTES J., *Qualitative Theory Of Planar Differential Systems*, 2006.

- [11] JACK K. HALE Y HÜSEYİN KOÇCAK., *Dynamics and Bifurcations*. Springer-Verlag Springer-Verlag, (1991).
- [12] A.D. POLYANIN AND V.F. ZAITSEV, *Handbook of exact solutions for ordinary differential equations, Second Edition*. Chapman and Hall, Boca Raton (2003).
- [13] CHRIS HERSSENS, PETER DE MAESSCHALCK, JOAN C. ARTÉS, FREDDY DUMORTIER Y JAUME LLIBR, *P4* (<http://mat.uab.es/artes/p4/p4.htm>), Dept. de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona.
- [14] COMPUTATIONAL ALGEBRAIC SYSTEM, DYNAMIC GEOMETRY SOFTWARE; GEOGEBRA.