Universidad del Atlántico	CÓDIGO: FOR-DO-109
	VERSIÓN: 0
	FECHA: 03/06/2020

AUTORIZACIÓN DE LOS AUTORES PARA LA CONSULTA, LA REPRODUCCIÓN PARCIAL O TOTAL, Y PUBLICACIÓN ELECTRÓNICA DEL TEXTO COMPLETO

Puerto Colombia, **20 de Agosto de 2020**

Señores
DEPARTAMENTO DE BIBLIOTECAS
Universidad del Atlántico

Asunto: Autorización Trabajo de Grado

Cordial saludo,

Yo, **MIGUEL EDGARDO BERROCAL OLAYA**, identificado(a) con **C.C. No. 1.042.449.910** de **SOLEDAD**, autor(a) del trabajo de grado titulado **ANÁLISIS COMPARATIVOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES Y EN DIFERENCIAS** presentado y aprobado en el año **2020** como requisito para optar al título Profesional de **MATEMÁTICO**; autorizo al Departamento de Bibliotecas de la Universidad del Atlántico para que, con fines académicos, la producción académica, literaria, intelectual de la Universidad del Atlántico sea divulgada a nivel nacional e internacional a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Los usuarios del Departamento de Bibliotecas de la Universidad del Atlántico pueden consultar el contenido de este trabajo de grado en la página Web institucional, en el Repositorio Digital y en las redes de información del país y del exterior, con las cuales tenga convenio la Universidad del Atlántico.
- Permitir consulta, reproducción y citación a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato CD-ROM o digital desde Internet, Intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer.

Esto de conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, “Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores”, los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.
Atentamente,

Firma Miguel Berrocal Olaya
MIGUEL EDGARDO BERROCAL OLAYA
C.C. No. 1.042.449.910 de SOLEDAD

Universidad del Atlántico	CÓDIGO: FOR-DO-110
	VERSIÓN: 01
	FECHA: 02/DIC/2020

DECLARACIÓN DE AUSENCIA DE PLAGIO EN TRABAJO ACADÉMICO PARA GRADO

Este documento debe ser diligenciado de manera clara y completa, sin tachaduras o enmendaduras y las firmas consignadas deben corresponder al (los) autor (es) identificado en el mismo.

Puerto Colombia, **20 de Agosto de 2020**

Una vez obtenido el visto bueno del director del trabajo y los evaluadores, presento al **Departamento de Bibliotecas** el resultado académico de mi formación profesional o posgradual. Asimismo, declaro y entiendo lo siguiente:

- El trabajo académico es original y se realizó sin violar o usurpar derechos de autor de terceros, en consecuencia, la obra es de mi exclusiva autoría y detento la titularidad sobre la misma.
- Asumo total responsabilidad por el contenido del trabajo académico.
- Eximo a la Universidad del Atlántico, quien actúa como un tercero de buena fe, contra cualquier daño o perjuicio originado en la reclamación de los derechos de este documento, por parte de terceros.
- Las fuentes citadas han sido debidamente referenciadas en el mismo.
- El (los) autor (es) declara (n) que conoce (n) lo consignado en el trabajo académico debido a que contribuyeron en su elaboración y aprobaron esta versión adjunta.

Título del trabajo académico:	**ANÁLISIS COMPARATIVOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES Y EN DIFERENCIAS**
Programa académico:	**MATEMÁTICAS**

Firma de Autor 1:	Miguel Berrocal Olaya						
Nombres y Apellidos:	**MIGUEL EDGARDO BERROCAL OLAYA**						
Documento de Identificación:	**CC**	**X**	**CE**		**PA**		**Número:**	**1.042.449.910**
Nacionalidad:					**Lugar de residencia:**			
Dirección de residencia:								
Teléfono:					**Celular:**			

Universidad del Atlántico	
	CÓDIGO: FOR-DO-111
	VERSIÓN: 0
	FECHA: 03/06/2020

FORMULARIO DESCRIPTIVO DEL TRABAJO DE GRADO

TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO DEGRADO	**ANÁLISIS COMPARATIVO DE ECUACIONESDIFERENCIALES Y EN DIFERENCIAS**
AUTOR(A) (ES)	**MIGUEL EDGARDO BERROCAL OLAYA**
DIRECTOR (A)	**JULIO ROMERO PABON**
CO-DIRECTOR (A)	**GABRIEL VERGARA RIOS**
JURADOS	**GABRIEL VERGARA RIOS JORGE RODRIGUEZ CONTRERAS**
TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR ALTITULO DE	**MATEMÁTICO**
PROGRAMA	**MATEMÁTICAS**
PREGRADO / POSTGRADO	**PREGRADO**
FACULTAD	**CIENCIAS BASICAS**
SEDE INSTITUCIONAL	**PUERTO COLOMBIA**
AÑO DE PRESENTACIÓN DEL TRABAJO DE GRADO	**2020**
NÚMERO DE PÁGINAS	**64**
TIPO DE ILUSTRACIONES	**ILUSTRACIONES, RETRATOS, TABLAS, GRÁFICOS,DIAGRAMAS Y LÁMINAS.**
MATERIAL ANEXO (VÍDEO, AUDIO, MULTIMEDIA O PRODUCCIÓN ELECTRÓNICA)	**NO APLICA**
PREMIO O RECONOMIENTO	**NO APLICA**

TITULO DEL TRABAJO DE GRADO
ANALISIS COMPARATICVO DE ECUACIONES DIFERENCIALES Y EN DIFERENCIAS

MIGUEL EDGARDO BERROCAL OLAYA

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TITULO DE

MATEMÁTICO

PROGRAMA DE

MATEMATICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

BASICAS

UNIVERSIDAD DEL

ATLÁNTICO PUERTO

COLOMBIA

2020

TITULO DEL TRABAJO DE GRADO

NOMBRE(S) COMPLETO ESTUDIANTE(S)

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TITULO DE XXXXXX

NOMBRE COMPLETO DIRECTOR(A) DEL TRABAJO DE GRADO

JULIO ROMERO PABON

ÚLTIMO TITULO DEL /LA DIRECTORA(A)

DOCTORTADO EN MATEMACIAS

PROGRAMA DE

MATEMATICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

BASICAS

UNIVERSIDAD DEL ATLÁNTICO

PUERTO COLOMBIA

2020

NOTA DE ACEPTACION

____

____

____

____

DIRECTOR(A)
JULIO CESAR ROMERO PABON

____

JURADO(A)S
JORGE RODRIGUEZ CONTRERAS

____

GABRIEL VERGARA RIOS

____

RESUMEN

El objetivo principal de este trabajo de grado, es proponer el análisis comparativo de las ecuaciones diferenciales y en diferencias.

Inicialmente se realizó una investigación sobre los diferentes tipos de ecuaciones en diferencias y diferenciales, para elaborar un análisis comparativo de estas, considerando semejanzas y diferencias entre las soluciones. por tanto, se efectuó un estudio a cada ecuación desde las lineales de primer grado hasta las lineales homogéneas y no homogéneas de grado n con coeficientes constantes, aplicando técnicas de la teoría ecuaciones en diferencias y diferenciales, resaltando sus principales características y por último se hicieron aplicaciones con los diferentes tipos de ecuaciones.

Se compararon los sistemas de ecuaciones en diferencias y diferenciales con coeficientes con- stantes y sus soluciones, para luego encontrar diversas aplicaciones de estas, Donde, evidencia un mejor enfoque al estudiar el comportamiendo de las trayectorias de las soluciones cercanas al infinito usando tablas comparativas con ayuda de Geogebra.

Por último, en este trabajo, se usan programas como Gogebra, donde llevamos a cabo un proced- imiento para ilustrar diagramas de sistemas de ecuaciones como diagramas de Coweb y de bifurcación.

PALABRAS CLAVE: Sistemas Dinamicos, Ecuaciones en diferencias, Ecuaciones diferenciales, Coweb , Bifurcación.

ABSTRACT

The main objective of this degree work is to propose the comparative analysis of differential and difference equations.

Initially, an investigation was carried out on the different types of differential and difference equations, to develop a comparative analysis of these, considering similarities and differences between the solutions. Therefore, a study was carried out on each equation from the linear of the first degree to the linear homogeneous and non-homogeneous of degree n with constant coefficients, applying techniques of the theory of differential and difference equations, highlighting their main characteristics and finally they were made applications with the different types of equations.

Difference and differential equation systems with constant coefficients and their solutions were compared, to then find various applications of these, Where, evidence of a better approach when studying the behavior of the trajectories of the solutions close to infinity using comparative tables with the help of Geogebra.

Finally, in this work, programs like Gogebra are used, where we carry out a procedure to illustrate diagrams of systems of equations as Coweb and bifurcation diagrams.

KEY WORDS: Dynamic Systems, Difference equations, Differential equations, Coweb,

Índice general

Agradecimientos

Quiero agradecerle a Dios, a mi familia, que estuvieron siempre apoyandome para obtener este titulo de matemático, agradecerle especialmente a mis padres, a Zulma Olaya y Edgardo Berrocal por el grato apoyo incondicional que me brindaron, a mis hermanos Edgardo David, Hadit Berrocal y Jhoan Álvarez, que siempre estuvieron atentos apoyandome en los momentos mas difíciles.

Agradecer a mis compañeros de clases por tantas veces que estudiando, me explicaron pacientemente y por la confianza que en mi depositaron, amigos que siempre estuvieron dispuestos ayudarme en lo que necesitara.

Le agradezco por el apoyo, la dedicación y la confianza de mis profesores, al profesor Julio Romero por haberme brindado su apoyo y la oportunidad de desarrollar este trabajo.

Introducción

la teoría de ecuaciones no tiene un origen definido, debido que desde el principio de los tiempos el hombre ha estado buscando formas alternativas de solucionar problemas de carácter matemático asociando cantidades. Es así como múltiples problemas importantes de muy diversos campos encuentran solución apoyándose en la teoría de ecuaciones. Puesto que muchos de estos necesitan la elaboración de modelos matemáticos, los cuales funcionen como representación a dichos problemas, este tipo de ecuaciones tienen un sin número de aplicaciones en la física, biología, economía, ingeniería, sociología, fisiología entre otras.

Como prueba de esto, se encuentra el papiro egipcio del Rhid que data del año 1600 a. C. Y el de Moscú datado en 1850 a. C. Los cuales exponen una variedad de problemas matemáticos de tipo aritméticos y algebraicos a los cuales se les daba solución de forma retórica, haciendo operaciones con los datos, muy parecido a lo que hacemos hoy en día. Las soluciones se obtenían por el método que hoy conocemos como el de regula falsi o el método de la posición falsa, que consiste en tomar un valor arbitrario y evaluarlo en la ecuación, si se cumplía la igualdad se tenía la solución, en el caso contrario por medio de cálculos se obtenía la solución exacta.

Los babilonios, en el periodo comprendido entre 600 a. C. y 300 d. C. trabajaron en los sistemas de ecuaciones lineales. Más tarde los griegos lograron resolver estos sistemas por medio de métodos geométricos. No es hasta que Viéte (1540-1603) introduce una notación simbólica en las ecuaciones y abre el camino para que matemáticos como Descartes (1596-1650), contribuyeran al desarrollo de dicha notación, así es como el algebra se convierte en la ciencia de los cálculos simbólicos y de las ecuaciones. Luego Euler (1707-1783), define el algebra como la teoría de los cálculos con cantidades de distintas clases para llegar al actual proceso que conocemos.

Las ecuaciones en diferencias y las ecuaciones diferenciales son herramientas versátiles de análisis. Son excelentes para representar un gran número de situaciones dinámicas de la vida cotidiana. En algunos casos encontrar la solución a dichas ecuaciones no es fácil, pero en este trabajo se encuentra un compendio de datos los cuales pueden ayudar a su comprensión.

En la siguiente tabla se puede apreciar esquematicamente la distrubución del contenido de este documento.

Análisis comparativo de Ecuaciones diferenciales continuas y discretas	
E. D. continuas	E. en diferencias
Conceptos y variables	Conceptos y variables
Soporte y teoría	Soporte y teoría
Problemas y aplicaciones	Problemas y aplicaciones
Aportes	

Cuadro 1: Tabla guía.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Conceptos Básicos

Definición 1.1. Una sucesión numérica es una función $X(k)$, definida en el dominio de todos los enteros no negativos. Y la infinidad de valores de $X(k)$, con $k = 0, 1, 2, ...$ se ordenan en la forma

$$X(0), X(1), X(2), ..., X(k)$$

Cada uno de los valores que forman la sucesión se llama término de la sucesión. Dado que la variable k no es sino un número que representa el orden de los términos, se puede decir que una sucesión es un arreglo lineal de una infinidad de números ordenados por cierta regla.

Definición 1.2. Una sucesión aritmética esta compuesta de términos que se obtienen sumando sucesivamente una constante al primer termino. la constante se llama diferencia común. Una sucesión geométrica consta de términos que se obtienen multiplicando el primer término sucesivamente por una constante que se llama razón común.

1.2. Sucesión geomética y aritmética

1.2.1. Sucesión geométrica

Teorema 1.3. Sea a una constante distinta de cero, la ecuación en diferencias

$$X(k+1) + aX(k) = 0, \qquad n = 0, 1, 2, ..., \qquad (1)$$

tiene como solución la familia

$$X(k) = ca^k \qquad (2)$$

para cualquier valor de parámetro c.

Demostración. Se sustituye k por $k+1$ en la ecuación (2) y se tiene

$$X(k+1) = ca^{k+1} \qquad (3)$$

las ecuaciónes (2) y (3) implican que

$$X(k+1) + aX(k) = ca^{k+1} - aca^k = ca^{k+1} - ca^{k+1} = 0$$

si $k = 0$ entonces $X(0) = c$ la ecuación (2) cumple con la condición de unicidad. por consiguiente la ecuación (2) es solución de la ecuación (1). □

Ejemplo 1.4. Hallar la sucesión definida por la ecuación en diferencia $X(k+1)+2X(k) = 0$ si su término inical es 3.

la solución esta dada por la familia $X(k) = c2^k$ en este caso que el primer termino de la ecuación sea 3 entonces $X(0) = 3$ por lo tanto $X(0) = c2^0 = c = 3$ así $X(k) = 3 \cdot 2^k$ que es le término general de la sucesión $s = \{3, 6, 12, 24, ...\}$.

1.2.2. Sucesión aritmética

Teorema 1.5. Sea

$$X(k+1) - X(k) = b, \quad k = 0, 1, 2, .. \quad (4)$$

tiene como solución la familia

$$X(k) = c + kb. \quad (5)$$

Demostración. A partir de

$$X(1) = X(0) + b$$

$$X(2) = X(1) + b = X(0) + 2b$$

si k se sustituye por $k + 1$, en la ecuación (5).

$$X(k+1) = c + (k+1)b$$

las ecuaciones (5) y (6) implican que

$$X(k+1) - X(k) = c + (k+1)b - (c + kb) = b$$

Por lo tanto la ecuación (5) es la solución de la ecuación (4). Si se hace $k = 0$ en (5), $X(0) = C$. □

Ejemplo 1.6. Hallar la suceción definida por la ecuación en diferencia X(k+1)-X(k)=4 si su término inical es 2.

la solución esta dada por la familia $X(k) = c + k \cdot 4$ en este caso que el primer termino de la ecuación sea 2 entonces $X(0) = 2$ por lo tanto $X(0) = c + (0)b = c = 2$ así $X(k) = 2 + 4k$ que es le término general de la sucesión $s = \{2, 6, 10, 14, ...\}$.

1.3. Crecimiento geométrico y exponencial en tiempo discreto

En los modelos dinámicos de tiempo discreto, el modelo clásico es el de crecimiento geométrico, el supuesto básico es que el valor de una variable en un período determinado, o período k, es igual al valor de dicha variable en el período anterior multiplicado por un factor a. este fenómeno dinámico podría describirse matemáticamente de la siguiente forma:

$$X(k+1) = aX(k)$$

Esto significa que: para $k = 0$

$$X(1) = aX(0)$$

para $k = 1$

$$X(2) = aX(1) = a^2X(0)$$

para $k = 2$

$$X(3) = aX(2) = a^3X(0)$$

en general

$$X(k) = a^kX(0)$$

Ejemplo 1.7. Una situación típica donde se aplicaría el modelo de crecimiento geométrico anterior es cuando se deposita un monto $X(0)$ en un banco a una tasa de interés constante e igual a r, durante varios períodos. En este caso, el saldo en la cuenta en los distintos períodos seguiría la relación:

$$X(k+1) = (1+r)X(k)$$
$$X(k) = (1+r)^kX(0)$$

Ejemplo 1.8. La población de un país se duplica cada 20 años y se desea determinar el tiempo que demora en quintuplicarse, suponiendo que la tasa de crecimiento de la población es constante.

En este caso para hallar la tasa de crecimiento es a constante. Se tiene que:

$$X(K+1) = (1+a)X(K)$$

Además $X(20) = X(0)$

Se sigue

$$X(20) = (1+a)^{20}X(0)$$
$$2X(0) = (1+a)^{20}X(0)$$
$$2 = (1+a)^{20}$$
$$\sqrt[20]{2} - 1 = a$$
$$a = 0{,}03526$$

Una vez obtenida la tasa de crecimiento, se debe hallar el tiempo k para el que la población se quintuplica, esto es:

$$X(k) = (1 + 0{,}03526)^k X(0)$$

$$X(k) = (1{,}03526)^k X(0) = 5X(0)$$

Despejando k.

$$(1{,}03526)^k = 5$$

$$ln((1{,}03526)^k) = ln(5)$$

$$kln(1{,}03526) = ln(5)$$

$$k = \frac{ln(5)}{ln(1{,}03526)} = 46{,}4$$

1.3.1. Crecimiento geométrico y exponencial en tiempo continuo

El modelo de crecimiento exponencial en tiempo continuo es similar al modelo de crecimiento geométrico. Lo que se postula es que el cambio experimentado por una variable $X(t)$ por unidad de tiempo es proporcional al valor de dicha variable, es decir.

$$\frac{dX(t)}{dt} = aX(t)$$

Donde $\frac{dX(t)}{dt}$ es la derivada de $X(t)$ respecto al tiempo.

La solución de la ecuación diferencial es:

$$\frac{dX(t)}{dt} = aX(t)$$

$$\int \frac{dX(t)}{X(t)} = \int adt$$

$$X(t) = ce^{at}$$

cuando $t = 0$, $X(0) = c$, por lo tanto la solución es

$$X(t) = X(0)e^{at}$$

Ejemplo 1.9. Suponga que la población de un país crece a una tasa anual de 5 porciento a partir de una población inicial de 1 millón de personas, entonces al cabo de 4 años habría un total de personas igual a:

$$X(t) = X(0)e^{at}$$

$$X(4) = 1000000 * e^{(5)(4)} = 1221403$$

Esta respuesta difiere de aquella que se obtendrá de trabajar en tiempo discreto donde $X(4)$ será igual a:

$$X(k) = (1 + r)^k X(0)$$

$$X(4) = (1 + 5)^4 * 1000000 = 1215506$$

La razón para esta diferencia es que el modelo discreto supone que el crecimiento ocurre una vez al año, mientras que el modelo continuo supone que esto ocurre en forma continua y permanente.

1.4. Crecimiento con entradas y salidas en tiempo discreto

1.4.1. Crecimiento con entrada en tiempo discreto

Los modelos anteriores pueden ser modificados para incorporar la posibilidad de entradas o salidas al sistema. Para ello se verá, en primer lugar, el sistema dinámico en tiempo discreto con entrada constante así:

$$X(k + 1) = aX(k) + b$$

Claramente, si b es igual cero, no habría diferencia con el modelo de crecimiento geométrico anterior. Sin embargo, el caso más general es cuando b, llamado entrada del sistema, es distinto de cero. Este sería el caso, por ejemplo, de un modelo de población que incluyera inmigraciones o emigraciones. La evolución de este sistema puede describirse de la siguiente forma:

para $k = 0$

$$X(1) = aX(0) + b$$

para $k = 1$

$$X(2) = aX(1) + b = a^2X(0) + ab + b$$

para $k = 2$

$$X(3) = aX(2) + b = a^3X(0) + a^2b + ab + a$$

en general

$$X(k) = a^kX(0) + a^{k-1}b + a^{k-2}b + ... + ab + b$$

$$X(k) = a^kX(0) + (a^{k-1} + a^{k-2} + ... + a + 1)b$$

ahora si $a = 1$

$$X(k) = X(0) + kb$$

Un ejemplo de esa situación podría ser el de una cuenta corriente, cuyo saldo solo depende de los abonos o giros que se realicen, b.

Si $a \neq 1$, la expresión

$$(a^{k-1} + a^{k-2} + ... + a + 1)$$

es de la siguiente forma

$$(a^{k-1}+a^{k-2}+...+a+1)=\frac{(1-a)(a^{k-1}+a^{k-2}+...+a+1)}{(1-a)}$$

$$=\frac{(a^{k-1}+a^{k-2}+...+a+1)-(a^{k}+a^{k-1}+...+a^{2}+a)}{(1-a)}=\frac{1-a^k}{1-a}$$

Así la solución general al sistema $X(k+1)=aX(k)+b$ sería:

$$X(k)=\begin{cases} X(0)+kb & si \quad a=1 \\ a^kX(0)+\frac{1-a^k}{1-a}b & si \quad a\neq 1 \end{cases}$$

1.4.2. Crecimiento con entrada variable en tiempo discreto

En los ejemplos anteriores se ha supuesto que la entrada es constante todos los periodos. A continuación se muestra un ejemplo, en tiempo discreto, donde la entrada depende del periodo que se trate.

Ejemplo 1.10. Suponga que un padre de familia acaba de depositarle a su hijo de 6 años, que estuvo de cumpleaños ayer 6000 dólares en una cuenta de ahorros al 8 % anual. Así mismo, prometió depositarle todos los años el día después de su cumpleaños un monto de 1.000 dólares por el número de años que haya cumplido.

Si se define $X(k)$ como el monto en la cuenta de ahorro de hijo, en el k ésimo cumpleaños el hijo tendrá en intereses:

$$X(k+1)=0{,}08(X(k)+1000k)$$

$$X(k+1)=0{,}08X(k)+0{,}08*1000k$$

1.5. Aplicación

Definición 1.11. Una aplicación T entre dos conjuntos no vacÍos A y B se denota por $T:A\rightarrow B$ y significa que T asigna a todo elemento de A (conjunto de partida o inicial) uno de B (conjunto de llegada o final) y solo uno.

1.6. Aplicación contractiva

Definición 1.12. Sea T una aplicación definida de un espacio métrico E en si mismo. T es una aplicación contractiva si existe α, $0<\alpha<1$ tal que para todo $x,y\in E$ se verifica que $d(T(x),T(y))\leq\alpha d(x,y)$

Comentario 1.13. Toda aplicación contractiva es continua.

Teorema 1.14. Toda aplicación contractiva T definida de un espacio métrico completo E en si mismo tiene un único punto fijo, Es decir, existe un punto $x \in E$ tal que $T(x) = x$

Demostración. Sea $x_0 \in E$ un punto de partida. Si se aplica la transformación T sucesivamente se tiene:

$$T(x_0) = x_1, T(x_1) = x_2, ..., T(x_n) = x_{n+1}$$

La sucesión resultante es una sucesión de Cauchy puesto que:

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(T(x_n), T(x_{n-1})) \leq \alpha d(x_n, x_{n-1}) \leq ... \leq \alpha^n d(x_1, x_0)$$

Utilizando la propiedad triangular de la distancia se obtiene que la distancia entre dos elementos cualesquiera de la sucesión es

$$d(x_{n+k}, x_n) \leq d(x_{n+k}, x_{n+k-1}) + d(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}) + ... + d(x_{n+1}, x_n)$$

$$\leq (\alpha^{n+k-1} + \alpha^{n+k-2} + ... + \alpha^n) d(x_1, x_0) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_1, x_0)$$

como α es menor que 1, para un valor n suficientemente grande la distancia $d(x_{n+k}, x_n)$ se puede hacer tan pequeña como se quiera; por tanto la sucesión es de Cauchy, y como E es un espacio métrico completo la sucesión es convergente.

Sea x el límite de la sucesión. Como T es continua

$$T(x) = T(lim_{n\to\infty} x_n) = lim_{n\to\infty} T(x_n) = lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x$$

Se tiene entonces que el límite de la sucesión es un punto fijo de T. Sólo falta demostrar que es el único punto fijo de la transformación. Esto es asi porque si existiera otro punto fijo z distinto de x, al ser T contractiva

$$d(x, z) = d(T(x), T(z)) \leq \alpha d(x, z) < d(x, z)$$

debido que $0 < \alpha < 1$ lo cual e sua contradicción, Por tanto el punto fijo es único. □

Definición 1.15. Sea $f(x)$ una función definida en un subconjunto $D\mathbb{R}^{\ltimes}$, con valores en $\mathbb{R}^{\ltimes}$. se dice que $f(x)$ verifica la condición de Lipschitz, o que es lipschitziana en D, si existe una constante L tal que para todo $x_1, x_2 \in D$

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|$$

Las funciones que verifican la condición de Lipschitz, se llaman funciones globalmente lipschitzianas en D, o simplemente lipschitzianas en D. L se denomina constante de lipschitz

Definición 1.16. Sea $f(x)$ una función definida en un subconjunto abierto $D \subsetneq \mathbb{R}^{\ltimes}$, con valores en $\mathbb{R}^{\ltimes}$. Se dice que $f(x)$ es localmente lipschitziana en D si para cada rectángulo $R \subsetneq D$ existe una constante L tal que si $x_1, x_2 \in R$

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|$$

Comentario 1.17. La condición de lipschitz es mas fuerte que la de continuidad.

Teorema 1.18. El teorema de Picard-Lindelof considera el problema de valor inical

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

donde la función $f(x,y) : [a,b] \times \mathbb{R}^{\ltimes} \to \mathbb{R}^{\ltimes}$ es continua en $[x_0,b] \times \mathbb{R}^{\ltimes}$ y verifica la condición de lipschitz respecto de la segunda variable en $[x_0,b] \times \mathbb{R}^{\ltimes}$, es decir, existe una constante L tal que para todo $x \in [x_0,b]$ y todo $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^{\ltimes}$ se verifica que

$$\|f(x,y_1) - f(x,y_2)\| \leq L\|y_1 - y_2\|$$

Entonces el problema de valor inicial propuesto tiene una única solución

Demostración. Se considera el espacio vectorial $E = \mathcal{C}([x_0,b], \mathbb{R}^{\ltimes})$ de las funciones continuas en el intervalo $[x_0,b]$. Dadas dos funciones $\varphi_1, \varphi_2 \in E$ se define la distancia:

$$d(\varphi_1,\varphi_2) = sup\{e^{-k(x-x_0)}\|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)\|\} \quad x \in [x_0,b]$$

Siendo k una constante fija tal que $k > L$. se puede desmotrar fácilmente que es una distancia y que el espacio vectorial E con esta distancoa es copleto. Se tiene entonces que E es un espacio métrico completo

Se define ahora sobre E la aplicación T tal que dada la función $\varphi \in E$

$$T_\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s,\varphi(s))ds$$

$T(\varphi)$ es también una función definida en el intervalo $[x_0,b]$, y por tanto pertenece a E.

Entonces, si $\varphi_1, \varphi_2 \in E$

$$e^{-k(x-x_0)}\|T_{\varphi_1}(x) - T_{\varphi_2}(x)\| \leq \int_{x_0}^{x} e^{-k(x-x_0)}\|f(s,\varphi_1(s)) - f(s,\varphi_1(s))\|ds$$

$$= \int_{x_0}^{x} e^{-k(x-s)}e^{-k(s-x_0)}\|f(s,\varphi_1(s)) - f(s,\varphi_1(s))\|ds \leq Ld(\varphi_1,\varphi_2)\int_{x_0}^{x} e^{-k(x-s)}ds$$

$$\leq \frac{L}{k}d(\varphi_1,\varphi_2)$$

Se tiene entonces que

$$d(T(\varphi_1),T(\varphi_2)) = sup\{e^{-k(x-x_0)}\|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)\| \quad x \in [x_0,b]\} \leq \frac{L}{k}d(\varphi_1,\varphi_2)$$

Como $k > L$, la aplicación es contractiva y tiene un único punto fijo que es la única solución del problema de valor inicial propuesto. $\square$

Corolario 1.19. Se considera el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = f(x,y) & x \in [x_0, b] \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Donde la función $f(x,y) : [a,b] \times \mathbb{R}^{\ltimes} \to \mathbb{R}^{\ltimes}$ es continua en $[x_0, b] \times \mathbb{R}^{\ltimes}$ y $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ existe y es continua en $[x_0, b] \times \mathbb{R}^{\ltimes}$. Entonces el problema de valor inicial propuesto tiene una única solución

Comentario 1.20. Este corolario puede ser de mayor utilidad que el de $pircard - lindelöf$, suele ser mas facil demostrar la continuidad de $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ que probar directamente que se verifica la condicion de lipschitz

1.7. Ecuación en diferencias

Definición 1.21. se le llama ecuación en diferencias a una expresión del tipo

$$F(k, X(k), X(k+1), \cdots, X(k+n-1), X(k+n)) = 0$$

donde X es una función definida en los enteros. una solución de la misma, es toda sucesión que la satisfaga.

El conjunto de todas la soluciones recibe el nombre de solución general. esta solución general presenta cierto número de parámetro, que pueden determinarse a partir de las condiciones iniciales, dando lugar a las diferentes soluciones particulares.

Luego k es la variable independiente, y sólo toma valores enteros $k = 0, 1, 2, ...$, generalmente k representa el número de generaciones como: años, trimestres, meses y días. Que han transcurrido desde un momento inical $k = 0$, del mismo modo, $(X(0), X(1), X(2), ...)$ es una sucesión, donde $X(k)$ corresponde a un valor concreto de k.

Definición 1.22. Se le denomina orden de la ecuación, a la diferencia entre el mayor y el menor de los Âíndices que afectan a X. es decir si después de simplificar esta expresión quedan los términos $X(k+b_1)$ y $X(k+b_2)$ como el mayor y el menor, respectivamente, se dice que la ecuación es de orden $b_0 = b_1 - b_2$

Ejemplo 1.23. La expresión $-2X(k+3) + 3X(k) = k+1$, es una ecuación en diferencias de orden $3 - 0 = 3$ o de tercer orden.

1.8. Ecuación diferencial

Definición 1.24. se le llama ecuación diferencial a una expresión del tipo

$$F\left(t, y(t), \frac{dy}{dt}(t), \cdots, \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}(t), \frac{d^n y}{dt^n}(t)\right) = 0$$

donde t está definida en los reales. una solución de la misma, es toda función que la satisfaga.

El conjunto de todas la soluciones recibe el nombre de solución general. esta solución general presenta cierto número de parámetro, que pueden determinarse a partir de las condiciones iniciales, dando lugar a las diferentes soluciones particulares.

t es la variable independiente, y continua, generalmente k representa el el tiempo que ha transcurrido desde un momento inical $t = 0$.

Capítulo 2

Ecuaciónes en diferencias y diferenciales lineales

2.0.1. Ecuación en diferencias lineal de primer orden

Definición 2.1. Una ecuación en diferencias lineal de primer orden es aquella que puede expresarse como

$$a_1(k)X(k+1) + a_0(k)X(k) = g(k) \qquad (2)$$

Donde $a_i(k), i = 0, 1, 2$ y $g(k)$ son funciones en la variable discreta k. Si la sucesión $g(k)$ es nula, entonces la ecuación lineal recibe el nombre de ecuación homogénea asociada a (2). Cuando las funciones $a_1(k)$ y $a_0(k)$ son constantes, se dice que la ecuación lineal (2) es de coeficientes constantes.

Este tipo de ecuaciones son muy interesantes en el estudio de dinámica de poblaciones. Suelen aparecer escritas como

$$X(k+1) = a(k)X(k) + q(k)$$

donde $a(k)$ y k representa el crecimiento de la población en el tiempo k y $q(k)$ el número de individuos que en el tiempo k se incorporan a la población como consecuencia de la inmigración.

Ejemplo 2.2. La ecuación en diferencias $X(k+1) - X(k) = 2$, es de primer orden y tiene por solución general a todas las progresiones aritméticas de razón 2, es decir

$$X(k) = 2k + C$$

siendo C una constante cualquiera. Una solución particular cuando $C = 1$, es la progresión aritmética $(1, 3, 5, 7, \cdots, 2k+1, \cdots)$.

2.0.2. Ecuación diferencial lineal de primer orden

Definición 2.3. Una ecuación diferncial es lineal de primer orden si se puede representar de la forma:

$$\frac{dX(t)}{dt} + a_0(t)X(t) = g(t)$$

Si $g(t)$ es igual a cero, se dice que la ecuación es homogénea. Si $a_0 = cte$, se dice que es de coefiecientes constantes.

Comentario 2.4.
- Se denomina orden de una ecuación diferencial al de la derivada de mayor orden que aparece en dicha ecuación diferencial.
- Se denomina grado de una ecuación diferencial al exponente al que está elevada la derivada de mayor orden de dicha ecuación diferencial

2.0.3. Ecuación en diferencias lineal de segundo orden

Definición 2.5. Una ecuación en diferencias lineal de segundo orden es aquella que puede expresarse como

$$a_2(k)X(k+2) + a_1(k)X(k+1) + a_0(k)X(k) = g(k) \qquad (3)$$

Donde $a_i(k), i = 0, 1, 2, 3$ y $g(k)$ son funciones en la variable discreta k. Si la sucesión $g(k)$ es nula, entonces la ecuación lineal recibe el nombre de ecuación homogénea asociada a (3). Cuando las funciones $a_0(k)$,$a_1(k)$ y $a_2(k)$ son constantes, se dice que la ecuación lineal (3) es de coeficientes constantes.

Al igual que las ecuaciones de primer orden este tipo de ecuaciones son muy interesantes en el estudio de dinámica de poblaciones. Suelen aparecer escritas como

$$X(k+2) = a(k)X(k+1) + b(k)X(k) + q(k)$$

donde $a(k)$, $b(k)$ y k representa el crecimiento de la población en el tiempo k y $q(k)$ el número de individuos que en el tiempo k se incorporan a la población como consecuencia de la inmigración.

Ejemplo 2.6. Supongamos que una población de insectos crece el triple, en cada período de tiempo que transcurre entre dos medidas, de lo que crecío en el período inmediatamente anterior.

la ecuación de puede plantear de la siguiente forma, sea X_k al número de individuos en el instante k y del enunciado se deduce que:

$$X(k+2) - X(k+1) = 3(X(k+1) - X(k)), \qquad k = 0, 1, 2, \cdots$$

simplificando se obtiene

$$X(k+2) - 4X(k+1) + 3X(k) = 0$$

la cual es una ecuación en diferencias de segundo orden, si se conociera el número inicial de insectos, $X(0) = 100$, podemos sustituir y obtendríamos

$$X(2) - 4X(1) + 300 = 0$$

con lo cual se verifica que se debe tener otra medida por ejemplo $X(1)$, para poder encontrar el resto de los valores.

Los problemas que impliquen soluciones discretas en un sistema dinámico tienen la característica de ser todos expresables como ecuaciones en diferencias de primer orden, donde el orden de la ecuación es simplemente la diferencia entre el índice más alto y más bajo de la ecuación.

2.0.4. Ecuación diferencial lineal de segundo orden

Definición 2.7. Una ecuación diferncial es lineal de primer orden si se puede representar de la forma:

$$\frac{d^2X(t)}{dt^2} + a_1(t)\frac{dX(t)}{dt} + a_0(t)X(t) = g(t)$$

Si $g(t)$ es igual a cero, se dice que la ecuación es homogénea. Si $a_0 = cte$, se dice que es de coefiecientes constantes.

Ejemplo 2.8. La ecuación $X(k+2) = X(k+1) + X(k) + 3$ es de segundo orden y su ecuación continua sería $y^{''} = y^{'} + X + 3$.

La ecuación $X(k+3) = -2X(k+2) + 5X(k)$ es de tercer orden y su ecuación continua sería $y^{'''} = -2y^{''} + 5y$.

Una característica común a todas las ecuaciones en diferencias es que cada una de ellas representa en sí misma a varias, y a veces infinitas, ecuaciones.

Ejemplo 2.9.

$$X(k+1) = 2X(k)$$

esto es

$$\begin{aligned} X(1) &= 2X(0) \\ X(2) &= 2X(1) \\ X(3) &= 2X(2) \\ &\vdots \end{aligned}$$

En general, aunque no siempre, es posible obtener la secuencia de valores $X(1)$,$X(2)$,$X(3)$... Una vez definido el o los valores iniciales se pueden encontrar los otros valores. Es decir que se puede resolver inambiguamente cualquier ecuación en diferencias de orden n si se especifica los valores iniciales.

2.0.5. Ecuación en diferencias lineal de orden n

Definición 2.10. Una ecuación en diferencias lineal de orden n es aquella que se pude escribir de la forma:

$$a_n X(k+n) + a_{n-1} X(k+n-1) + \cdots + a_0 X(k) = g(k) \qquad (1)$$

donde los coeficientes a_i son funciones definidas en los enteros.

El caso más sencillo es cuando los coeficientes son constantes $a_i = c_i$ por tanto.

$$c_n X(k+n) + c_{n-1} X(k+n-1) + \cdots + c_0 X_1(k) = g(k)$$

La ecuación en diferencias se dice homogénea en el caso de que $g(k) = 0$, y no homogénea o completa en el caso contrario.

2.0.6. Ecuación diferencial lineal de orden n

Definición 2.11. Una ecuación diferncial es lineal si se puede representar de la forma:

$$\frac{d^n X(t)}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} X(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0(t) X(t) = g(t)$$

Si $g(t)$ es igual a cero, se dice que la ecuación es homogénea. Si $a_i = cte$ para todo i , se habla de coefiecientes constantes.

Capítulo 3

Ecuaciónes en diferencias y diferenciales lineales homogéneas con coeficientes constantes

3.1. Ecuación en diferencias lineal de orden n homogénea con coeficientes constantes

Definición 3.1. Es aquella que puede expresarse como

$$a_n(k)X(k+n) + a_{n-1}(k)X(k+n-1) + ... + a_0(k)X(k) = 0 \qquad (4)$$

Donde $a_i(k), i = 0, 1, 2$ y $g(k)$ son funciones en la variable discreta k.Y la sucesión $g(k)$ es nula, entonces la ecuación lineal recibe el nombre de ecuación homogénea asociada a (1). Cuando las funciones $a_i(k)$ son constantes, se dice que la ecuación lineal (4) es de coeficientes constantes.

Teorema 3.2. teorema de existencia y unicidad en tiempo discreto
Sea la ecuación:

$$a_nX(k+n) + a_{n-1}X(k+n-1) + \cdots + a_0X(k) = 0$$

y dados n números reales $c_0, c_1, ..., c_{n-1}$, existe una única solución que verifica:

Demostración. Definimos la sucesión $X(k)$ de la siguiente forma:

$$X(0) = c_0$$

$$X(1) = c_1$$

$$\vdots$$

$$X(n-1) = c_{n-1}$$

Considerando $X(n)$ como,

$$X(n) = -a_n(0)X(n-1) - \cdots - a_0(0)X(0)$$

Donde a_i con $i = 1, 2...$, son funciones reales que dependen del tiempo,

$$X(n+1) = -a_n(1)X(n) - \cdots - a_0(1)X(1)$$

$$\vdots$$

Sea $k = n + 1$

$$X(k) = -a_n(k-n)X(k-1) - \cdots - a_0(k-n)X(k-n)$$

Es decir, $X(k)$ se define mediante una ley de recurrencia. Además $X(k)$ es solución de la ecuación y satisface las condiciones iniciales y además es única, ya que si existe otra solución que verifique las condiciones iniciales, entonces coinciden en todos los puntos pues la propia ley de recurrencia determina los valores posteriores de la solución. □

Para cada conjunto de condiciones iniciales $\{c_0, c_1, ..., c_{n-1}\}$ hay una única solución, pero al variar las condiciones iniciales varía la solución, por tanto una ecuación en diferencias lineal homogénea tiene infinitas soluciones dependiendo de las condiciones iniciales dadas. De ahí, la importancia del siguiente teorema.

Teorema 3.3. Toda combinación lineal de soluciones de una ecuación en diferencias lineal homogénea de orden n es también solución.

Demostración. Realizamos la demostración para dos soluciones luego es fácil generalizar para n. Sean $X_1(k)$, $X_2(k)$ soluciones de:

$$a_n(k)X(k+n) + a_{n-1}(k)X(k+n-1) + ... + a_1(k)X(k) = 0 \qquad (4)$$

es decir,

$$a_n(k)X_1(k+n) + a_{n-1}(k)X_1(k+n-1) + ... + a_1(k)X_1(k) = 0$$

$$a_n(k)X_2(k+n) + a_{n-1}(k)X_2(k+n-1) + ... + a_1(k)X_2(k) = 0$$

Consideramos $\alpha X_1(k) + \beta X_2(k)$ y sustituimos en (4) para ver si satisface la ecuación

$$a_n[\alpha X_1(k+n)+\beta X_2(k+n)]+a_{n-1}[\alpha X_1(k+n-1)+\beta X_2(k+n-1)]+...+a_1[\alpha X_1(k)+\beta X_2(k)] = 0$$

$$\alpha[a_n X_1(k+n) + a_{n-1}X_1(k+n-1) + ... + a_1 X_1(k)]+$$
$$\beta[a_n X_2(k+n) + a_{n-1}X_2(k+n-1) + ... + a_1 X_2(k)] = \beta \cdot 0 + \alpha \cdot 0 = 0$$

□

Observación 3.4. si $X_1(k)$ con $k = 0, 1, 2, 3...$ es solución de una ecuación diferencial, también lo es la secuencia de números:

$X_2(k) = cX_1(k)$ con $k = 0, 1, 2, 3...$

La razón para esta afirmación es que si $X_1(k)$ es solución, entonces por definición de solución tiene que ser cierto que:

$$a_n X_1(k+n) + a_{n-1} X_1(k+n-1) + \cdots + a_0 X_1(K) = 0$$

Si se multiplica esta ecuación por c, se llega a

$$ca_n X_1(k+n) + ca_{n-1} X_1(k+n-1) + \cdots + ca_0 X_1(K) = 0$$

por lo tanto las soluciones de una ecuación en diferencias lineal de orden n forman un espacio vectorial.

Teorema 3.5. Dos soluciones $X_1(K)$ y $X_2(K)$ de las ecuaciones en diferencias de orden n (4) son linealmente independientes si y solo sí los vectores de $\mathbb{R}^n$ que se forman con las condiciones iniciales

$$(X_1(0), X_1(1), ..., X_1(n-1)); \qquad (X_2(0), X_2(1), ..., X_2(n-1))$$

son linealmente independientes.

Teorema 3.6. la dimensión del espacio de soluciones de una ecuación en diferencias lineal de orden n es n.

3.1.1. Solución general de la ecuación en diferencias lineal homogénea de orden n con coeficientes constantes

Sea la ecuación en diferencias lineal homogénea de coefientes constantes y de orden n :

$$a_n X(k+n) + a_{n-1} X(k+n-1) + \cdots + a_0 X(k) = 0 \qquad \forall k \in Z$$

se buscan soluciones del tipo $f(k) = r^k$, entonces

$$r^k (a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_0) = 0$$

entonces

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

donde r es raíz de la ecuación característica $a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$ la solución dependerá de si las raíces de la ecuación característica son simples, complejas o múltiples .

Comentario 3.7.

$$P(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_0 = 0 \qquad (5)$$

le llamamos ecuación característica asociada a la ecuación en diferencias lineal homogénea de orden n (4).

Teorema 3.8. Si r_0 es solución de la ecuación característica (5), entonces $X(k) = r_0^k$ es solución de (4).

Demostración. Sustituimos $X(k) = r_0^k$ en (5),

$$a_n r_0^{k+n} + a_{n-1} r_0^{k+n-1} + \cdots + a_0 r_0^k = 0$$

$$r_0^k (a_n r_0^n + a_{n-1} r_0^{n-1} + \cdots + a_0) = 0$$

$$r_0^k (P(r_0)) = 0$$

$$r_0^k \cdot 0 = 0$$

□

Teorema 3.9. la ecuación característica (5) tiene todas sus raíces reales y simples $r_1, r_2, ..., r_n$, entonces

$$X_h(k) = c_1 r_1^k + c_2 r_2^k + ... + c_n r_n^k$$

Demostración. Ya sabemos que r_i^k es solución de (4), luego toda combinación lineal de soluciones de (4) es solución de (4).

□

En base a estos resultados, para encontrar la solución de una ecuación en diferencias lineal homogénea de orden n con coeficientes constantes, lo primero que se debe hacer es resolver la ecuación característica (5). Y al resolver la ecuación característica pueden ocurrir los siguientes casos:

3.1.2. Raíces simples

Sean $r_1, r_2, ..., r_n$ las n raíces de la ecuación característica. Se definen entonces las funciones.

$$X_j(k) = r_j^k, \qquad j = 1, ..., n$$

Entonces $\{X_1, ..., X_n\}$ es un sistema fundamental de soluciones, lo cual nos permite resolver la ecuación.

3.1.3. Raíces complejas

Si alguna raiz r es compleja, también su conjugada r es raíz. Dado que toda combinación lineal de r^k y $\overline{r^k}$ es solución de la ecuación, en particular lo son:

$$\mathcal{R}e(r^k) = \frac{1}{2}(r^k + \overline{r^k})$$

$$\mathcal{I}m(r^k) = \frac{1}{2i}(r^k - \overline{r^k})$$

Entonces, a fin de evitar trabajar con soluciones complejas, en el sistema fundamental se pueden sustituir los términos complejos r^k y $\overline{r^k}$ por los correspondientes términos reales $\mathcal{R}e(r^k)$ e $\mathcal{I}m(r^k)$

Observación 3.10. A la hora del cálculo de la solución debe tenerse en cuenta que:

$$r = \rho(cos(\theta) + isen(\theta)), \qquad \rho = |r|$$

entonces

$$r^k = (\rho(cos(\theta) + isen(\theta)))^k = \rho^k(cos(k\theta) + isen(k\theta))$$

por tanto

$$\mathcal{R}e(r^k) = \rho^k cos(k\theta)$$
$$\mathcal{I}m(r^k) = \rho^k sin(k\theta)$$

3.1.4. Raíces múltiples

Sea r una raíz de multiplicidad m de la ecuacíon característica. Esta raíz proporciona m soluciones diferentes del tipo:

$$X_j(k) = k^j r^k, \qquad j = 0, ..., m-1$$

Por tanto, pasarán a formar parte del sistema fundamental de soluciones las funciones $f_0, ..., f_{m-1}$ esto es:

$$r^k, kr^k, k^2r^k, ..., k^{m-1}r^k$$

Ejemplo 3.11. Con raíces reales
hallar la solución de:

$$X(k+2) - 4X(k+1) + 3X(k) = 0 \qquad \forall k \in Z$$

$$X(0) = 0, \qquad X(1) = 1.$$

la ecuación característica es:

$$r^2 - 4r + 3 = 0$$

Luego $r_1 = 3$, $r_2 = 1$ Por lo tanto

$$X(k) = c_1 3^k + c_2 1^k = c_1 3^k + c_2$$

Por otra parte:

$$X(0) = c_1 + c_2 = 0$$
$$X(1) = 3c_1 + c_2 = 1$$

De donde $c_1 = \frac{1}{2}$ y $c_2 = -\frac{1}{2}$ Entonces

$$X(k) = \frac{1}{2}3^k - \frac{1}{2}$$

Ejemplo 3.12. Con raíces complejas
Hallar la solución de:

$$X(k+2) - X(n+1) + X(k) = 0 \qquad \forall k \in Z$$

$$X(0) = 0 \qquad X(1) = 1$$

La ecuación característica es:

$$r^2 - r + 1 = 0$$

Entonces

$$r_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \qquad r_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

O equivalentemente:

$$r_1 = cos(\frac{\pi}{3}) + isen(\frac{\pi}{3}), \qquad r_2 = \overline{r_1}$$

Por tanto como $\rho = |r_1| = 1$

$$X(k) = r^k = c_1 1^k cos(\frac{k\pi}{3}) + c_2 1^k sen(\frac{k\pi}{3})$$

$$= c_1 cos(\frac{k\pi}{3}) + c_2 sen(\frac{k\pi}{3})$$

Por otra parte

$$X(0) = c_1 = 0$$

$$X(1) = \frac{1}{2}c_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}c_2 = 1$$

Entonces

$$c_1 = 0, \qquad c_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

De donde:

$$X(k) = \frac{2\sqrt{3}}{3} sen(\frac{k\pi}{3})$$

Ejemplo 3.13. Con raíces múltiples

$$X(k+3) - 7X(k+2) + 15X(n+1) - 9X(k) = 0 \qquad \forall k \in Z$$

$$X(0) = -1, \qquad X(1) = 2, \qquad X(2) = 17.$$

La ecuación característica es:

$$r^3 - 7r^2 + 15r - 9 = 0$$

Luego

$$r_1 = 1, \qquad r_2 = r_3 = 3.$$

así

$$X(k) = c_1 1^k + c_2 3^k + c_3 k 3^k$$

Por tanto

$$X(0) = c_1 + c_2 = -1$$

$$X(1) = c_1 + 3c_2 + 3c_3 = 2$$

$$X(2) = c_1 + 9c_2 + 18c_3 = 17$$

$$c_1 = 1, \qquad c_2 = 0, \qquad c_3 = 1.$$

De donde

$$X(k) = k3^k - 1$$

3.2. Ecuación diferencial lineal de orden n homogénea con coeficientes constantes

Definición 3.14. Una ecuación diferncial lineal es homogénea si se puede representar de la forma:

$$\frac{d^nX(t)}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}X(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0(t)X(t) = 0$$

donde $g(t)$ es igual a cero, y $a_i = cte$ para todo i.

3.2.1. Solución general de la ecuación diferencial lineal homogénea de orden n con coeficientes constantes

Se afirmó anteriormente que la ecuación lineal de primer orden, $\frac{dy}{dx} + ay = 0$, donde a es una constante, tiene la solución exponencial $y = c_1e^{-ax}$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$; por consiguiente, lo más natural Es tratar de determinar si existen soluciones exponenciales en $(-\infty, \infty)$ de las ecuaciones lineales homogéneas de orden superior del tipo

$$a_ny^n + a_{n-1}y^{n-1} + \cdots + a_1y = 0$$

En donde los coeficientes a_i con $i = 1, 2, ..$ son constantes reales y $a_n \neq 0$ para nuestra sorpresa, todas las soluciones de la ecuación son funciones exponenciales o están formadas a partir de funciones exponenciales.

la solución se alcanza de forma directa a diferencia del caso de las ecuaciones en diferencias como ya se evidenciará .

Sea la ecuación de segundo orden

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Si probamos con una solución de la forma $y = e^{mx}$, entonces $y' = me^{mx}$ y $y'' = m^2e^{mx}$ de modo que la ecuación $ay'' + by' + cy = 0$ se transforma en

$$am^2e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0$$

es decir

$$e^{mx}(am^2+bm+c)=0$$

Como e^{mx} nunca es cero cuando x tiene valor real, la única forma en que la función exponencial satisface la ecuación diferencial es eligiendo una m tal que sea una raíz de la ecuación cuadrática

$$am^2+bm+c=0$$

Esta ecuación se llama ecuación auxiliar o ecuación característica de la ecuación diferencial $ay''+by'+cy=0$. Examinaremos tres casos: las soluciones de la ecuación auxiliar que corresponde a raíces reales distintas o simples, raíces e iguales y raíces complejas conjugadas.

3.2.2. Raíces simples

si la ecuación $am^2+bm+c=0$ tiene dos raíces reales distintas, m_1 Y m_2 , llegamos a dos soluciones, $y_1=e^{m_1x}$ y $y_2=e^{m_2x}$, estas funciones son linealmente independientes en $(-\infty,\infty)$ y, en consecuencia, forman un conjunto fundamental. Entonces, la solución general de la ecuación $ay''+by'+cy=0$ en ese intervalo es

$$y=c_1e^{m_1x}+c_2e^{m_2x}$$

3.2.3. Raíces múltiples

Cuando $m_1=m_2$ llegamos, necesariamente, solo a una solución exponencial,$y_1=e^{m_1x}$. Según la fórmula cuadrática $m_1=\frac{-b}{2a}$, porque la única forma de que $m_1=m_2$ es que $b^2-4ac=0$ asi, una segunda solución de la ecuación es

$$y_2=e^{m_1x}\int\frac{e^{2m_1x}}{e^{2m_1x}}dx=e^{2m_1x}\int dx=xe^{m_1x}$$

En esta ecuación aprovechamos que $\frac{-b}{a}=2m_1$. La solución general es, en consecuencia,

$$y=c_1e^{m_1x}+c_2xe^{m_1x}$$

3.2.4. Raíces complejas

Si m_1 y m_2 son complejas, podremos escribir $m_1=\alpha+\beta i$ y $m_2=\alpha-\beta i$ donde α , $\beta>0$ son reales, e $i^2=-1$. No hay diferencia formal entre este caso y el caso de las raíces simples; por ello.

$$y=c_1e^{(\alpha+\beta i)x}+c_2e^{(\alpha-\beta i)x}$$

Sin embargo, en la práctica se prefiere trabajar con funciones reales y no con exponenciales complejas. Con este objeto se usa la fórmula de Euler:

$$e^{i\theta}=cos\theta+isen\theta$$

En que θ es un número real. La consecuencia de esta fórmula es que

$$e^{i\beta x} = cos\beta x + isen\beta x$$

$$e^{-i\beta x} = cos\beta x - isen\beta x$$

En donde hemos empleado $cos(-\beta x) = cos\beta x$ y $sen(-\beta x) = -sen\beta x$ observese que si primero sumamos y despues restamos las dos ecuaciones $e^{i\beta x} = cos\beta x + isen\beta x$ y $e^{-i\beta x} = cos\beta x - isen\beta x$, obtenemos respectivamente:

$$e^{(\alpha+\beta i)x} + e^{(\alpha-\beta i)x} = 2cos\beta x$$

$$e^{(\alpha+\beta i)x} - e^{(\alpha-\beta i)x} = 2isen\beta x$$

Como $y = c_1e^{(\alpha+\beta i)x} + c_2e^{(\alpha-\beta i)x}$ es una solución de la ecuación $ay'' + by' + cy = 0$ para cualquier elección de las constantes c_1 y c_2, $c_1 = c_2 = 1$, y $c_1 = 1c_2 = -1$ obtenemos las soluciones:

$$y_1 = e^{(\alpha+\beta i)x} + e^{(\alpha-\beta i)x}$$

$$y_2 = e^{(\alpha+\beta i)x} - e^{(\alpha-\beta i)x}$$

Pero

$$y_1 = e^{\alpha x}(e^{\beta ix} + e^{-\beta ix}) = 2e^{\alpha x}cos\beta x$$

$$y_2 = e^{\alpha x}(e^{\beta ix} - e^{-\beta ix}) = 2ie^{\alpha x}sin\beta x$$

las funciones reales $e^{\alpha x}cos\beta x$ y $ie^{\alpha x}sin\beta x$ son soluciones de la ecuación $ay'' + by' + cy = 0$. Además, esas soluciones forman un conjunto fundamental en $(\infty, -\infty)$; por lo tanto, la solución general es

$$y = c_1e^{\alpha x}cos\beta x + c_2e^{\alpha x}sin\beta x$$

$$y = e^{\alpha x}(c_1cos\beta x + c_2sin\beta x)$$

Ejemplo 3.15. Con raíces simples
Resuelver la ecuación diferencial siguiente:

$$2y'' - 5y' - 3y = 0$$

la ecuación característica es:

$$2m^2 - 5m - 3 = 0$$

Luego

$$m_1 = \frac{-1}{2} \quad m_2 = 3$$

Así

$$y = c_1e^{\frac{-1}{2}x} + c_2e^{3x}$$

Ejemplo 3.16. Con raíces múltiples
Resuelver la ecuación diferencial siguiente:

$$y'' + 10y' + 25y = 0$$

la ecuación característica es:

$$m^2 + 10m + 25 = 0$$

Luego

$$m_1 = 5 \quad m_2 = 5$$

Así

$$y = c_1 e^{5x} + c_2 x e^{5x}$$

Ejemplo 3.17. Con raíces complejas
Resuelver la ecuación diferencial siguiente:

$$y'' + 2y' + 2y = 0$$

la ecuación característica es:

$$m^2 + 2m + 2 = 0$$

Luego

$$m_1 = -1 + i \quad m_2 = -1 - i$$

como para $m = \alpha + \beta i$

$$y = e^{\alpha x}(c_1 cos\beta x + c_2 sin\beta x)$$

Así

$$y = e^{-x}(c_1 cosx + c_2 sinx)$$

Capítulo 4

Ecuaciónes en diferencias y diferenciales lineales no homogéneas con coeficientes constantes

4.1. Solución de ecuaciones lineales no homogéneas de coeficientes constantes en diferencia o tiempo discreto de orden n

Definición 4.1. Una ecuación de diferencias es lineal de orden n no homogénea es la que se pude escribir de la forma:

$$a_n X(k+n) + a_{n-1} X(k+n-1) + \cdots + a_0 X(k) = g(k)$$

con $g(k) \neq 0$ El conjunto de todas las soluciones a esta ecuación es:

$$X(k) = X_h(k) + X_P(k)$$

Donde $X_h(k)$ es la solución homogénea que se vio anteriomente, y la ecuación y $X_P(k)$ es la solución particular.

por tanto, solo se necesita encontrar la solución particular de la ecuación original, para esto se procede con relación a la naturaleza da la función $g(k)$. teniendo en cuanta las características siguientes:

- $g(k) = P_m(k)$, un polinomio de grado $m \geq 0$, los polinomios de grado m son generados por las funciones $\{1, x, ..., x^m\}$ y estas funciones están asociadas a la raíz cero de multiplicidad $m+1$ de la ecuación característica.
- $g(k) = P_m e^{\alpha k}$, con α constante y P_m un polinomio de grado m, estas funciones son generadas por las funciones $\{e^{\alpha k}, k e^{\alpha k}, ..., k^m e^{\alpha k}\}$

- $g(k) = P_m(k)sen\beta k + Q_m(k)cos\beta k$, donde β es constante, P_m y Q_m son polinomios con el mayor de sus grados igual a m.

  Estas funciones son generadas por las funciones:

  $\{cos\beta k, kcos\beta k, ..., k^m cos\beta k\}$ y $\{sen\beta k, ksen\beta k, ..., k^m sen\beta k\}$

  Las cuales están asociadas a las raices $\pm i\beta$ ambas de multiplicidad $m+1$ de la ecuación característica.

- $g(k) = P_m(k)e^{\alpha k}sen\beta k + Q_m(k)e^{\alpha k}cos\beta k$, con α y β constantes; P_m y Q_m son polinomios de manera que el mayor de los grados entre ellos es m.

  Estas funciones son generadas por las funciones

  $\{e^{\alpha k}cos\beta k, ke^{\alpha k}cos\beta k, ..., k^m e^{\alpha k}cos\beta k\}$ y $\{e^{\alpha k}sen\beta k, ke^{\alpha k}sen\beta k, ..., k^m e^{\alpha k}sen\beta k\}$

  las cuales están asociadas a las raices $\alpha \pm i\beta$, ambas de multiplicidad $m+1$ de la ecuación característica.

- $g(k)$ puede ser combinación lineal de funciones de los 4 tipos anteriores.

Observación 4.2. Si $g(k) = P_m(k)$, entonces $g(k) = P_m(k)e^{\alpha k}$ con $\alpha = 0$. Es decir que todo polinomio $P_m(k)$ puede ser considerado de la forma $g(k) = P_m(k)e^{\alpha k}$ donde $\alpha = 0$.

Con $\alpha = 0$, $P_m(k)sen\beta k + Q_m(k)cos\beta k = e^{\alpha k}(P_m(k)sen\beta k + Q_m(k)cos\beta k)$. Es decir, todas las funciones del tipo 3 son un caso particular de las del tipo 4.

Este método consiste en que por medio de el operador dado por:

$$L(X_p(k)) = a_n X(k+n) + a_{n-1}X(k+n-1) + \cdots + a_0 X(k)$$

se encuentre una función $X_p(k)$ tal que $L(X_p(k)) = g(k)$ así $X_p(k)$ es la solución particular.

Ejemplo 4.3. Hallar la solución de la ecuación

$$X(k+2) - X(k+1) + X(k) = k, \quad \forall k \in Z$$

Como se vio anteriormente, la solución general de la ecuación homogénea es:

$$X_h(k) = r^k = c_1 1^k cos(\frac{k\pi}{3}) + c_2 1^k sen(\frac{k\pi}{3})$$

$$X_h(k) = c_1 cos(\frac{k\pi}{3}) + c_2 sen(\frac{k\pi}{3})$$

Una solución particular de la completa será de la forma $X_p(k) = ak + b$: Para determinar el valor de a y b se sustituye en la ecuación:

$$a(k+2) + b - a(k+1) - b + ak + b = k$$

$$\Rightarrow ak + a + b = k$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ a + b = 0 \quad \Rightarrow b = -1 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow X_p(k) = k - 1$$

Por tanto, la solución general de la ecuación completa es:

$$X(k) = c_1 cos(\frac{k\pi}{3}) + c_2 sen(\frac{k\pi}{3}) + k - 1$$

Ejemplo 4.4. Hallar la solución general de:

$$X(k+2) - 2X(k+1) + X(k) = k + 1, \quad \forall k \in Z$$

La ecuación característica es:

$$r^2 - 2r + 1 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 1$$

Por tanto, la solución general de la ecuación homogénea es:

$$X_h(k) = c_1 + c_2 k$$

Una solución particular de la completa será de la forma $X_p(k) = k^\alpha(ak + b)$, pues $X_h(k)$ y $ak + b$ tienen factores en común. Se tomará como α el menor natural tal que $X_h(k)$ y $X_p(k)$ ya no tengan factores en común. Por tanto, debemos tomar $\alpha = 2$:

$$X_p(k) = ak^3 + bk^2$$

Para determinar el valor de a y b se sustituye en la ecuación:

$$a(k+2)^3 + b(k+2)^2 - 2a(k+1) - 2b(k+1)^2 + ak^3 + bk^2 = k + 1$$

$$\Rightarrow 6ak + 6a + 2b = k + 1$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 6a = 1 & \Rightarrow a = \frac{1}{6} \\ 6a + 2b = 1 & \Rightarrow b = 0 \end{array} \right. \Rightarrow X_p(k) = \frac{k^3}{6}$$

Por tanto, la solución general de la ecuación completa es:

$$X(k) = c_1 + c_2 k + \frac{k^3}{6}$$

4.2. Solución de ecuaciones diferenciales de orden n no homogéneas con coeficientes constantes

Definición 4.5. Una ecuación de diferencias es lineal de orden n no homogénea es la que se pude escribir de la forma:

$$a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \cdots + a_0 y = g(x)$$

con $g(x) \neq 0$ El conjunto de todas las soluciones a esta ecuación es:

$$y(t) = y_h(t) + y_P(t)$$

Donde $y_h(t)$ es la solución homogénea que se vio anteriomente, y la ecuación y $y_P(t)$ es la solución particular.

La solución general $y_h(t)$ satisface la ecuación

$$a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \cdots + a_0 y = 0$$

La solución particular $y_P(t)$ satisface la ecuación no homoégena

$$a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \cdots + a_0 y = g(x)$$

esta ecuación $y_P(t)$ puede encontrarse haciendo uso del método de coeficientes indetemrinados.

Tabla de soluciones particulares	
g(x)	Forma de y_p
Una constante	A
$3x - 1$	$Ax + B$
$x^2 + 3x - 5$	$Ax^2 + Bx + C$
$2x^3 - x^2 + 3x - 5$	$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$
e^{6x}	Ae^{6x}
$sen(3x)$	$Asen(3x) + Bcos(3x)$
$cos(2x)$	$Asen(2x) + Bcos(2x)$
$(x^2 + 3x - 5)e^{6x}$	$(Ax^2 + Bx + C)e^{6x}$
$e^{6x} sen(2x)$	$Ae^{6x} sen(2x) + Be^{6x} cos(2x)$
$5x^2 sen(2x)$	$(Ax^2 + Bx + C)sen(2x) + (Ex^2 + Fx + G)cos(2x)$
$xe^{6x} sen(2x)$	$(Ax + B)e^{6x} sen(2x) + (Cx + D)e^{6x} cos(2x)$

Cuadro 4.1: Soluciones particulares

Ejemplo 4.6. Hallar la solución de la ecuación:

$$y'' - 5y' + 6y = x^2 + x$$

la ecuación característica es

$$m^2 - 5m + 6 = 0$$

las raíces

$$m_1 = -3 \quad m_2 = -2$$

luego la solución general

$$y_h = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}$$

por coeficientes indeterminados se tiene

$$y_p = Ax^2 + Bx + C$$

$$y_p' = 2Ax + B$$
$$y_p'' = 2A$$

reemplazando en la ecuación

$$y'' - 5y' + 6y = x^2 + x$$
$$2A - 5(2Ax + B) + 6(Ax^2 + Bx + C) = x^2 + x$$
$$2A - 10Ax - 5B + 6Ax^2 + 6Bx + 6C = x^2 + x$$
$$6Ax^2 + (-10A + 6B)x + 6C + 2A - 5B = x^2 + x$$
$$\begin{cases} 6A = 1 \\ -10A + 6B = 1 \\ 2A - 5B + 6C = 0 \end{cases}$$

de donde las constantes son

$$A = \frac{1}{6}, \quad B = \frac{4}{9}, \quad C = \frac{17}{54}$$

luego

$$y_p = \frac{1}{6}x^2 + \frac{4}{9}x + \frac{17}{54}$$

por lo tanto como

$$y = y_h + y_p$$
$$y = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} + \frac{1}{6}x^2 + \frac{4}{9}x + \frac{17}{54}$$

4.3. Sistemas de ecuaciones en diferencias

Cuando se desea elaborar un modelo con ecuaciones en diferencia de un fenómenos en el cual el número de variables es n, y existe n ecuaciones en diferencia, entonces nos aparecerán los sistemas de ecuaciones en diferencias. abordaremos aquellos sistemas de ecuaciones en diferencias lineales y de primer orden. Además, este tipo de sistemas son los que con más frecuencia aplicados.

Definición 4.7. Un sistema en diferencias lineal con coeficientes constantes de n ecuaciones y n variables, es una expresión que podemos escribir matricialmente de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} X_1(k+1) \\ X_2(k+1) \\ \vdots \\ X_n(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(k) \\ X_2(k) \\ \vdots \\ X_n(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(k) \\ f_2(k) \\ \vdots \\ f_n(k) \end{pmatrix}$$

De entre este tipo de sistemas, el más frecuente es el que consiste en dos ecuaciones y dos variables, luego para los sistemas con mayor número ecuaciones y variables, el procedimiento a seguir es similar.

$$\begin{cases} X_1(k+1) = a_{11}X_1(k) + a_{12}X_2(k) + f_1(k) \\ X_2(k+1) = a_{21}X_1(k) + a_{22}X_2(k) + f_2(k) \end{cases}$$

Para hallar la solución a este tipo de sistemas, este se debe intentar expresar como una ecuación en diferencias lineal de segundo orden con coeficientes constantes. Por lo cual, de la primera ecuación si $k = k+1$ se tiene que:

$$X_1(k+2) = a_{11}X_1(k+1) + a_{12}X_2(k+1) + f_1(k+1)$$

luego reemplazando la segunda ecuación en esta, se obtiene

$$X_1(k+2) = a_{11}X_1(k+1) + a_{12}(a_{21}X_1(k) + a_{22}X_2(k) + f_2(k)) + f_1(k+1)$$

$$X_1(k+2) = a_{11}X_1(k+1) + a_{12}a_{21}X_1(k) + a_{12}a_{22}X_2(k) + a_{12}f_2(k)) + f_1(k+1)$$

Ahora para que la ecuación quede en función de X_1, en la primera ecuaciones se despeja el termino $a_{12}X_2(k)$ así

$$a_{12}X_2(k) = X_1(k+1) - a_{11}X_1(k) - f_1(k)$$

sustituyendo

$$X_1(k+2) = a_{11}X_1(k+1) + a_{12}a_{21}X_1(k) + a_{22}(X_1(k+1) - a_{11}X_1(k) - f_1(k)) + a_{12}f_2(k)) + f_1(k+1)$$

y sacando factor común, se obtiene

$$X_1(k+2) = (a_{11} + a_{22})X_1(k+1) + (a_{12}a_{21} - a_{22}a_{11})X_1(k) - a_{22}f_1(k) + a_{12}f_2(k) + f_1(k+1)$$

la cual es una ecuación lineal de segundo orden.

Ejemplo 4.8. Encontrar la solución del sistema

$$\begin{cases} X(k+1) = 4X(k) - Y(k) & (1) \\ Y(k+1) = 2X(k) + Y(k) & (2) \end{cases}$$

de la ecuación (1) se tiene que:

$$X(k+2) = 4X(k+1) - Y(k+1)$$

reemplazando (2) en (1).

$$X(k+2) = 4X(k+1) - 2X(k) - Y(k)$$

ahora despejando $Y(k)$ en (1)

$$Y(k) = 4X(k) - X(k+1)$$

$$X(k+2) = 4X(k+1) - 2X(k) - 4X(k) + X(k+1)$$

reduciendo

$$X(k+2) - 5X(k+1) + 6X(k) = 0$$

la cual es una ecuación lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes, la ecuación característica es:

$$r^2 - 5r + 6 = 0$$

las raíces son $r = -3$ y $r = -2$ son raíces simples, luego la solución general esta dada por

$$X(k) = c_1(-3)^k + c_2(-2)^k$$

para $Y(k)$ entonces,

$$Y(k) = 4c_1(-3)^k + 4c_2(-2)^k - c_1(-3)^{k+1} - c_2(-2)^{k+1}$$

$$Y(k) = 4c_1(-3)^k + 4c_2(-2)^k - c_1(-3)(-3)^k - c_2(-2)(-2)^k$$

$$Y(k) = 4c_1(-3)^k + 4c_2(-2)^k + 3c_1(-3)^k + 2c_2(-2)^k$$

$$Y(k) = 7c_1(-3)^k + 6c_2(-2)^k$$

Ahora si se impone el número adecuado de condiciones iniciales, hay una única solución del sistema. Si se cambia las condiciones iniciales, la solución cambia. Esto gana relevancia en los modelos de ecuaciones en diferencia debido a que por ejemplo en una economía que evoluciona según una cierta ecuación en diferencias o según un sistema de ecuaciones en diferencias. dependiendo de las condiciones iniciales que se tomen, estas tendrán un efecto directo en la solución del modelo en un tiempo k.

4.4. Sistemas de ecuaciones diferenciales

Definición 4.9. Un sistema diferencial lineal con coeficientes constantes de n ecuaciones y n variables, es una expresión que podemos escribir matricialmente de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

Donde el vector de derivadas es $\dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}$

El vector de variables $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Y el vector función es $F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$

Luego el sistema de EDO puede representarse de la forma matricial:

4.5. Solución de sistemas lineales homogéneos de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes

Sea $\dot{X} = AX + F$ F es el vector del factor de las perturbaciones de las ecuaciones. En el caso que $F = 0$ tenemos el sistema homogéneo dado por:

$$\dot{X} = AX$$

Como $AX = \lambda X$ esta Edo tiene por una solución de la forma:

$$\frac{dX}{dt} = \lambda X$$

$$\frac{dX}{X} = \lambda dt$$

$$\int \frac{dX}{X} = \int \lambda dt$$

$$ln|X| = \lambda t + k$$

$$X = e^{\lambda t + k}$$

$$X(t) = ke^{\lambda t}$$

Esta solución se verifica

$$\dot{X} = AX$$

como

$$X(t) = ke^{\lambda t}$$

entonces

$$\lambda ke^{\lambda t} = Ake^{\lambda t}$$

igualando a cero

$$AKe^{\lambda t} - \lambda Ke^{\lambda t} = 0$$

$$e^{\lambda t}[A - \lambda I]K = 0$$

De aqui si $K = 0$ la solución es trivial, entonces

$$[A - \lambda I] = 0$$

De aquí que la ecuación característica es:

$$det([A - \lambda I]) = 0$$

donde λ son los auto-valores y K son los auto-vectores

Los casos que dan de la ecuación característica son:

- Eigen valores reales diferentes
- Eigen valores reales iguales
- Eigen valores complejos.

Además

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t)$$

Donde $\frac{dX(t)}{dt}$ es la derivada de $X(t)$ respecto al tiempo.

La solución de la ecuación diferencial es:

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t)$$

$$\int \frac{dX(t)}{X(t)} = \int Adt$$

$$X(t) = e^{At+c} = e^{At}c$$

cuando $t = 0$, $X_0 = c$, por lo tanto la solución es

$$X(t) = e^{At}X_0$$

si A es diagonalizable entonces $A = P^{-1}DP$, donde P es la matriz propia, invertible, y D una matriz diagonal con los autovalores en su diagonal principal.

$$A^n = P^{-1}D^nP$$

donde

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

como

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$$

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k P^{-1} D^k P}{k!}$$

$$e^{At} = P^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k D^k}{k!} P$$

$$e^{At} = P^{-1}e^{Dt}P$$

$$e^{Dt} = \begin{pmatrix} 1 + t\lambda_1 + \frac{t^2\lambda_1^2}{2!} + \frac{t^3\lambda_1^3}{3!} + \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 + t\lambda_2 + \frac{t^2\lambda_2^2}{2!} + \frac{t^3\lambda_2^3}{3!} + \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 + t\lambda_3 + \frac{t^2\lambda_n^2}{2!} + \frac{t^3\lambda_n^3}{3!} + \cdots \end{pmatrix}$$

$$e^{Dt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

por tanto la solución

$$X(t) = P^{-1} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} PX_0$$

Comentario 4.10. Sea $M_{n\times n}(\mathbb{R}), \|\cdot\|$ y $\|A\| = sup\|Ax\|$, $\|A\| = 1$, la aplicación $\varphi : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ definida como $\varphi(A) = PA$ es continua debido que,
$\|\varphi(A_1) - \varphi(A_1)\| = \|PA_1 - PA_2\| = \|P(A_1 - A_2)\| \leq \|P\|\|A_1 - A_2\|$
luego $d(\varphi(A_1), \varphi(A_2)) \leq \|P\|d(A_1, A_2)$ por tanto φ es continua, análogamente $\varphi(A) = AP$ así

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{k=0}^{n} P^{-1}\frac{B^k}{k!}P$$

$$\lim_{x\to\infty} P^{-1}\sum_{k=0}^{n} \frac{B^k}{k!}P$$

$$P^{-1}\left(\lim_{x\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{B^k}{k!}P\right)$$

$$P^{-1}\left(\lim_{x\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{B^k}{k!}\right)P$$

Ejemplo 4.11. Solucionar el sistema de EDO.

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y & (1) \\ \dot{y} = 3x - y & (2) \end{cases}$$

otra forma de solucionar el sistema de ecuaciones lineales es despejando de la ecuación (1)

$$y = \dot{x} - x$$

al derivar

$$\dot{y} = \ddot{x} - \dot{x}$$

sustituyendo en la ecuación (2)

$$\dot{y} = 3x - y$$

$$3x - y = \ddot{x} - \dot{x}$$

$$3x-(\dot{x}-x)=\ddot{x}-\dot{x}$$

resulta una EDO de segundo orden con coeficientes constantes

$$\ddot{x}-4x=0$$

luego

$$r^2-4=0$$

$$(r-2)(r+2)=0$$

las raíces son $r=2$ y $r=-2$ reales distintas

la solución para la primera variable es:

$$x(t)=c_1e^{2t}+c_2e^{-2t}$$

para calcular la otra solución o $y(t)$ sustituimos la solución de $x(t)$ en la ecuación que esta despejado $y(t)$,

es decir

$$y=\dot{x}-x$$

$$y(t)=2c_1e^{2t}-2c_2e^{-2t}-c_1e^{2t}-c_2e^{-2t}$$

De donde se obtiene la solución para $y(t)$.

$$y(t)=c_1e^{2t}-3c_2e^{-2t}$$

luego la solución general del sistema es:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}e^{2t}+c_2\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}e^{-2t}$$

Ejemplo 4.12. Resolver el sistema EDO.

$$\begin{cases} \dot{x}=6x-y & (1) \\ \dot{y}=5x+4y & (2) \end{cases}$$

Primero lo representamos en forma matricial

$$\dot{X}=AX$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

se tiene que

$$|A-\lambda I|=0$$

$$\left|\begin{bmatrix} 6-\lambda & -1 \\ 5 & 4-\lambda \end{bmatrix}\right|=0$$

$$(6-\lambda)(4-\lambda)+5=0$$

$$\lambda^2 - 10\lambda + 29 = 0$$

los valores propios son:

$$\lambda_1 = 5 + 2i \qquad \lambda_2 = 5 - 2i$$

para hallar el vector propio asociado al auto-valor $\lambda_1 = 5 + 2i$

$$[A - \lambda I]k = 0$$

$$\begin{bmatrix} 6-(5+2i) & -1 \\ 5 & 4-(5+2i) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1-2i & -1 \\ 5 & -1-2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

como se puede apreciar que el sistema es linealmente dependiente, por tanto resolviendo el sistema se obtiene que

$$k_2 = (1-2i)k_1$$

el vector queda de la forma

$$K_1 = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ (1-2i)k_1 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1-2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1-2i \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \mathrm{k}_1 = 1$$

para el hallar el valor propio asociado al valor propio $\lambda_2 = 5 - 2i$

$$[A - \lambda I]k = 0$$

$$\begin{bmatrix} 6-(5-2i) & -1 \\ 5 & 4-(5-2i) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1+2i & -1 \\ 5 & -1+2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

como se puede apreciar que el sistema es linealmente dependiente, por tanto resolviendo el sistema se obtiene que

$$k_2 = (1+2i)k_1$$

el vector queda de la forma

$$K_2 = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ (1+2i)k_1 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1+2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+2i \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \mathrm{k}_1 = 1$$

Luego la solución general del sistema es

$$X(t) = K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1-2i \end{bmatrix} e^{(5+2i)t} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1+2i \end{bmatrix} e^{(5-2i)t}$$

Capítulo 5

Aplicaciones

Ejemplo 5.1. Suponga que usted deposita 1000 dólares en un banco al 12 % anual. Si los intereses se calculan una vez al año, usted obviamente tendría 1120 al cabo de un año. El problema es determinar cuánta plata tendría usted en el banco si los intereses se calculan cada 6 meses.

Por ejemplo. En este caso, en el segundo semestre no solo habrá que calcular el interés sobre el monto inicial de 1000, que sería de 60, al igual que en el primer semestre, sino que además habrá que calcular el interés sobre los 60 obtenidos en el primer semestre.

Dicho de otra forma, la tasa de interés semestral es $\frac{12\,\%}{2} = 6\,\%$. Sin embargo, al capitalizarse los intereses, al cabo de un año usted tendría

$$X(2) = 1000(1 + 0{,}06)^2 = 1123{,}6$$

En términos generales, si los intereses se calculan n veces por año, al cabo de un año usted tendría:

$$1000\left(1 + \frac{0{,}12}{n}\right)^N$$

donde n se fija en el número de períodos por año ya sea bimestre, trimestre o semestre. N es el número de períodos a calcular, El cuadro siguiente muestra lo que ocurriría con su depósito al cabo de años, esto es, para distintos valores de N con períodos semestrales es decir donde $n = 2$.

Se puede ver que si el interés se calcula en forma continua, usted tendría $1127,4$ al cabo de un año, este valor corresponde a:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1000\left(1 + \frac{0{,}12}{n}\right)^n\right) = 1000e^{0{,}12t}$$

	Resultados		
	t	x(t) continuo	X(n) discreto
	0 meses	0	0
	6 meses	1061.8	1060
	1 año	1127.4	1123.6
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	7 años	2316.36	2260.9
	7.5 años	2459.60	2396.55
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	15 años	6049.64	5743.49
	15.5 años	6423.73	6088.1
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	24.5 años	18915.8	17377.50
	25 años	20085.5	18420.15

Cuadro 5.1: Tabla comparativa

Ejemplo 5.2. El sistema dinámico de un cuerpo que se deja caer esta modelado por:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m}v$$

Velocidad modelada en tiempo continúo:

$$v(t) = \frac{gm}{c}\left(1 - e^{-(\frac{c}{m})t}\right)$$

Velocidad modelada en tiempo discreto:

$$v(t_{k+1}) = v(t_k) + \left[g - \frac{c}{m}v(t_k)\right](t_{k+1} - t_k)$$

Si un cuerpo de masa con una de 58 kg se lanza desde desde un puente. Calcular la velocidad hasta 15 segundos con incrementos en el tiempo de 0.2. Considere que el coeficiente de resistencia es igual a 12.5 kg/s.
así con $g = 9{,}8m/s^2$, $m = 58kg$, $c = 12{,}5kg/s$, se tiene.

Ejemplo 5.3. Sean $X(k)$ e $Y(k)$ el número de individuos de dos poblaciones de animales en el mes k, que conviven en un ecosistema en el que realizamos un control cada mes. Supongamos que inicialmente tenemos $X(0) = 150$ e $Y(0) = 325$, y que el desarrollo de la convivencia está gobernado por el sistema de ecuaciones en diferencias,

$$\begin{cases} X(k+1) = 3X(k) - Y(k) + 1 \\ Y(k+1) = -X(k) + 2Y(k) + 3 \end{cases}$$

tomando a $X_1(k) = X(k)$, $X_2(k) = Y(k)$, $a_{11} = 3$, $a_{12} = -1$, $a_{21} = -1$, $a_{22} = 2$, $f_1(k) = 1$, $f_2(k) = 3$.

	Resultados		
	t	v(t) continuo	v(t) discreto
	0	0	0
	0.2	1,918359053	1.96
	0.4	3,755786952	3,83731211
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	1	8,815912582	9,007275584
	1.2	10,36234857	10,58727935
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	10	40,20255872	41,07521737
	10.2	40,42486432	41,30234846
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	14.8	43,599187	44,54557471
	15	43,67819667	44,62629941

Cuadro 5.2: Tabla comparativa

la ecuación en diferencias lineal de segundo orden con coeficientes constantes es

$$X(k+2) = 5X(k+1) - 5X(k) - 4$$

las raíces de la ecuación característica de su ecuación homogénea son:

$$\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$$

dando lugar a la siguiente solución general de la ecuación homogénea

$$X(k) = c_1 \left(\frac{5+\sqrt{5}}{2} \right)^k + c_2 \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2} \right)^k$$

Para encontrar una solución particular de la solución completa, al ser el término independiente una constante, ensayamos con $X(k) = a$. Sustituyendo en la ecuación de segundo orden.

$$a - 5a + 5a = 4 \Rightarrow a = -4$$

la solución general de la ecuación completa será

$$X(k) = c_1 \left(\frac{5+\sqrt{5}}{2} \right)^k + c_2 \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2} \right)^k - 4$$

Ahora, se sustituye en la primera de las ecuaciones del sistema

$$Y(k) = -X(K+1) + 3X(k) + 1$$

$$Y(k)=-c_1\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}-c_2\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}+4+3c_1\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}+3c_2\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}-12+1$$

$$Y(k)=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)c_1\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)c_2\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}-7$$

Para encontrar los valores de c_1 y c_2, imponemos las condiciones iniciales,$X(0)=150$ e $Y(0)=325$

$$X(0)=c_1\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^{0}+c_2\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^{0}-4$$

$$Y(0)=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)c_1\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^{0}+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)c_2\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^{0}-7$$

por lo tanto

$$\begin{cases} X(0)=c_1+c_2-4=150 \\ Y(0)=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)c_1+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)c_2-7=325 \end{cases}$$

sistema de ecuaciones lineales que tiene por solución $c_1=77-45\sqrt{5}$, $c_2=77+5145\sqrt{5}$, En consecuencia, la solución particular para estas condiciones iniciales es:

$$X(k)=(77-45\sqrt{5})\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}+(77+5145\sqrt{5})\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}-4$$

$$Y(k)=(151-61\sqrt{5})\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}+(166-64\sqrt{5})\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}-7$$

Ejemplo 5.4. Resolver el sistema EDO.

$$\begin{cases} \dot{x} = 6x - y & (1) \\ \dot{y} = 5x + 4y & (2) \end{cases}$$

Primero lo representamos en forma matricial

$$\dot{X} = AX$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

se tiene que

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} 6-\lambda & -1 \\ 5 & 4-\lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$(6-\lambda)(4-\lambda) + 5 = 0$$

$$\lambda^2 - 10\lambda + 29 = 0$$

los valores propios son:

$$\lambda_1 = 5 + 2i \qquad \lambda_2 = 5 - 2i$$

para hallar el vector propio asociado al auto-valor $\lambda_1 = 5 + 2i$

$$[A - \lambda I]k = 0$$

$$\begin{bmatrix} 6-(5+2i) & -1 \\ 5 & 4-(5+2i) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1-2i & -1 \\ 5 & -1-2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

como se puede apreciar que el sistema es linealmente dependiente, por tanto resolviendo el sistema se obtiene que

$$k_2 = (1-2i)k_1$$

el vector queda de la forma

$$K_1 = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ (1-2i)k_1 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1-2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1-2i \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \mathrm{k}_1 = 1$$

para el hallar el valor propio asociado al valor propio $\lambda_2 = 5 - 2i$

$$[A - \lambda I]k = 0$$

$$\begin{bmatrix} 6-(5-2i) & -1 \\ 5 & 4-(5-2i) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1+2i & -1 \\ 5 & -1+2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

como se puede apreciar que el sistema es linealmente dependiente, por tanto resolviendo el sistema se obtiene que

$$k_2 = (1+2i)k_1$$

el vector queda de la forma

$$K_2 = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ (1+2i)k_1 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1+2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+2i \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \mathrm{k}_1 = 1$$

Luego la solución general del sistema es

$$X(t) = K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1-2i \end{bmatrix} e^{(5+2i)t} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1+2i \end{bmatrix} e^{(5-2i)t}$$

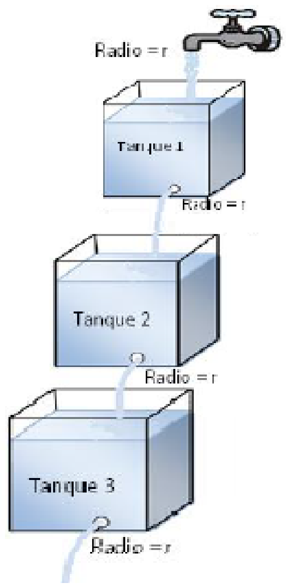


Figura 5.1: ilustracion

Ejemplo 5.5. Dado tres tanques cuyos volumenes estan dados por $V_1 = 40$, $V_2 = 60$, $V_3 = 80$ y $r = 12$ galones/minuto y las cantidades iniciales de sal en los tres tanques de salmuera en libras son:

$$x_1(0) = 20, \quad x_2(0) = 10, \quad x_3(0) = 0$$

Hallar la cantidad de sal en cada uno de los tanques en cualquier instante de tiempo. Las concentraciones de sal en cada uno de los tanques estan regidas por el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -k_1x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} = k_1x_1 - k_2x_2 \\ \frac{dx_3}{dt} = k_2x_2 - k_3x_3 \end{cases}$$

con

$$k_1 = \frac{r}{V_1} = \frac{12}{40} = 0{,}3$$

$$k_2 = \frac{r}{V_2} = \frac{12}{60} = 0{,}2$$

$$k_3 = \frac{r}{V_3} = \frac{12}{80} = 0{,}15$$

sustituyendo en el sistema de EDO

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -0{,}3x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} = 0{,}3x_1 - 0{,}2x_2 \\ \frac{dx_3}{dt} = 0{,}2x_2 - 0{,}15x_3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_3}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}3 & 0 & 0 \\ 0{,}3 & -0{,}2 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & -0{,}15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

de aquí que $|A - \lambda I| = 0$

$$\begin{vmatrix} -0{,}3-\lambda & 0 & 0 \\ 0{,}3 & -0{,}2-\lambda & 0 \\ 0 & 0{,}2 & -0{,}15-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

luego los autovalores

$$\lambda_1 = \frac{-1}{5} \quad \lambda_2 = \frac{-3}{10} \quad \lambda_3 = \frac{-3}{20}$$

si $\lambda_1 = \frac{-1}{5}$

$$(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} -0{,}3-(\frac{-1}{5}) & 0 & 0 \\ 0{,}3 & -0{,}2-(\frac{-1}{5}) & 0 \\ 0 & 0{,}2 & -0{,}15-(\frac{-1}{5}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

de aquí se tiene

$$\frac{-1}{10}a = 0$$
$$\frac{3}{10} = 0$$
$$\frac{1}{5}b + \frac{1}{20}c = 0$$

solucionando el sistema se obtiene el autovector

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-1}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$$

si $\lambda_2 = \frac{-3}{10}$

$$(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} -0{,}3-(\frac{-3}{10}) & 0 & 0 \\ 0{,}3 & -0{,}2-(\frac{-3}{10}) & 0 \\ 0 & 0{,}2 & -0{,}15-(\frac{-3}{10}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

de aquí se tiene

$$\frac{3}{10}a + \frac{1}{10}b = 0$$
$$\frac{1}{5}b + \frac{3}{20}c = 0$$

solucionando el sistema se obtiene el autovector

$$v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{-3}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$$

si $\lambda_3 = \frac{-3}{20}$

$$(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} -0{,}3 - (\frac{-3}{20}) & 0 & 0 \\ 0{,}3 & -0{,}2 - (\frac{-3}{20}) & 0 \\ 0 & 0{,}2 & -0{,}15 - (\frac{-3}{20}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

de aquí se tiene

$$\frac{-3}{20}a = 0$$
$$\frac{3}{10}a - \frac{1}{20}b = 0$$
$$\frac{1}{5}b = 0$$

solucionando el sistema se obtiene el autovector

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

por tanto la solución general es

$$x_t = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 v_3 e^{\lambda_3 t}$$
$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} e^{\frac{-1}{5}t} + c_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{-3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} e^{\frac{-3}{10}t} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{\frac{-3}{20}t}$$

lo que equivale a las ecuaciones:

$$x_1 = \frac{1}{4}c_2 e^{\frac{-3}{10}t}$$
$$x_2(t) = -\frac{1}{4}c_1 e^{\frac{-1}{5}t} + -\frac{3}{4}c_2 e^{-\frac{-3}{10}t}$$
$$x_3(t) = c_1 e^{\frac{-1}{5}t} + c_2 e^{\frac{-3}{10}t} + c_3 e^{\frac{-3}{20}t}$$

aplicando las condiciones iniciales

$$x_1(0) = 20, \quad x_2(0) = 10, \quad x_3(0) = 0$$

$$15 = \frac{1}{4}c_2$$
$$10 = -\frac{1}{4}c_1 - \frac{3}{4}c_2$$
$$0 = c_1 + c_2 + c_3$$

solucionando el sistema anterior se tiene

$$c_1 = -280 \quad c_2 = 80 \quad c_3 = 200$$

sustituyendo en la solucion general obtenemos

$$x_1 = 20e^{\frac{-3}{10}t}$$

$$x_2(t) = 70e^{\frac{-1}{5}t} - 60e^{-\frac{-3}{10}t}$$

$$x_3(t) = -280e^{\frac{-1}{5}t} + 80e^{\frac{-3}{10}t} + 200e^{\frac{-3}{20}t}$$

Capítulo 6

Aportes

6.1. Equilibrio y estabilidad

Es importante saber si unos cambios pequeños en las condiciones iniciales tendrán una gran influencia en el comportamiento de la solución para valores grandes de k o al contrario el efecto se disipará cuando k tiende a infinito. En este último caso, se dice que el sistema es estable.

Por otra parte, si cambios pequeños de las condiciones iniciales conllevan diferencias significativas en el comportamiento de la solución a largo plazo, se dice que el sistema es inestable.

6.1.1. Equilibrio y estabilidad de ecuaciones en diferencias de primer orden

Consideremos la e. d. lineal de primer orden con coeficientes constantes.

$$X(k+1) - aX(k) = b \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

Para encontrar la solución a la ecuación homogénea $X(k+1) - aX(k) = 0$ se procede definiendo el polinomio característico, en este caso $r - a = 0$ así $r = a$ es la raíz por lo tanto la solución es $X_h(k) = c_1 a^k$.

Para obtener la solución de la ecuación completa debemos distinguir dos casos a $a = 1$ y $a \neq 1$

- si $a \neq 1$, sea $X_p(k) = c$ la solución particular, sustituyendo en la ecuación $X(k+1) - aX(k) = b$ se obtiene que:

  $$X_p(k+1) - aX_p(k) = c - ac = b$$

  luego

  $$c = \frac{b}{1-a}$$

Por lo tanto la solución general es:

$$X(k) = X_h(k) + X_p(k) = c_1 a^k + c$$

$$X(k) = c_1 a^k + \frac{b}{1-a}$$

- si $a = 1$, la solución homogénea es $X_h(k) = c_1 1^k = c_1$, y por otro lado debemos probar con $X_p(k) = ck$ como solución particular, sustituyendo en la ecuación $X(k+1) - aX(k) = b$ se obtiene que:

$$X_p(k+1) - (1)X_p(k) = c(k+1) - ck = c = b$$

luego

$$X(k) = c_1 + bk$$

Si se considera conocida la condición inicial $X(0) = X_0$, se tendría que
si $a \neq 1$; $X(0) = c_1 a^0 + \frac{b}{1-a} = c_1 + \frac{b}{1-a} = X_0$ luego

$$c_1 = X_0 - \frac{b}{1-a}$$

si $a = 1$; $X(0) = c_1 + b(0) = c_1 = X_0$

$$X(k) = \begin{cases} X_0 + kb & si \quad a = 1 \\ \left(X_0 - \frac{b}{1-a}\right) a^k + \frac{b}{1-a} & si \quad a \neq 1 \end{cases}$$

Si, para $a \neq 1$, consideramos el caso de que $X_0 = \frac{b}{1-a}$, entonces $X(k) = \frac{b}{1-a} \quad \forall k$, es decir que $X(k)$ permanecerá constante en ese valor. entonces a $X^*(k) = \frac{b}{1-a}$ se le llama punto de equilibrio o punto estacionario (también se le llama estado de equilibrio o estado estacionario).

En general, para buscar el punto de equilibrio de una ecuación, se sustituye $X(k) = X^* \; \forall k$ en la mencionada ecuación, así

$$X^* - aX^* = b \Rightarrow X^* = \frac{b}{1-a}$$

Se dice que un punto de equilibrio es estable cuando la solución converge hacía el estado de equilibrio cuando k tiende a infinito.

En la solucion general $X(k) = c_1 a^k + \frac{b}{1-a}$, se tiene que $X(k) - \frac{b}{1-a} = ta^k$, $X(k) - X^* = c_1 a^k$ por tanto el punto de equilibrio sería estable cuando $c_1 a^k$ tiende a cero cuando k tiende a infinito, por lo tanto se debe estudiar el carácter de a^k.

- si $|a| < 1, -1 < a < 1$, entonces $a^k \to 0$ cuando $k \to \infty$ y sería estable, pero se distinguen dos casos:

1. si $0 < a < 1$ entonces $X(k)$ converge monótonamente hacía el estado de equilibrio.
2. si $-1 < a < 0$ entonces $X(k)$ tiene fluctuaciones de amplitud decreciente hacía el estado de equilibrio. Se les llama oscilaciones amortiguadas.

- si $|a| > 1$, $a < -1 \cup a > 1$ entonces $a^k \to \infty$ cuando $k \to \infty$ por lo tanto $X(k)$ se aleja del equilibrio, excepto cuando $X_0 = \frac{b}{1-a}$. se distinguen dos casos:

1. si $a > 1$ entonces $X(k) \to \infty$ y se dice que $X(k)$ diverge del estado de equilibrio.
2. si $a < -1$ entonces $X(k)$ tiene fluctuaciones de amplitud creciente alrededor del estado de equilibrio. Se les llama oscilaciones explosivas.

Comentario 6.1. El carácter de k solo produce un efecto escala, pero no cambia la configuración básica de la trayectoria temporal.

Por otra parte, la solución particular es constante para el caso a $a \neq 1$ por lo cual no afecta a la convergencia o la divergencia, lo que afecta es el nivel respecto del cual se estudia la convergencia o la divergencia.

Para el caso $a = 1$, como $X(k) = X_0 + bk$, es claro que no alcanzará nunca el estado de equilibrio.

6.1.2. Diagrama de Cobweb.

Los modelos dinámicos discretos pueden comportarse de manera sorprendente. Algunas veces una sucesión obtenida del sistema dinámico lineal discreto tiende directamente al punto de equilibrio. En otras ocasiones saltan alrededor de él, con saltos cada vez más pequeños hasta tender al punto de equilibrio, o por el contrario los saltos son cada vez más grandes y no tienden al punto de equilibrio.

La construcción del diagrama de Cobweb consiste en dibujar las gráficas $f(x)$ y $g(x) = x$ considerar el punto $x(0)$ en el eje de las abscisas. A continuación evaluar f, $f(x(0)) = x(1)$ y obtenemos el punto $(x(0), x(1))$. El próximo paso es trazar una línea horizontal desde el punto $(x(0), x(1))$ hasta que corte a la recta $g(x) = x$ en el punto $(x(1), x(1))$. Calculamos $x(2) = f(x(1))$ y se repite sucesivamente este proceso.

Este proceso se puede simular en el software Geogebra el cual es una plataforma gratuita, que tiene muchas opciones que nos pueden ayudar como herramienta didáctica para un mejor análisis y comprensión de un problema de sistemas dinámicos dado.

El primer paso para construir el diagrama de cobweb consiste en declarar una función $f(x)$ la cual esta definida según el sistema dinamico que estemos analizando de la forma:

$$x(k+1) = f(x(k))$$

Luego se declara un punto $A = (x(0), 0)$ donde $x(0)$ es el valor inicial de dicho problema a resolver, y por último se escribe la función identidad $g(x) = x$. el modelo programado en Geogebra es descrito en las siguientes ilustraciones, el cual está diseñado hasta 10 iteraciones con las cuales son suficientes como para observar de buena forma las órbitas del sistema descritas por el diagrama de cobweb.

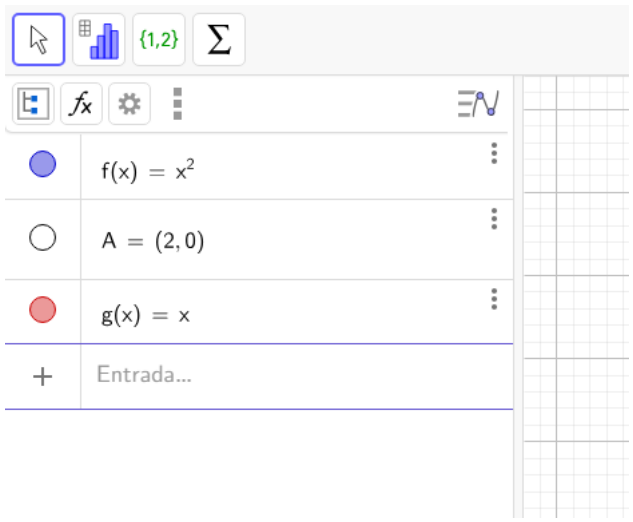
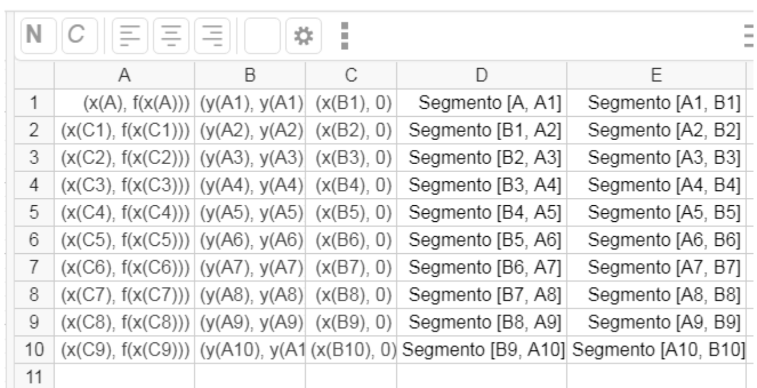


Figura 6.1: para $x(k+1) = x^2(k)$, $f(x) = x^2$ y $x(0) = 2$



	A	B	C	D	E
1	(x(A), f(x(A)))	(y(A1), y(A1)	(x(B1), 0)	Segmento [A, A1]	Segmento [A1, B1]
2	(x(C1), f(x(C1)))	(y(A2), y(A2)	(x(B2), 0)	Segmento [B1, A2]	Segmento [A2, B2]
3	(x(C2), f(x(C2)))	(y(A3), y(A3)	(x(B3), 0)	Segmento [B2, A3]	Segmento [A3, B3]
4	(x(C3), f(x(C3)))	(y(A4), y(A4)	(x(B4), 0)	Segmento [B3, A4]	Segmento [A4, B4]
5	(x(C4), f(x(C4)))	(y(A5), y(A5)	(x(B5), 0)	Segmento [B4, A5]	Segmento [A5, B5]
6	(x(C5), f(x(C5)))	(y(A6), y(A6)	(x(B6), 0)	Segmento [B5, A6]	Segmento [A6, B6]
7	(x(C6), f(x(C6)))	(y(A7), y(A7)	(x(B7), 0)	Segmento [B6, A7]	Segmento [A7, B7]
8	(x(C7), f(x(C7)))	(y(A8), y(A8)	(x(B8), 0)	Segmento [B7, A8]	Segmento [A8, B8]
9	(x(C8), f(x(C8)))	(y(A9), y(A9)	(x(B9), 0)	Segmento [B8, A9]	Segmento [A9, B9]
10	(x(C9), f(x(C9)))	(y(A10), y(A1	(x(B10), 0)	Segmento [B9, A10]	Segmento [A10, B10]
11					

Figura 6.2: para 10 Iteraciones

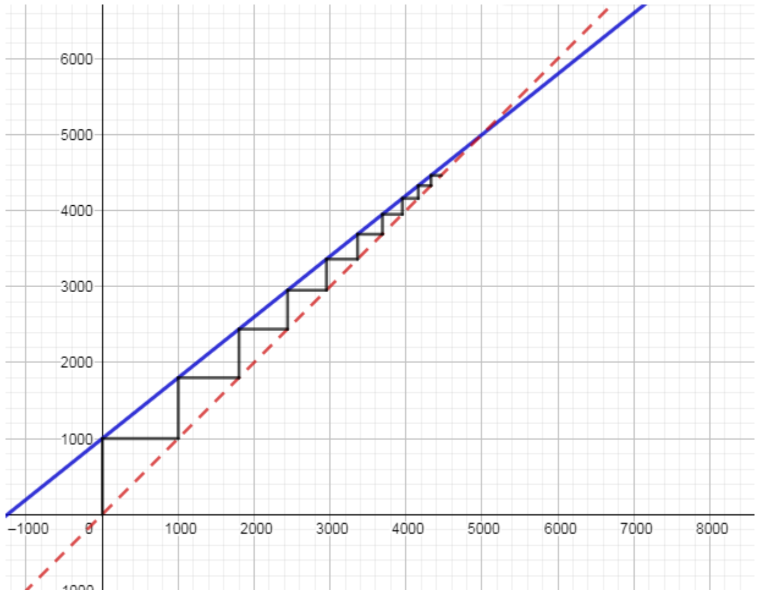


Figura 6.3: Diagrama de Cobweb para $f(x) = 0{,}8x + 1000$ y $x(0) = 0{,}8$.

Ejemplo 6.2.

- Haciendo uso de Geogebra vamos a calcular y dibujar $x(0), x(1), ...,$ para el modelo $x(k+1) = 0{,}80x(k) + 1000$ y el valor inicial $x(0) = 500$. El modelo anterior podemos escribirlo como $x(k+1) = f(x(k))$, $k = 0, 1, 2, ...,$ donde $f(x) = 0{,}80x + 1000$. Esta es una buena manera de representar a nuestro modelo porque la función $f(x)$ nos describe como la población, en cada año está determinada por la población en el año anterior.

- Los dos gráficos $f(x) = 0{,}8x + 1000$ y $g(x) = x$ se cortan en el punto $x^* = 5000$. Este punto se llama punto de equilibrio ya que la población en los próximos años será la misma que la población actual.

$$f(5000) = 0{,}8 \times 5000 + 1000 = 5000$$

Podemos encontrar este valor también de manera algebraica

$$f(x) = x \Rightarrow x = 0{,}8x + 1000 \Rightarrow x = 5000$$

La figura 6.3 muestra como se determina gráficamente al punto de equilibrio. En este ejemplo se puede encontrar exactamente cual es el punto de equilibrio pero hay casos en los que por este metodo solo se puede hacer una aproximación al punto de equilibrio.

Ejemplo 6.3. Consideremos el sistema dinámico discreto no lineal de May

$$x(k+1) = \alpha x(k)(1 - x(k)), \quad \alpha > 0, \quad k = 0, 1, 2, ...,$$

podemos encontrar sus órbitas y puntos de equilibrio haciendo uso del software Geogebra.

- Al resolver $f(x) = \alpha x(1-x)$ cuando $f(x) = x$ se obtienen los puntos $x^* = 0$ y $x^* = 1 - \frac{1}{\alpha}$ luego $f'(x) = -2\alpha x + \alpha$ Por tanto,
- El puntos $x^* = 0$ es asintóticamente estable si

$$|f'(0)| = |\alpha| < 1 \Rightarrow 0 < \alpha < 1$$

- El puntos $x^* = 1 - \frac{1}{\alpha}$, será estable si

$$|f'(1 - \frac{1}{\alpha})| = |2 - \alpha| < 1 \Rightarrow 1 < \alpha < 3$$

Gráficamente con Geogebra se obtienen los respectivos diagramas de cobweb para cada punto de equilibrio segun se tome α para una valor inicial de $x(0) = 0{,}8$ en el sistema de May.

Por su puesto que según el valor que tome α, y el del valor iniciar x_0, el diagrama de Cobweb muestra trayectorias diferentes según estos datos, dependiendo de los requisitos que deba tener α en el modelo de May para que este alcance un punto de equilibrio. puede que existan valores para α provoque que este sistema se comporte de forma caótica es decir sin un patrón definido, este tipo de sistemas serán estudiados más adelante, por lo cual más tarde podríamos regresar de nuevo a este ejemplo de cuando $\alpha = 4$ y $x_0 = 0{,}8$.

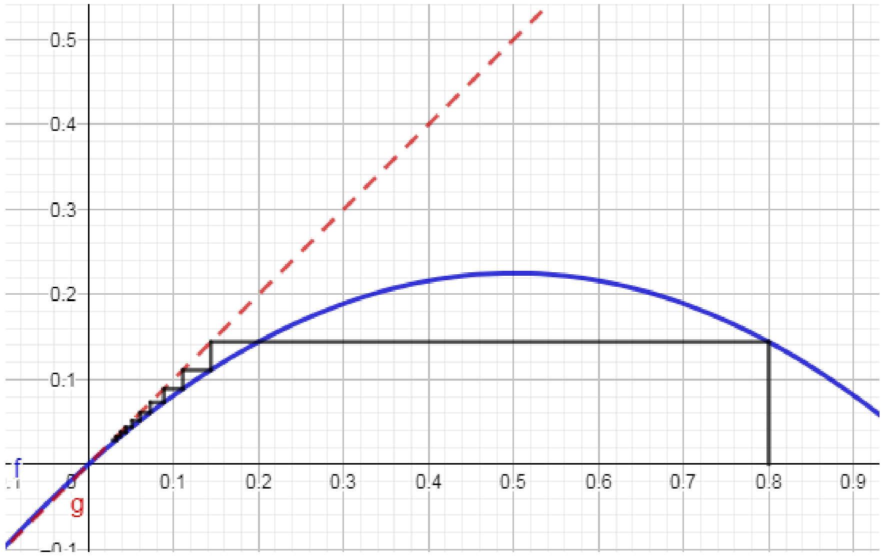


Figura 6.4: Diagrama de Cobweb para $f(x) = 0{,}9x(1-x)$ y $x(0) = 0{,}8$.

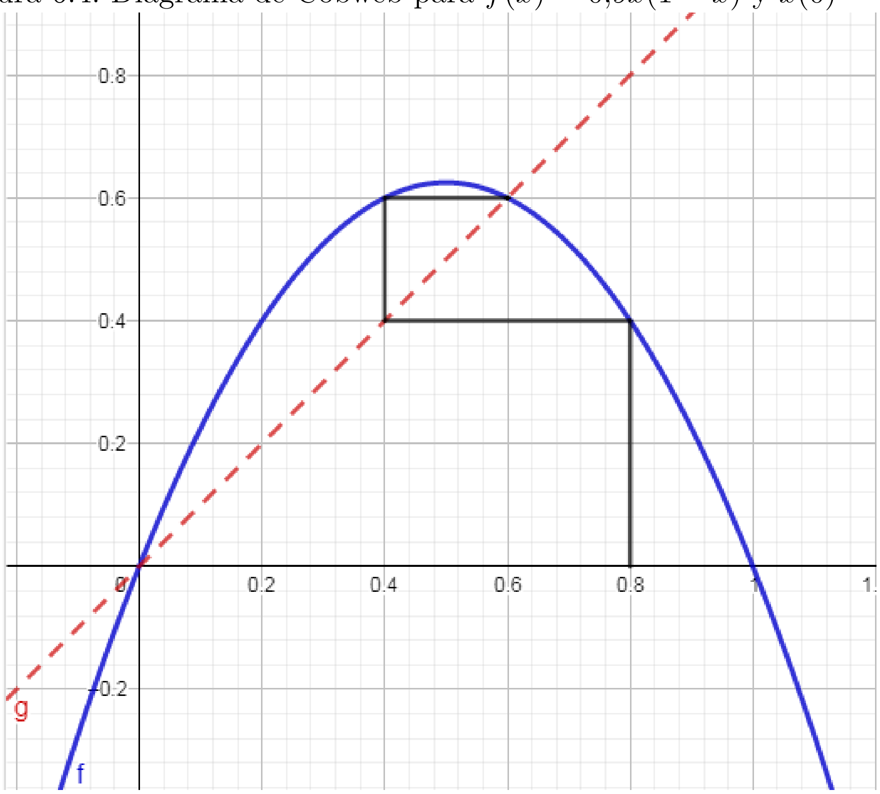


Figura 6.5: Diagrama de Cobweb para $f(x) = 2{,}5x(1-x)$ y $x(0) = 0{,}8$.

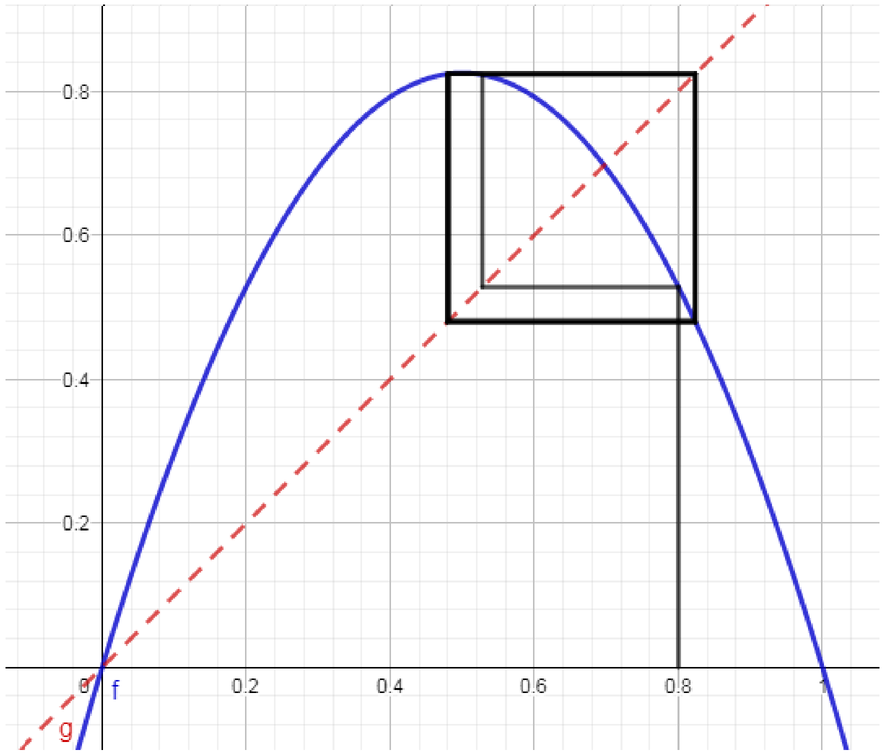


Figura 6.6: Diagrama de Cobweb para $f(x) = 3{,}3x(1-x)$ y $x(0) = 0{,}8$.

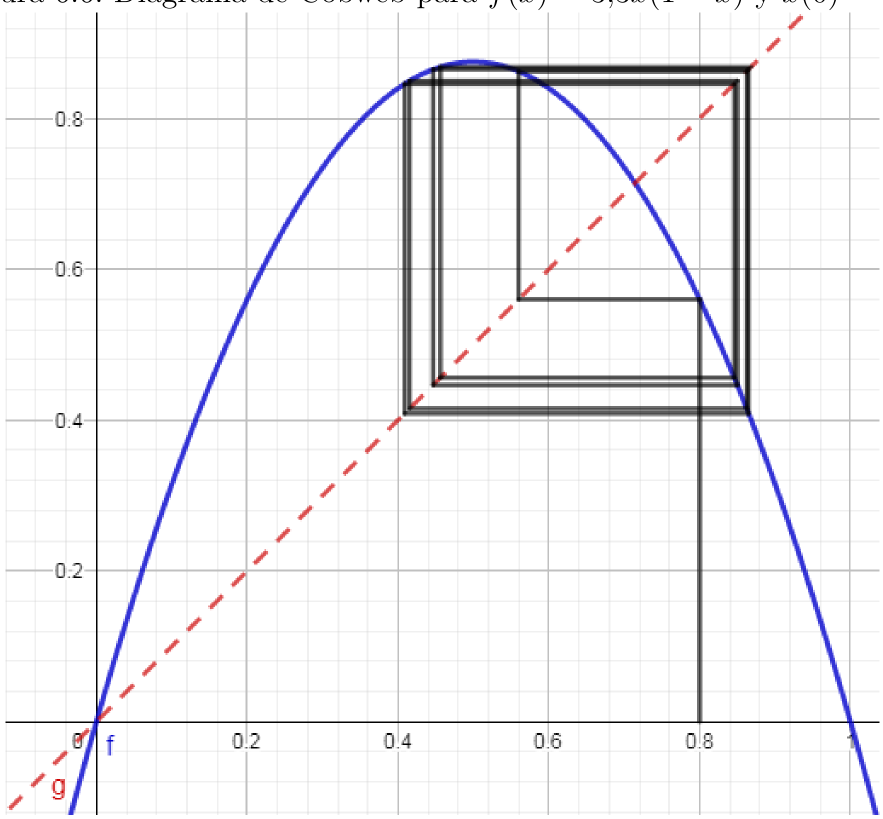


Figura 6.7: Diagrama de Cobweb para $f(x) = 3{,}5x(1-x)$ y $x(0) = 0{,}8$.

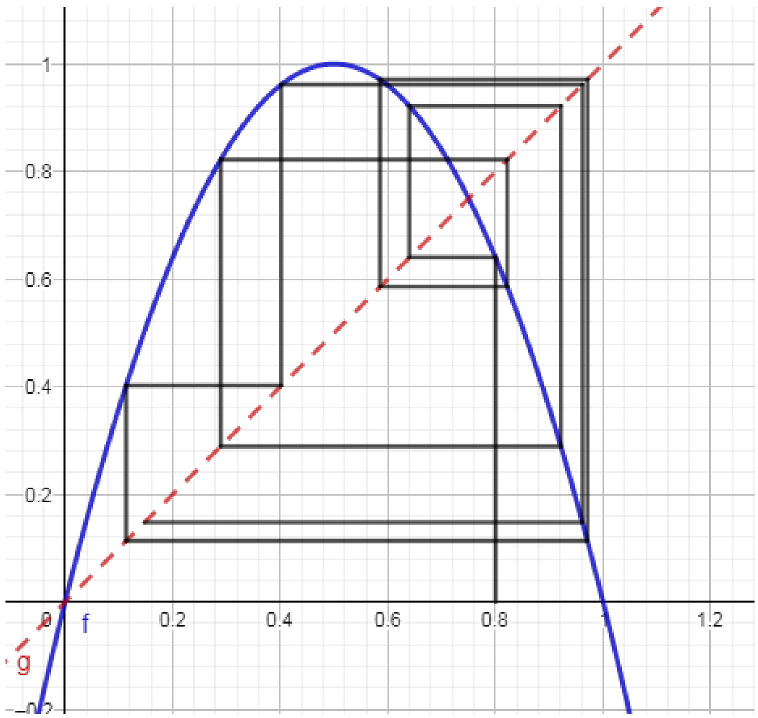


Figura 6.8: Diagrama de Cobweb para $f(x) = 4x(1-x)$ y $x(0) = 0{,}8$.

Se obserba que si $\alpha = 2{,}5$ el punto de equilibrio son $X(t) \longrightarrow 0,6$, o bien, en el caso $\alpha = 3,3$ los puntos de equilibrio son $X(t) \longrightarrow 0,823$ y $X(t) \longrightarrow 0,479$.

6.1.3. Equilibrio y estabilidad de ecuaciones en diferencias de orden n

El estudio de modelos dinámicos en economía es importante dado que permite eliminar la hipótesis (estática) de que el proceso de ajuste es instantáneo e inevitablemente da lugar a un equilibrio. En un contexto dinámico, esta propiedad de estabilidad tiene que ser comprobada y no puede ser asumida a priori.

En lo que sigue consideraremos que el tiempo $k = 0, 1, ...$ es discreto. Una función $X : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dependiente del tiempo es simplemente una sucesión de vectores de n dimensiones

$$X_0, X_1, X_2, ...$$

Si cada vector está relacionado con el vector previo por medio de una aplicación $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de la forma

$$X(k+1) = f(X(k)), \quad k = 0, 1, ...,$$

entonces estamos ante un sistema de ecuaciones en diferencias de primer orden. En la siguiente definición se generaliza a sistemas con un mayor período de retraso y que pueden incluir k explicítamente.

Definición 6.4. Un sistema de ecuaciones en diferencias de orden n es una expresión de la forma

$$X(k+n) = f(X(k+n-1), ..., X(k), k) \quad k = 0, 1, ...,$$

donde cada $X(k) \in \mathbb{R}^n$ y $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^n$. El sistema es:

- autónomo, si f no depende de k
- lineal, si la aplicación f es lineal en las variables $X(k+n-1), ..., X(k)$
- de primer orden, si $k = 1$.

Definición 6.5. Una sucesión $X_0, X_1, X_2, ...$ obtenida mediante la recursión $X(k+1) = f(X(k)),\ \ k = 0, 1, ...,$ con valor inicial X_0 es una trayectoria u órbita del sistema dinámico con origen en X_0.

Notación 6.6. Escribiremos $x(k)$ en lugar de $X(k)$ si la variable $X(k)$ es un escalar.

Notación 6.7. Dada una función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, f^k denota la composición de f con ella misma k veces, es decir, $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$ y, en general, $f^k = f \circ f^{k-1}$ para $k = 0, 1, ...$ También definimos f^0 como la función identidad, $f^0(X) = X$.

Definición 6.8. La expresión $f^k(x)$, es la solución general o flujo de los sistemas dinámicos discretos. Permite conocer el estado del sistema en cualquier instante a partir de su posición inicial.

Observación 6.9. En el caso particular de sistemas dinámicos discretos lineales o e. d. lineal de primer orden, la función f es del tipo $f(x) = mx + b$, y estamos interesados en puntos de equilibrio del sistema dinámico discreto. Aquellos puntos x tales que $f(x) = x$. Estos puntos se llaman de equilibrio.

$$x = mx + b$$

$$x^* = \frac{b}{1-m}, \text{ para m} \neq 1$$

al ser este único entonces para cuando $m = 1$ la ecuación nunca alcanzará el estado de equilibrio.

Observación 6.10. Se considera la ecuación en diferencias de segundo orden $x(k+2) = g(x(k+1), x(k))$. Si definimos $y(1,k) = x(k+1)$, $y(2,k) = x(k)$, entonces $y(2,k+1) = x(k+1) = y(1,k)$ y obtenemos el sistema de primer orden dado por:

$$\begin{pmatrix} y(1,k+1) \\ y(2,k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(y(1,k), y(2,k)) \\ y(1,k) \end{pmatrix}$$

Denotando $Y(k) = \begin{pmatrix} y(1,k) \\ y(2,k) \end{pmatrix}$, $f(Y(k)) = \begin{pmatrix} g(Y(K)) \\ y(1,k) \end{pmatrix}$, el sistema puede reescribirse en la forma:

$$Y(k+1) = f(Y(k))$$

Ejemplo 6.11. La ecuación de segundo orden $x(k+2) = 4x(k+1) + x^2(k) + 1$ puede reducirse al sistema de primer orden

$$\begin{pmatrix} y(1,k+1) \\ y(2,k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4y(k+1) + y^2(k) + 1 \\ y(1,k) \end{pmatrix}$$

Teorema 6.12. Sea el sistema autónomo de primer orden $X(k+1) = f(X(k))$ para el que existe un subconjunto D tal que para todo $X \in D, f(X,k) \Subset D$. Entonces, dada cualquier condición inicial $X_0 \in D$, la sucesión $X(k)$ está dada por

$$X(K) = f^k(X_0)$$

Demostración. La prueba es inmediata observando que

$$X(1) = f(X_0)$$

$$X(2) = f(X_1) = f(f(X_0)) = f^2(X_0)$$

$$\vdots$$

$$X(k) = f^k(X_0)$$

□

El teorema proporciona el valor actual de X, $X(k)$, en función de la condición inicial, X_0. Aunque esto es interesante, muy a menudo la expresión $X(k) = f^k(X_0)$, es meramente formal, puesto que f^k no es fácilmente computable. En estos casos, nos interesa más conocer el comportamiento de Xt en el largo plazo, es decir, conocer el límite (si existe)

$$\lim_{k\to\infty} (f^k(X_0))$$

Generalmente es más útil estudiar este límite que obtener una expresión analítica de $X(k)$. A pesar de todo, existen casos donde la solución puede encontrarse explícitamente y que permiten un estudio detallado del límite anterior. si el límite existe $\lim_{k\to\infty} f^k(X_0) = X^0$, f es continua, entonces

$$f(X^0) = f\left(\lim_{k\to\infty} f^k(X_0)\right) = \lim_{k\to\infty} f^{k+1}(X_0) = X^0$$

Por tanto, el límite X^0 resulta ser un punto fijo de la función f. Esta es la razón por la que los puntos fijos de f juegan un papel muy relevante en el estudio de los sistemas dinámicos.

Definición 6.13. Un punto $X^0 \in D$ es un punto fijo del sistema dinámico definido por f si comenzando desde X^0, $X(k) = X_0$ es una solución: si $X_0 = X^0$ entonces

$$X(k) = X^0, \;\; k = 1, 2, ...$$

teniendo en cuenta que X^0 es también un punto fijo de la aplicación f.

Comentario 6.14. Otras denominaciones para punto fijo son: equilibrio, punto estacionario, o estado estacionario.

Observación 6.15. En las definiciones siguientes, $\|X-Y\|$ denota la distancia Euclídea entre los vectores $X=(x_1,...,x_n)$ e $Y=(y_1,...,y_n)$

$$\|X-Y\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2+...+(x_n-y_n)^2}$$

Ejemplo 6.16. Sean $X=(1,2,3)$ e $Y=(3,6,7)$, entonces

$$\|X-Y\| = \sqrt{(1-3)^2+(2-6)^2+(3-7)^2} = \sqrt{36} = 6$$

Definición 6.17.

- Un punto fijo X^0 es estable si para cualquier estado inicial X_0 suficientemente próximo, la trayectoria asociada $X(k)$ existe y permanece próxima a X^0, es decir, para cualquier $\epsilon > 0$, existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que si $\|X_0 - X^0\| < \delta(\epsilon)$, entonces $\|X(k) - X^0\| < \epsilon$ para todo k.
- Un punto fijo estable X^0 es localmente asíntoticamente estable (l.a.e.) si la trayectoria $X(k)$ con condición inicial X_0 suficientemente próxima a X^0 converge al punto fijo, es decir, existe $\delta > 0$ tal que si $\|X_0 - X^0\| < \delta$, entonces $\lim_{k\to\infty} X(k) = X^0$.
- Un punto fijo estable es globalmente asíntoticamente estable (g.a.e.) si cualquier trayectoria generada a partir de cualquier condición inicial X^0 converge a dicho punto fijo.
- Un punto fijo es inestable si no es estable o asíntoticamente estable.

Observación 6.18.

- Si es globalmente asíntoticamente estable (g.a.e.) $\Rightarrow$ es localmente asíntoticamente estable (l.a.e.) $\Rightarrow$ es estable
- Si X^0 es estable, pero no l.a.e., entonces $X(k)$ no converge a X^0.
- Un punto fijo g.a.e. es necesariamente único.
- Puede haber varios puntos fijos l.a.e.
- Si X^0 es l.a.e., entonces perturbaciones pequeñas alrededor de X^0 decaen y la trayectoria generada por el sistema retorna al punto fijo en el largo plazo.

Definición 6.19. Sea P un entero mayor que 1. Una serie de vectores $X_0, X_1, ..., X_{P-1}$ es un ciclo de período P (o P-ciclo simplemente) del sistema f si una trayectoria desde X_0 toma los valores $X_1, ..., X_{P-1}$ y retorna a X_0, es decir

$$X(K+1) = f(X(k)), \quad k = 0,1,...,P-1, \quad X(P) = X_0$$

Observar que la serie de vectores $X_0, X_1, ..., X_P$ se repite periódicamente en la trayectoria,

$$X(k) = \{X_0, X_1, ..., X_{P-1}, X_0, X_1, ..., X_{P-1}, ...\}.$$

Por esta razón, la trayectoria se designa también como un P-ciclo.

Ejemplo 6.20. $x(k+1) = qx(k)$ con $q = -1$ todas las trayectorias son 2-ciclos, Notar que la solución es $x(k) = q^k x_0$, con $x(0) = x_0$ por lo tanto la solución es

$$\{x_0, -x_0, x_0, -x_0, ...\}$$

Ejemplo 6.21. Donde $x(k+2) = -x(k)$, para encontrar los posibles ciclos de la ecuación, primero es necesario escribirla como un sistema de orden 1, para lo que utilizamos

$$X(k+1) = \begin{pmatrix} x(1,k+1) \\ x(2,k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x(2,k) \\ x(1,k) \end{pmatrix} = f(X(k))$$

Sea $X_0 = (2,4)$. Entonces

$$X_1 = f(X_0) = (-4,2)$$
$$X_2 = f(X_1) = (-2,-4)$$
$$X_3 = f(X_2) = (4,-2)$$
$$X_4 = f(X_3) = (2,4)$$

Por tanto, aparece un 4-ciclo que comienza en X_0. De hecho, cualquier trayectoria es un 4-ciclo.

Definición 6.22. Para un sistema de la forma

$$x(k+1) = f(x(k)), \quad k = 0,1,2,3,... \quad (7)$$

donde ahora la función f no es lineal, la situación es diferente a lo estudiado en la sección anterior. Lo que debemos tener en cuenta, es que pueden existir muchos puntos de equilibrio. En el caso lineal el tipo de punto de equilibrio nos lo daba el parámetro m de la recta. En el caso no lineal el carácter de cada punto está determinado por la pendiente de la curva $f(x)$ en el punto x^*, y sabemos que este valor puede determinarse por la derivada de la función f en el punto x^*.

Teorema 6.23. Consideremos el sistema dinámico (7) siendo x^* un punto de equilibrio $f(x^*) = x^*$. Entonces

- $\mid f'(x^*) \mid < 1$ el punto de equilibrio es atractivo, en el sentido de que si x_0 esta suficientemente cerca de x^* entonces

  $$\lim_{k\to\infty} x(k) = x^*$$

  Algunas veces a un equilibrio de esta características se le dice equilibrio estable, ya que si el sistema se mueve ligeramente del punto de equilibrio, al final retorna al mismo.

Demostración. □

Ejemplo 6.24.

Los puntos de equilibrio se clasifican según el comportamiento de las soluciones con condiciones iniciales cercanas a ellos, en puntos de equilibrio atractivos, repulsivos e indiferentes. En lo que sigue, consideraremos el siguiente sistema dinámico unidimensional

$$x(k+1) = f(x(k)) \quad f : X \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

- Puntos de equilibrio atractivos. Sea x^* un punto de equilibrio de $x(k+1) = f(x(k))$. Se dice que x^* es atractivo si $\mid f'(x^*) \mid < 1$
- Puntos de equilibrio repulsivos. Sea x^* un punto de equilibrio de $x(k+1) = f(x(k))$. Se dice que x^* es repulsivo si $\mid f'(x^*) \mid > 1$
- Puntos de equilibrio indiferentes. Sea x^* un punto de equilibrio de $x(k+1) = f(x(k))$. Se dice que x^* es indiferente si $\mid f'(x^*) \mid = 1$
- Punto hiperbólico. Sea x^* un punto de equilibrio de $x(k+1) = f(x(k))$. Se dice que x^* es hiperbólico si $\mid f'(x^*) \mid \neq 1$

Definición 6.25. La órbita de x bajo f se define como:

$$O(f(x)) = \{x, f(x), f^2(x), .., f^{k-1}(x), f^k(x), ...\}$$

Definición 6.26. Se dice que x° es un punto periódico o cíclico del sistema dinámico $x(k+1) = f(x(k))$, si existe un n tal que $f^n(x^{\circ}) = x^{\circ}$. Un punto es periódico si su órbita se cierra vuelve a comenzar por su valor inicial. El mínimo entero n tal que $f^n(x^{\circ}) = x^{\circ}$, se llama orden del punto periódico. En tal caso la órbita

$$O(f(x^{\circ})) = \{x^{\circ}, f(x^{\circ}), f^2(x^{\circ}), .., f^{n-1}(x^{\circ}), ...\}$$

recibe el nombre de período o ciclo de orden n. Otra forma de verlo es que x° es punto fijo de la aplicación f^n

Ejemplo 6.27. si $f(x) = sen(x)$ entonces si $x^{\circ} = 0{,}5$

$O(f(x^{\circ})) = \{0.5, f(0) = sen(0.5) = 0{,}47, f^2(0.5) = sen(sen(0.5)) = 0.46, ..., f^n(0.5) \longrightarrow 0, ...\}$

cuando n tiende a infinito la sucesión tiende a 0

si $f(x) = \frac{1}{x}$ entonces para $x^{\circ} = 2$

$$O(f(x^{\circ})) = \{1, f(2) = \frac{1}{2}, f^2(2) = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 2, ...\}$$

x° es cíclico de orden 2

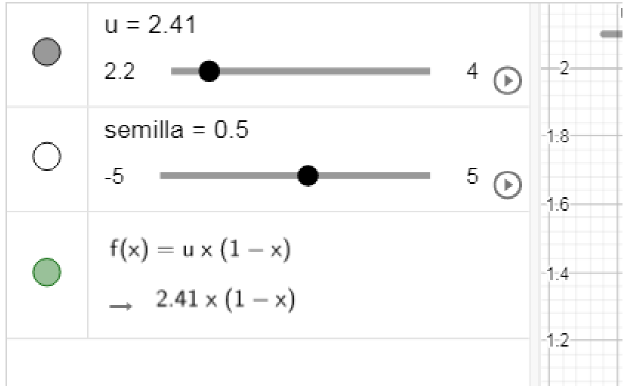


Figura 6.9: Vista algebraica

6.1.4. Diagramas de bifurcación

El modelo discreto de May

$$X(t+1) = \mu X(t)(1 - X(t)), \quad t = 0, 1, 2, ..$$

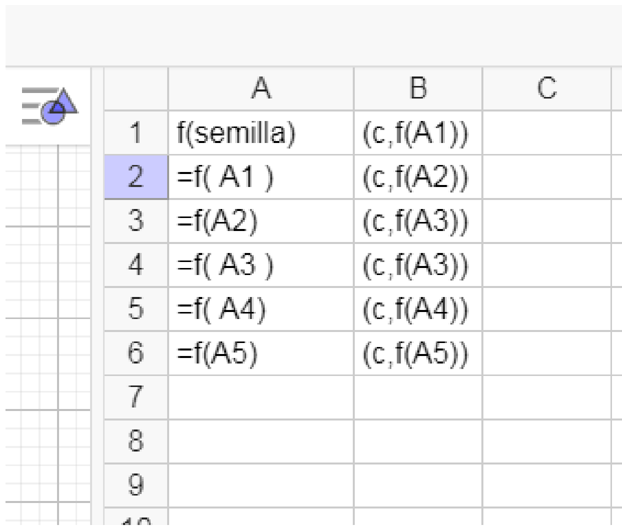
Recordar que es la curva logística, utilizada para estudiar la evolución de poblaciones en ecología. en el ejemplo 1.40. que al variar el valor del parámetro, el sistema puede tender a un solo punto de equilibrio, a dos, a cuatro,..., o bien presentar un comportamiento caótico.

Haciendo uso del software de GeoGebra podemos hacer la simulación del diagrama de bifurcación para la curva logística el cual se obtiene dibujando en el eje de abscisas los valores del parámetro y en el eje de ordenadas los valores a los que tiende el sistema.

Por ejemplo si $\mu = 2{,}5$ entonces $X(t) \longrightarrow 0, 6$,(Figura 1.5), o bien, en el caso $\mu = 3, 3$ entonces $X(t) \longrightarrow 0, 823$ y $X(t) \longrightarrow 0, 479$, (Figura 6.9).

De esta forma al representar la gráfica obtenida. Si seleccionamos cualquiera de las zonas del diagrama de bifurcación y la ampliamos obtenemos una imagen en la cual. Podremos comprobar una de las propiedades que definen a un objeto fractal, como es la autosemejanza.

En GeoGebra declaramos el valor inicial, sea $X(0) = 0{,}5$, se crea un deslizador numérico en este caso $2{,}2 < \alpha < 4$ se escribe la ecuación de May $f(x) = \alpha x(1 - x)$. Luego en la hoja de calculo se escribe en una celda $A1$ lo siguiente $= f(X(0))$ y en la celda contigua $B1$ de hará el punto $= (\alpha, f(A1))$ luego en la celda $A2$ se escribe $= f(A1)$ y en la celda $B2$, $= (\alpha, f(A2))$ asÃ sucesivamente en el siguiente ejemplo se hicieron 200 iteraciones para obtener el diagrama de bifurcación.



	A	B	C
1	f(semilla)	(c,f(A1))	
2	=f(A1)	(c,f(A2))	
3	=f(A2)	(c,f(A3))	
4	=f(A3)	(c,f(A3))	
5	=f(A4)	(c,f(A4))	
6	=f(A5)	(c,f(A5))	
7			
8			
9			

Figura 6.10: Hoja de calculo con 6 iteraciones

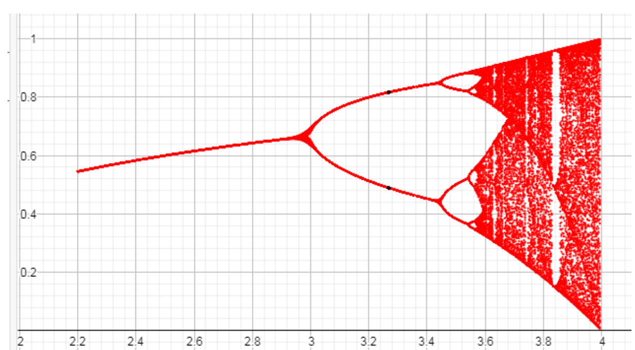


Figura 6.11: Diagrama de bifurcación para el modelo de May

En el diagrama de bifurcación anterior Figura (6.11) se evidencia una de las principales características de un fractal la cual es la autosemejanza y como cuando α se aproxima a 4 el modelo se torna caótico.

Conclusión

A lo largo del desarrollo de este trabajo queremos destacar lo útil que puede resultar como material de consulta para los estudiantes del curso de teoría de ecuaciones. En este documento se puede encontrar variados tipos de ecuaciones en diferencia y diferenciales con sus respectivas soluciones así también como su comparación. además, tiene como finalidad mostrar los detalles de todos los resultados realizados por el autor donde se puede ver la aplicación de las definiciones y teoremas. Con el objeto de resaltar las diferencias y similitudes entre las ecuaciones diferenciales discretas y continuas y lo útil que son a la hora de estudiar un sistema dinámico.

El principal rasgo en que se diferencian las ecuaciones en diferencias y diferénciales es que las ecuaciones en diferencias tienen como entrada un número entero positivo, es decir que tiene variable discreta, mientras que las ecuaciones diferenciales tienen como entrada un número real positivo, es decir que tiene variable continua.

Como las ecuaciones en diferencia son ecuaciones conformadas por sucesiones, sus soluciones se pueden hallar de forma iterada, es decir, mediante aproximaciones sucesivas a la solución, empezando desde una estimación inicial. a diferencia de las ecuaciones diferenciales a las cuales se les puede encontrar la solución de forma directa.

Por otra parte, las soluciones de las ecuaciones en diferencias se alejan mucho de las diferenciales cuando los periodos de tiempo son muy grandes, es decir, a medida que las variables tienden a infinito los resultados obtenidos en determinado periodo son muy diferentes con ambos tipos de ecuaciones. Para recopilar los datos de iteraciones tan numerosas se puede hacer uso de Geogebra, el cual, resulta ser una herramienta muy útil para el análisis de las ecuaciones en diferencias.

Las características de las ecuaciones en diferencia nos indica que son propicias para aplicarlas en campos como la Biología y Epidemiología, debido que con estas se pueden hacer análisis de crecimiento poblacional y obtener datos más precisos que con las ecuaciones diferenciales, puesto que las ecuaciones en diferencia presentan el cambio luego de un periodo determinado y la ecuaciones diferenciales presentan el cambio de forma continua lo cual dificulta el estudio de resultados a la hora de hacer un análisis a una población determinada, similarmente ocurre con aplicaciones de tipo financiero.

Se puede decir, que los sistemas discretos tienen la ventaja de ser modelos más ajustados a la realidad. por esta razón en profesiones como Economía, Ingeniería, Bacteriologá, entre otras se hace necesario estudiar a fondo este tipo de sistemas, en cambio, los sistemas continuos son una alternativa para la solución de problemas prácticos que no tienen respuesta en sistemas discretos, por lo tanto, se puede permitir encontrar en sistemas discretos nuevas soluciones comúnmente representadas en modelos continuos.

Bibliografía

[1] Dennis G. Zill 1982. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado.* U.S.A. B.A., Oberlin college.

[2] J. C. Romero. *Introducción al análisis de sistemas dinámicos con aplicaciones.*

[3] Genny A. Navarrete. Universidad nacional de colombia. *Introducción a las ecuaciones en diferencias*

[4] Jorge M. Sotomayor 1979. *Ecuaciones diferenciales ordinarias*

[5] Lino Alvarez-Aurea Martinez. *Ecuaciones en diferencias*