Universidad del Atlántico	CÓDIGO: FOR-DO-109
	VERSIÓN: 0
	FECHA: 03/06/2020

AUTORIZACIÓN DE LOS AUTORES PARA LA CONSULTA, LA REPRODUCCIÓN PARCIAL O TOTAL, Y PUBLICACIÓN ELECTRÓNICA DEL TEXTO COMPLETO

Puerto Colombia, **22 de Marzo de 2021**

Señores
DEPARTAMENTO DE BIBLIOTECAS
Universidad del Atlántico

Asunto: Autorización Trabajo de Grado

Cordial saludo,

Yo, **CLARA BLANCO DRAGO**, identificado(a) con **C.C. No. 1.143.262.953** de **BARRANQUILLA**, autor(a) del trabajo de grado titulado **ESPACIOS NEARLY S-PARACOMPACTOS** presentado y aprobado en el año **2020** como requisito para optar al título Profesional de **MATEMÁTICO(A)**; autorizo al Departamento de Bibliotecas de la Universidad del Atlántico para que, con fines académicos, la producción académica, literaria, intelectual de la Universidad del Atlántico sea divulgada a nivel nacional e internacional a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Los usuarios del Departamento de Bibliotecas de la Universidad del Atlántico pueden consultar el contenido de este trabajo de grado en la página Web institucional, en el Repositorio Digital y en las redes de información del país y del exterior, con las cuales tenga convenio la Universidad del Atlántico.
- Permitir consulta, reproducción y citación a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato CD-ROM o digital desde Internet, Intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer.

Esto de conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, “Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores”, los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.
Atentamente,

Firma

CLARA BLANCO DRAGO
C.C. No. 1.143.262.953 de BARRANQUILLA

Universidad del Atlántico	CÓDIGO: FOR-DO-110
	VERSIÓN: 01
	FECHA: 02/DIC/2020

DECLARACIÓN DE AUSENCIA DE PLAGIO EN TRABAJO ACADÉMICO PARA GRADO

Este documento debe ser diligenciado de manera clara y completa, sin tachaduras o enmendaduras y las firmas consignadas deben corresponder al (los) autor (es) identificado en el mismo.

Puerto Colombia, **22 de Marzo de 2021**

Una vez obtenido el visto bueno del director del trabajo y los evaluadores, presento al **Departamento de Bibliotecas** el resultado académico de mi formación profesional o posgradual. Asimismo, declaro y entiendo lo siguiente:

- El trabajo académico es original y se realizó sin violar o usurpar derechos de autor de terceros, en consecuencia, la obra es de mi exclusiva autoría y detento la titularidad sobre la misma.
- Asumo total responsabilidad por el contenido del trabajo académico.
- Eximo a la Universidad del Atlántico, quien actúa como un tercero de buena fe, contra cualquier daño o perjuicio originado en la reclamación de los derechos de este documento, por parte de terceros.
- Las fuentes citadas han sido debidamente referenciadas en el mismo.
- El (los) autor (es) declara (n) que conoce (n) lo consignado en el trabajo académico debido a que contribuyeron en su elaboración y aprobaron esta versión adjunta.

Título del trabajo académico:	**ESPACIOS NEARLY S-PARACOMPACTOS**
Programa académico:	**MATEMÁTICAS**

Firma de Autor 1:								
Nombres y Apellidos:	**CLARA BLANCO DRAGO**							
Documento de Identificación:	**CC**	**X**	**CE**		**PA**		**Número:**	**1.143.262.953**
Nacionalidad:					**Lugar de residencia:**			
Dirección de residencia:								
Teléfono:					**Celular:**			

Universidad del Atlántico	CÓDIGO: FOR-DO-111
	VERSIÓN: 0
	FECHA: 03/06/2020

FORMULARIO DESCRIPTIVO DEL TRABAJO DE GRADO

TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO DE GRADO	**ESPACIOS NEARLYS-PARACOMPACTOS**
AUTOR(A) (ES)	**CLARA BLANCO DRAGO**
DIRECTOR (A)	**JOSÉ EDUARDO SANABRIA**
CO-DIRECTOR (A)	**-**
JURADOS	**MARGARITA GARY GUTIERREZ** **CARLOS CARPINTERO FIGUEROA**
TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TITULO DE	**MATEMÁTICO**
PROGRAMA	**MATEMÁTICAS**
PREGRADO / POSTGRADO	**PREGRADO**
FACULTAD	**CIENCIAS BÁSICAS**
SEDE INSTITUCIONAL	**SEDE NORTE**
AÑO DE PRESENTACIÓN DEL TRABAJO DE GRADO	**2020**
NÚMERO DE PÁGINAS	**86**
TIPO DE ILUSTRACIONES	**NO APLICA**
MATERIAL ANEXO (VÍDEO, AUDIO, MULTIMEDIA O PRODUCCIÓN ELECTRÓNICA)	**NO APLICA**
PREMIO O RECONOMIENTO	**NO APLICA**

UNIVERSIDAD DEL ATLÁNTICO
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
PROGRAMA DE MATEMÁTICAS

ESPACIOS NEARLY S-PARACOMPACTOS

Autora: Br. Clara Blanco Drago

C.C.- 1143262953

Director: Dr. José Eduardo Sanabria

Universidad de Sucre - Colombia

C.E.- 683223

TRABAJO DE GRADO PRESENTADO PARA
OPTAR AL GRADO DE MATEMÁTICO

Barranquilla, Noviembre 2020

Índice general

Resumen

En este trabajo, se utilizan las colecciones de los conjuntos regular abiertos y semi-abiertos de un espacio topológico para introducir y estudiar una nueva clase de espacios, llamados espacios nearly S-paracompactos, los cuales generalizan los espacios nearly paracompactos introducidos por M. K. Singal y S. P. Arya [20] y los espacios S-paracompactos definidos por K. Y. Al-Zoubi [1]. Se establecen las relaciones entre estos nuevos espacios y otros conocidos en la literatura, tales como espacios paracompactos, almost paracompactos, almost regulares, S-cerrados, contablemente S-cerrados, nearly compactos, entre otros. También, se introduce la noción de subconjuntos α-nearly S-paracompactos y se obtienen algunas propiedades de estos subconjuntos utilizando las nociones de conjuntos δg-cerrados, sg-cerrados, ϑs-cerrados y clopen. Finalmente, se estudia la invarianza bajo imágenes directas e inversas de funciones abiertas y perfectas, y el comportamiento de la suma y el producto, de los espacios nearly S-paracompactos. Cabe destacar que estos resultados son originales y están contenidos en los artículos de investigación [18] y [4], los cuales se han sometido a un proceso de arbitraje en revistas indexadas en la base de datos Publindex.

Introducción

La paracompacidad es una de las nociones más útiles en la topología general, pues muchos de los espacios estudiados en esta rama de la matemática son paracompactos. Esta noción fue introducida en 1944 por J. Dieudonné [5], logrando demostrar que los espacios metrizables localmente compactos son paracompactos. Posteriormente, en 1948, A. H. Stone[24] demostró que cualquier espacio metrizable arbitrario es paracompacto, y luego usando este resultado, R. H. Bing [3], J. Nagata [17] y Y. Smirnov [22] dieron soluciones del problema general de metrización. Estos resultados motivaron el estudio de diversas generalizaciones de paracompacidad a través del tiempo, entre las cuales destaca el concepto de espacio nearly paracompacto introducido por M. K. Singal y S. P. Arya [20] en 1968. Esta clase de espacios fue definida empleando los conjuntos regular abiertos debidos a M. H, Stone [25] y está caracterizada por la condición de que *cada cubrimiento del espacio formado por conjuntos regular abiertos tiene un refinamiento abierto localmente finito que cubre al espacio*.

En 1969, M. K. Singal y S. P. Arya [21] introdujeron otra generalización de paracompacidad que denominaron espacios almost paracompactos. Un espacio es almost paracompacto si para cada cubrimiento abierto del espacio, existe un refinamiento abierto localmente finito tal que la familia de las clausuras de sus miembros cubre al espacio. Existen espacios almost paracompactos que no son paracompactos, pero ambas nociones coinciden cuando el espacio en estudio es regular. Con respecto a los productos, los espacios almost paracompactos se comportan como los espacios paracompactos, pues el producto de dos copias de $\mathbb{R}$ dotado de la topología de Sorgenfrey es un espacio regular que no es almost paracompacto, mientras que cada uno de los factores es almost paracompacto.

La noción de conjunto semi-abierto introducida por N. Levine [11], en 1963, ha sido ampliamente estudiada y utilizada en numerosas investigaciones de la topología general para estudiar espacios generados por cubrimientos como, por ejemplo, los espacios S-cerrados y los espacios contablemente S-cerrados, introducidos por T. Thompson [26] y K. Dlaska et al. [6], respectivamente. Motivado por lo anterior, en el 2006, K. Y. Al-Zoubi [1] introdujo la clase de los espacios S-paracompactos, los cuales fueron definidos como aquellos espacios donde cada cubrimiento abierto del espacio tiene un refinamiento semi-abierto localmente finito.

Siguiendo esta línea de investigación, recientemente, J. Sanabria et al. [18] introdujeron e investigaron una nueva clase de espacios, llamados espacios nearly S-paracompactos, los cuales contienen a la clase de los espacios nearly paracompactos y la clase de los espacios S-paracompactos. Un espacio se dice nearly S-paracompacto si cada cubrimiento regular abierto del espacio admite un refinamiento semi-abierto localmente finito que también es un cubrimiento del espacio. En este trabajo, se investiga el comportamiento de los espacios nearly S-paracompactos bajo algunas hipótesis adicionales tales como que el espacio sea semiregular, almost regular y extremadamente disconexo; se establece la relación precisa entre los espacios nearly S-paracompactos y los espacios nearly paracompactos, S-paracompactos y almost paracompactos. También, se introduce y estudia la noción de subconjuntos α-nearly S-paracompactos de manera similar a los subconjuntos αS-paracompactos propuestos en [1], reemplazando los conjuntos abiertos por los regular abiertos. Adicionalmente, se estudia la invarianza bajo imágenes directas e inversas de funciones abiertas y perfectas de los espacios nearly S-paracompactos y se analiza el comportamiento de tales espacios a través de la suma y producto topológico, los cuales son resultados recientemente obtenidos por C. Blanco et al. [4].

Capítulo 1

Preliminares topológicos

1.1. Conjuntos abiertos generalizados

En esta sección, se presentan nociones generalizadas de conjuntos abiertos y sus respectivas clases de conjuntos cerrados en un espacio topológico. Además, se describen algunas de las propiedades más conocidas de estas clases de conjuntos. A lo largo del trabajo se considera que el par (X, τ) es un espacio topológico (que simplemente será llamado espacio) en el cual no se asumen los axiomas de separación, a menos que explícitamente se diga lo contrario. Además, $\mathrm{Int}(A)$ y $\mathrm{Cl}(A)$ denotarán el interior de A y la clausura de $A \subset X$, respectivamente.

Definición 1.1.1. *Un subconjunto A de un espacio (X, τ) se dice* ***regular abierto,*** *si $A = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A))$.*

Observación 1.1.1. *Cada conjunto regular abierto es abierto.*

En el siguiente ejemplo se muestra que el recíproco de la observación 1.1, en general, no es cierto.

Ejemplo 1.1.1. *Considere el conjunto $X = \{a, b, c, d\}$ con la topolog´ıa $\tau = \{\emptyset, X, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{$ La colección de los conjuntos cerrados es $\{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{d\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}\}$. El conjunto $\{a, b\}$ es un conjunto abierto en (X, τ), pero no es un conjunto regular abierto, pues $\{a, b\} = X = \mathrm{Int}(X) = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\{a, b\}))$.*

La coleccion de los conjuntos regular abiertos en un espacio (X, τ) se denota por $\mathrm{RO}(X,\tau)$. De la observacion , se sigue que $\mathrm{RO}(X,\tau) \subset \tau$.

Proposición 1.1.1. *Para cada subconjunto A de un espacio (X,τ), $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A))$ es regular abierto.*

Demostración. Sea $B = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A))$. Se demostrará que $B = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(B))$. En efecto, $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(B)) = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A)))) \subset \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}(A))) = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A)) = \mathrm{Int}(\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A))) = \mathrm{Int}(B) \subset \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(B))$. As´ı, $B = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A)) = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(B))$. □

Definición 1.1.2. *Un subconjunto A de un espacio (X,τ) se dice* ***regular cerrado*** *si $A = \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(A))$.*

Observación 1.1.2. *Cada conjunto regular cerrado es cerrado.*

En el siguiente ejemplo se muestra que el recíproco de la observación 1.1.2, en general, no es cierto.

Ejemplo 1.1.2. *Considere el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ con la topología cofinita. El conjunto $B = \{0\}$ es cerrado, pero no es regular cerrado pues $B = \{0\} \neq \emptyset = \mathrm{Cl}(\emptyset) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(\{0\})) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(\{B\}))$.* □

La colección de todos los conjuntos regular cerrados en un espacio (X, τ) se denota por $\mathrm{RC}(X,\tau)$. En el siguiente teorema se establece la relación entre los conjuntos regular abiertos y los conjuntos regular cerrados.

Proposición 1.1.2. *Un subconjunto A de un espacio (X,τ) es regular abierto si y solo si $X - A$ es regular cerrado.*

Demostración. Claramente se tiene que:

$$\begin{aligned} A \in \mathrm{RO}(X,\tau) &\iff A = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A)) \iff X - A = X - \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A)) \\ &\iff X - A = \mathrm{Cl}(X - \mathrm{Cl}(A)) \iff X - A = \mathrm{Cl}(X - \mathrm{Cl}(A)) \\ &\iff X - A = \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(X - A)) \iff X - A \in \mathrm{RC}(X,\tau). \end{aligned}$$

□

Lema 1.1.1. *Si A es un subconjunto abierto de un espacio (X, τ) y V es un subconjunto regular abierto de (X, τ), entonces* $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(V \cap A) \cap A) = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(V) \cap A)$.

Demostración. Suponga que A es un subconjunto abierto de (X, τ) y V es un subconjunto regular abierto de (X, τ). Sea $B = \mathrm{Cl}(V \cap A)$ y $G = \mathrm{Cl}(V)$. Entonces $B \subset G$ y se debe mostrar que $\mathrm{Int}(B \cap A) = \mathrm{Int}(G \cap A)$. Puesto que $V \cap A$ es un conjunto abierto en (X, τ), se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Int}(G \cap A) &= \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(V) \cap A) = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(V)) \cap \mathrm{Int}(A) \\
&= V \cap A = \mathrm{Int}(V \cap A) \\
&\subset \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(V \cap A) \cap A) = \mathrm{Int}(B \cap A) \\
&\subset \mathrm{Int}(G \cap A).
\end{aligned}$$

Así, $\mathrm{Int}(G \cap A) = \mathrm{Int}(B \cap A)$; que es $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(V \cap A) \cap A) = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(V) \cap A)$. □

Proposición 1.1.3. *La intersección de dos conjuntos regular abiertos es un conjunto regular-abierto.*

Demostración. Sean A y B conjuntos regular abiertos. Entonces $A = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A))$ y $B = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(B))$. Luego, $A \cap B = \mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A \cap B)) \subset \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(B)) = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A)) \cap \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(B)) = A \cap B$. □

Ejemplo 1.1.3. *La unión de dos conjuntos regular abiertos no es un conjunto regular abierto. Considere el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ con la topología usual y los subconjuntos $A = (0, 1)$ y $B = (1, 2)$ de $\mathbb{R}$. Entonces* $(0, 1) = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}((0, 1)))$ *y* $(1, 2) = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}((1, 2)))$, *por lo que A y B son conjuntos regular-abiertos, pero $C = A \cup B = (0, 1) \cup (1, 2)$ no es un conjunto regular abierto, ya que* $C = (0, 1) \cup (1, 2) \neq (0, 2) = \mathrm{Int}([0, 2]) = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}((0, 1) \cup (1, 2))) = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(C))$. □

Lema 1.1.2. *Sea (X, τ) un espacio. La colección* $\mathrm{RO}(X, \tau)$ *es una base para una topología τ sobre X, más gruesa que τ, denotada por τ_s y llamada la semiregularización de τ.*

Demostración. Inicialmente se verifica que $\mathrm{RO}(X,\tau)$ satisface las condiciones para ser una base.

(1) Sea $x \in X$. Entonces $x \in U$ para algún $U \in \tau$. Luego, $x \in U = \mathrm{Int}(U) \subset \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(U))$ y, por la proposición1.1.1 se tiene que $V = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(U)) \in \mathrm{RO}(X,\tau)$. De esta manera, para cada $x \in X$ existe un $V \in \mathrm{RO}(X,\tau)$ tal que $x \in V$.

(2) Sean $U, V \in \mathrm{RO}(X,\tau)$ y $x \in V \cap W$. Por la proposición 1.1.3, el conjunto $W = U \cap V \in \mathrm{RO}(X,\tau)$ y, además $x \in W \subset U \cap V$.

En segundo lugar, se probará que τ_s es más gruesa que τ. Sea $U \in \tau_s$. Entonces $U = \bigcup_{V \in \mathcal{B}} V$, donde $\mathcal{B} \subset \mathrm{RO}(X,\tau)$. Como $\mathrm{RO}(X,\tau) \subset \tau$, se tiene que $U = \bigcup_{V \in \mathcal{B}} V$ para una cierta colección $\mathcal{B} \subset \tau$, por lo que U es la unión arbitraria de miembros de τ y, as´ı, $U \in \tau$. De acuerdo a los dos pasos mostrados, se concluye que ciertamente τ_s es una topología sobre X que es más gruesa que τ. □

Definición 1.1.3. *Un espacio (X,τ) se dice* ***semiregular,*** *si la topología τ_s coincide con la topolog´ıa τ.*

Sea (X,τ) un espacio y Y un subconjunto de X. Se denomina la **topología relativa** o **topología inducida** por τ sobre Y a la colección $\tau_Y = \{U \cap Y : U \in \tau\}$. El interior y la clausura de un subconjunto $A \subset Y$ en el espacio (Y, τ_Y) se denotarán por $\mathrm{Int}_Y(A)$ y $\mathrm{Cl}_Y(A)$, respectivamente.

Lema 1.1.3. *Sea (X,τ) un espacio topológico. Si $Y \in \tau$, entonces $\mathrm{Int}_Y(B) = \mathrm{Int}(B)$ para cada $B \subset Y$.*

Demostración. Suponga que $Y \in \tau$. Entonces $Y \cap \mathrm{Int}(B) \in \tau_Y$ y $Y \cap \mathrm{Int}(B) \subset B$, por lo que $Y \cap \mathrm{Int}(B) \subset \mathrm{Int}_Y(B)$ y $\mathrm{Int}(B) = \mathrm{Int}(Y \cap B) = \mathrm{Int}(Y) \cap \mathrm{Int}(B) = Y \cap \mathrm{Int}(B) \subset \mathrm{Int}_Y(B)$. Por otra parte, como $Y \in \tau$ se tiene que $\mathrm{Int}_Y(B) \in \tau$ y se sigue que $\mathrm{Int}_Y(B) = \mathrm{Int}(\mathrm{Int}_Y(B)) \subset \mathrm{Int}(B)$. Por lo tanto, $\mathrm{Int}_Y(B) = \mathrm{Int}(B)$. □

Lema 1.1.4. *Sea (X, τ) un espacio. Si Y es un subconjunto abierto o denso de X, entonces:*

(1) $\mathrm{RO}(Y, \tau_Y) = \{V \cap Y : V \in \mathrm{RO}(X, \tau)\}$.

(2) $(\tau_Y)_s = (\tau_s)_Y$.

Demostración. En primer término, suponga que Y es abierto y sea $W \in \mathrm{RO}(Y, \tau_Y)$. Entonces $\mathrm{Cl}_Y(W) = Y \cap \mathrm{Cl}(W)$ y, por el lema 1.1.3, se tiene que $\mathrm{Int}_Y(\mathrm{Cl}_Y(W)) = \mathrm{Int}(Y \cap \mathrm{Cl}(W)) = \mathrm{Int}(Y) \cap \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(W)) = Y \cap \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(W)) = Y \cap V$, donde $V = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(W)) \in \mathrm{RO}(X, \tau)$. Recícprocamente, sea $V \in \mathrm{RO}(X, \tau)$ y haga $W = V \cap Y$. Entonces por los lemas 1.1.3 y 1.1.1, se obtiene que $\mathrm{Int}_Y(\mathrm{Cl}_Y(W)) = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}_Y(W)) = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(W) \cap Y) = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(V \cap Y) \cap Y) = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(V) \cap Y) = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(V)) \cap \mathrm{Int}(V) = V \cap Y = W$. Por lo tanto, $W \in \mathrm{RO}(Y, \tau_Y)$.

En segundo término, suponga que Y es denso en X. Se demostrará que para cada $B \subset Y$ se cumple que $\mathrm{Int}_Y(\mathrm{Cl}_Y(B)) = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(B)) \cap Y$. Sea $x \in \mathrm{Int}_Y(\mathrm{Cl}_Y(B))$. Entonces existe $U \in \tau$ tal que $x \in U \cap Y \subset \mathrm{Cl}_Y(B) = \mathrm{Cl}(B) \cap Y$. Se afirma que $U \subset \mathrm{Cl}(B)$. En caso contrario, se tiene que $U \cap (X - \mathrm{Cl}(B)) \neq \emptyset$ y $U \cap (X - \mathrm{Cl}(B)) \in \tau$. Puesto que Y es denso en X, existe un punto $a \in Y$ tal que $a \in U \cap (X - \mathrm{Cl}(B))$. Así, $a \in U \cap Y$ y $a \notin \mathrm{Cl}(B) \cap Y$, pues $a \in X - \mathrm{Cl}(B)$. Pero esto contradice el hecho que $U \cap Y \subset \mathrm{Cl}(B) \cap Y$. Por lo tanto, $U \subset \mathrm{Cl}(B)$ y se sigue que $x \in U = \mathrm{Int}(U) \subset \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(B))$, lo cual demuestra que $\mathrm{Int}_Y(\mathrm{Cl}_Y(B)) \subset \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(B)) \cap Y$. Para demostrar que $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(B)) \cap Y \subset \mathrm{Int}_Y(\mathrm{Cl}_Y(B))$, se supone que $x \in \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(B)) \cap Y$. Según esto, existe $U \in \tau$ tal que $x \in U \subset \mathrm{Cl}(B)$ y, por lo tanto, $x \in U \cap Y \subset \mathrm{Cl}(B) \cap Y = \mathrm{Cl}_Y(B)$. Como $U \cap Y \in \tau_Y$, se sigue que $x \in \mathrm{Int}_Y(\mathrm{Cl}_Y(B))$ y se concluye que $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(B)) \cap Y \subset \mathrm{Int}_Y(\mathrm{Cl}_Y(B))$.

(2) $B \in (\tau_Y)_s$ si y solo si $B = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$, donde $G_\lambda \in \mathrm{RO}(Y, \tau_Y)$ para cada $\lambda \in \Lambda$ o, equivalentemente, por el inciso (1), $B = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (V_\lambda \cap Y)$, donde $V_\lambda \in \mathrm{RO}(X, \tau)$ para cada $\lambda \in \Lambda$. Pero, esto último equivale a tener que $B = \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda\right) \cap Y = V \cap Y \in (\tau_s)_Y$, donde $V = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda \in \tau_s$. Con lo cual queda demostrado que $(\tau_Y)_s = (\tau_s)_Y$. $\square$

Teorema 1.1.1. *Sea* (X, τ) *un espacio y* $U \subset Y \subset X$ *donde* $Y \in \mathrm{RO}(X, \tau)$. *Si* $U \in \mathrm{RO}(Y, \tau_Y)$, *entonces* $U \in \mathrm{RO}(X, \tau)$.

Demostración. Suponga que $Y \in \mathrm{RO}(X, \tau)$ y $U \in \mathrm{RO}(Y, \tau_Y)$. Por el lema 1.1.4, se tiene que $U = V \cap Y$, donde $V \in \mathrm{RO}(X, \tau)$. Puesto que la intersección de dos conjuntos regular abiertos es un conjunto regular abierto, se concluye que $V \cap Y \in \mathrm{RO}(X, \tau)$. Por lo tanto, $U \in \mathrm{RO}(X, \tau)$. □

Definición 1.1.4. *Un subconjunto* A *de un espacio* (X, τ) *se dice* ***semi-abierto,*** *si existe un conjunto abierto* U *tal que* $U \subset A \subset \mathrm{Cl}(U)$.

La colección de los conjuntos semi-abiertos en un espacio (X, τ) se denota por $\mathrm{SO}(X, \tau)$.

Proposición 1.1.4. *Cada conjunto abierto es semi-abierto.*

Demostración. Sea A un subconjunto abierto de un espacio (X, τ). Puesto que $A \subset \mathrm{Cl}(A)$, se tiene que $U = A$ es un conjunto abierto tal que $U \subset A \subset \mathrm{Cl}(U)$, por lo que A es un conjunto semi-abierto. □

En el siguiente ejemplo se mostrará que el recíproco de la proposición 1.1.4, en general, no es cierto.

Ejemplo 1.1.4. *Considere el conjunto* $X = \{a, b, c, d\}$, *con la topolog´ıa del punto excluido* $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{d\}, \{a, c\}\}, \{a, d\}, \{c, d\}. \{a, c, d\}\}$. *La colección de conjuntos cerrados es* $\{\emptyset, X, \{b\}, \{a, b\}, \{c, b\}, \{b, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}\}$. *El conjunto* $\{a, b, c\}$ *es semi-abierto, pues* $\{a, c\} \subset \{a, b, c\} = \mathrm{Cl}(\{a, c\})$, *pero no es un conjunto abierto, ya que no está en* τ. □

Teorema 1.1.2. *Sea* A *un subconjunto de un espacio* (X, τ). *Las siguientes propiedades son equivalentes:*

(1) A *es un conjunto semi-abierto.*

(2) $A \subset \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(A))$.

(3) $\mathrm{Cl}(A) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(A))$.

Demostración. (1)$\Rightarrow$(2) Sea A un conjunto semi-abierto. Entonces existe un conjunto abierto U tal que $U \subset A \subset \mathrm{Cl}(U)$. Puesto que U es abierto, se tiene que $U = \mathrm{Int}(U) \subset \mathrm{Int}(A)$ y así, $\mathrm{Cl}(U) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(U)) \subset \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(A))$. Por lo tanto, $A \subset \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(A))$.

(2)$\Rightarrow$(3) Si $A \subset \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(A))$, entonces $\mathrm{Cl}(A) \subset \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(A))$. Además, como $\mathrm{Int}(A) \subset A$, se sigue que $\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(A)) \subset \mathrm{Cl}(A)$. Así, $\mathrm{Cl}(A) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(A))$.

(3)$\Rightarrow$(1) Si $\mathrm{Cl}(A) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(A))$, entonces $\mathrm{Int}(A) \subset A \subset \mathrm{Cl}(A) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(A))$. Luego, $U = \mathrm{Int}(A)$ es un conjunto abierto tal que $U \subset A \subset \mathrm{Cl}(U)$. Por lo tanto, A es un conjunto semi-abierto. □

Proposición 1.1.5. *Para cada subconjunto A de un espacio (X, τ), $\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(A))$ es un conjunto semi-abierto.*

Demostración. Sea $U = \mathrm{Int}(A)$. Entonces U es un conjunto abierto tal que $U = \mathrm{Int}(A) \subset \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(A)) = \mathrm{Cl}(U)$, por lo que $\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(A))$ es un conjunto semi-abierto. □

Teorema 1.1.3. *Si A es un subconjunto semi-abierto de un espacio (X, τ) y B es un subconjunto abierto de (X, τ), entonces $A \cap B$ es un subconjunto semi-abierto de (X, τ).*

Demostración. Puesto que A es un conjunto semi-abierto, existe un conjunto abierto U tal que $U \subset A \subset \mathrm{Cl}(U)$. Por lo tanto, $U \cap B \subset A \cap B \subset \mathrm{Cl}(U) \cap B$. Se demostrará que $\mathrm{Cl}(U) \cap B \subset \mathrm{Cl}(U \cap B)$. Si $x \in \mathrm{Cl}(U) \cap B$ y V es cualquier conjunto abierto que contiene a x, Entonces $B \cap V$ es un conjunto abierto que contiene a x. Como $x \in \mathrm{Cl}(U)$, se tiene que $(U \cap B) \cap V = U \cap (B \cap V)$ $\emptyset$, lo cual implica que $x \in \mathrm{Cl}(U \cap B)$. De esta manera, $U \cap B$ es un conjunto abierto tal que $U \cap B \subset A \cap B \subset \mathrm{Cl}(U) \cap B \subset \mathrm{Cl}(U \cap B)$. Por lo tanto, $A \cap B$ es un conjunto semi-abierto. □

En el siguiente ejemplo se muestra que la intersección de dos conjuntos semi-abiertos, en general, no es un conjunto semi-abierto, por lo que $\mathrm{SO}(X, \tau)$ no es una topología.

Ejemplo 1.1.5. *Considere el conjunto de los números reales* $\mathbb{R}$ *con la topología usual. Los conjuntos* $A = (0, 1]$ *y* $B = [1, 2)$ *son semi-abiertos, pues* $A = (0, 1] \subset [0, 1] = \mathrm{Cl}((0, 1)) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}((0, 1])) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(A))$ *y* $B = [1, 2) \subset [1, 2] = \mathrm{Cl}((1, 2)) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}([1, 2))) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(B))$. *Pero* $A \cap B = (0, 1] \cap [1, 2) = \{1\}$ *no es semi-abierto, pues* $A \cap B = \{1\} \not\subset \emptyset = \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(\{1\}))$. □

Teorema 1.1.4. *Si* $\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ *es una colección arbitraria de conjuntos semi-abiertos en un espacio* (X, τ)*, entonces* $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ *es un conjunto semi-abierto en* (X, τ).

Demostración. Puesto que $A_\lambda \subset \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(A_\lambda)) \subset \mathrm{Cl}\left(\mathrm{Int}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)\right)$ para cada $\lambda \in \Lambda$, se tiene que $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(A_\lambda)) \subset \mathrm{Cl}\left(\mathrm{Int}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)\right)$, por lo que $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ es un conjunto semi-abierto. □

Definición 1.1.5. *Un subconjunto* A *en un espacio* (X, τ) *se dice* ***semi-cerrado****, si* $X - A$ *es un conjunto semi-abierto. La colección de todos los conjuntos semi-cerrados en* (X, τ) *se denota por* $\mathrm{SC}(X, \tau)$.

Observación 1.1.3. *Sea* (X, τ) *un espacio. Entonces:*

(1) Cada conjunto cerrado es semi-cerrado.

(2) Cada conjunto regular cerrado es semi-abierto; esto sigue de la proposición 1.1.5.

(3) Cada conjunto regular abierto es semi-cerrado; esto sigue del inciso (2) *considerando complementos.*

Los siguientes dos ejemplos muestran que los recíprocos de las implicaciones en la observación 1.1.3, en general, no se cumplen.

Ejemplo 1.1.6. *Considere el conjunto de los números reales* $\mathbb{R}$ *con la topología cofinita. El conjunto* $A = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ *es abierto y, por lo tanto, semi-abierto, pero* A *no es regular cerrado, pues* $A = (-\infty, 1) \cup (1, \infty) \neq \emptyset = \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}((-\infty, 1) \cup (1, \infty))) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(A))$. □

Ejemplo 1.1.7. *Considere el conjunto de los números reales* $\mathbb{R}$ *con la topología usual. El conjunto* $B = \mathbb{R} - (-1, 1]$ *es semi-cerrado, pero no es cerrado. De igual manera,* B *es un conjunto semi-cerrado que no es regular abierto, ya que* $B = (-1, 1] \neq [-1, 1] = \mathrm{Cl}((-1, 1)) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}((-1, 1])) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(B))$. □

Proposición 1.1.6. *Un subconjunto* A *en un espacio* (X, τ) *es regular cerrado si y solo si* A *es cerrado y semi-abierto.*

Demostración. De las observaciones 1.1.2 y 1.1.3, se tiene que cada conjunto regular cerrado es cerrado y semi-abierto. En forma recíproca, suponga que A es cerrado y semi-abierto. Entonces $A = \mathrm{Cl}(A) \subset \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(A)) \subset \mathrm{Cl}(A) = A$. Por lo tanto, $A = \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(A))$ y, así, A es regular cerrado. □

Definición 1.1.6. *Para cada subconjunto* A *de un espacio* (X, τ) *se definen los siguientes conjuntos:*

(1) La ***semi-clausura*** *de* A*, denotada por* $\mathrm{sCl}(A)$*, es la intersección de todos los conjuntos semi-cerrados que contienen a* A*. Esto es,* $\mathrm{sCl}(A) = \bigcap\{F : A \subset F, F \in SC(X, \tau)\}$.

(2) El ***semi-interior*** *de* A*, denotado por* $\mathrm{sInt}(A)$*, es la unión de todos los conjuntos semi-abiertos contenidos en* A*. En decir,* $\mathrm{sInt}(A) = \bigcup\{G : G \subset A, G \in SO(X, \tau)\}$.

Por el teorema 1.1.4 se sabe que la unión arbitraria de conjuntos semi-abiertos es un conjunto semi-abierto, por lo que la intersección arbitraria de conjuntos semi-cerrados es un conjunto semi-cerrado. Así, $\mathrm{sCl}(A)$ es el conjunto semi-cerrado más pequeño (en el sentido de inclusión) que contiene a A y $\mathrm{sInt}(A)$ es el conjunto semi-abierto más grande contenido en A.

Teorema 1.1.5. *Para cada subconjunto* A *de un espacio* (X, τ)*, se satisface que* $\mathrm{Int}(A) \subset \mathrm{sInt}(A) \subset A \subset \mathrm{sCl}(A) \subset \mathrm{Cl}(A)$.

Demostración. Puesto que $\mathrm{Int}(A)$ es un conjunto abierto, se sigue que $\mathrm{Int}(A) \in SO(X, \tau)$ y como $\mathrm{Int}(A) \subset A$, se obtiene que $\mathrm{Int}(A) \subset \mathrm{sInt}(A)$. Por otro parte, dado que $\mathrm{Cl}(A)$ es un conjunto cerrado, se tiene que $\mathrm{Cl}(A) \in SC(X, \tau)$ y, as´ı, $\mathrm{sCl}(A) \subset \mathrm{Cl}(A)$. Finalmente, de la definición 1.1.6, se tiene que sInt(A) ⊂ A ⊂ sCl(A), por lo que $\mathrm{Int}(A) \subset \mathrm{sInt}(A) \subset A \subset \mathrm{sCl}(A) \subset \mathrm{Cl}(A)$. □

A continuación, se presenta un ejemplo que muestra que la semi-clausura de un conjunto no coincide con su clausura y que el semi-interior tampoco coincide con el interior.

Ejemplo 1.1.8. *Considere el conjunto de los números reales* $\mathbb{R}$ *con la topología usual y sea* $A = (-1, 1]$*. Entonces:*

(1) $\mathrm{Cl}(A) = \mathrm{Cl}((-1, -1]) = [-1, 1] \neq (-1, 1] = \mathrm{sCl}((-1, 1]) = \mathrm{sCl}(A)$.

(2) $\mathrm{Int}(A) = \mathrm{Int}((-1, 1]) = (-1, 1) \,/{=}\, (-1, 1] = \mathrm{sInt}((-1, 1]) = \mathrm{sInt}(A)$. □

Teorema 1.1.6. *Sea A un subconjunto de un espacio (X, τ). Entonces:*

(1) A es semi-abierto si y solo si $A = \mathrm{sInt}(A)$.

(2) A es semi-cerrado si y solo si $A = \mathrm{sCl}(A)$).

Demostración. (1) La inclusión $\mathrm{sInt}(A) \subset A$ es cierta para cada subconjunto A de (X, τ). Para la inclusión opuesta, suponga que A es un conjunto semi-abierto. Puesto que $\mathrm{sInt}(A)$ es el conjunto semi-abierto más grande contenido en A, se sigue $A \subset \mathrm{sInt}(A)$, por lo que $A = \mathrm{sInt}(A)$. En forma recíproca, si $A = \mathrm{sInt}(A)$, es inmediato que A es semi-abierto.

(2) La inclusión $A \subset \mathrm{sCl}(A)$ es cierta para cada subconjunto A de (X, τ). Para la inclusión opuesta, suponga que A es un conjunto semi-cerrado. Dado que $\mathrm{sCl}(A)$ es el conjunto semi-cerrado más pequeño que contiene a A, se tiene que $\mathrm{sCl}(A) \subset A$, de donde, $A = \mathrm{sCl}(A)$. En forma recíproca, si $A = \mathrm{sCl}(A)$, es obvio que A es semi-cerrado. □

Teorema 1.1.7. *Sea A un subconjunto abierto de un espacio (X, τ). Entonces:*

(1) $x \in \mathrm{sInt}(A)$ *si y solo si existe un* $U \in \mathrm{SO}(X, \tau)$ *tal que* $x \in U$ *y* $U \subset A$.

(2) $x \in \mathrm{sCl}(A)$ *si y solo si* $A \cap U \neq \emptyset$ *para todo* $U \in \mathrm{SO}(X, \tau)$ *tal que* $x \in U$.

Demostración. (1) Suponga que $x \in \mathrm{sInt}(A)$. Tomando $U = \mathrm{sInt}(A)$, se tiene que $U \in \mathrm{SO}(X, \tau)$ es tal que $x \in U$ y $U \subset A$. En forma recíproca, suponga que existe $U \in \mathrm{SO}(X, \tau)$ tal que $x \in U$ y $U \subset A$, por lo que $U \subset \mathrm{sInt}(A)$ y, así, $x \in \mathrm{sInt}(A)$.

(2) Sea $x \in \mathrm{sCl}(A)$. Suponga que existe un $U \in \mathrm{SO}(X, \tau)$ tal que $x \in U$ y $U \cap A = \emptyset$, por lo que $A \subset X - U$ y, como $X - U \in \mathrm{SC}(X, \tau)$, se sigue que $\mathrm{sCl}(A) \subset X - U$. Por lo tanto, $x \in U \subset X - \mathrm{sCl}(A)$, lo cual contradice el hecho que $x \in \mathrm{sCl}(A)$. En forma recíproca, asuma que $A \cap U \neq \emptyset$ para todo $U \in \mathrm{SO}(X, \tau)$ tal que $x \in U$. Si $x \notin \mathrm{sCl}(A)$, entonces existe $F \in \mathrm{SC}(X, \tau)$ tal que $x \notin F$ y $A \subset F$. Luego, $X - F$ es un conjunto semi-abierto tal que $x \in X - F$ y $A \cap (X - F) = \emptyset$, contradiciendo el supuesto que $x \in \mathrm{sCl}(A)$. Esto prueba que $x \in \mathrm{sCl}(A)$. □

Proposición 1.1.7. *Sean A y B subconjuntos de un espacio (X, τ). Entonces:*

(1) Si $A \subset B$, *entonces* $\mathrm{sInt}(A) \subset \mathrm{sInt}(B)$.

(2) $\mathrm{sInt}(\mathrm{sInt}(A)) = \mathrm{sInt}(A)$.

(3) Si $A \subset B$, *entonces* $\mathrm{sCl}(A) \subset \mathrm{sCl}(B)$.

(4) $\mathrm{sCl}(\mathrm{sCl}(A)) = \mathrm{sCl}(A)$.

Demostración. (1) Sea $x \in \mathrm{sInt}(A)$. Entonces existe $U \in \mathrm{SO}(X, \tau)$ tal que $x \in U$ y $U \subset A$. Como $A \subset B$, se tiene que $x \in U$ y $U \subset B$. Por lo tanto, $x \in \mathrm{sInt}(B)$ y así, $\mathrm{sInt}(A) \subset \mathrm{sInt}(B)$.

(2) Por aplicación del inciso (1), se tiene que $\mathrm{sInt}(\mathrm{sInt}(A)) \subset \mathrm{sInt}(A)$. Por otra parte, $\mathrm{sInt}(A) \subset \mathrm{sInt}(A)$, $\mathrm{sInt}(A) \in \mathrm{SO}(X, \tau)$ y, puesto que $\mathrm{sInt}(\mathrm{sInt}(A))$ es el semi-abierto más grande contenido en $\mathrm{sInt}(A)$, se obtiene que $\mathrm{sInt}(A) \subset \mathrm{sInt}(\mathrm{sInt}(A))$. Por lo tanto, $\mathrm{sInt}(\mathrm{sInt}(A)) = \mathrm{sInt}(A)$.

(3) Suponga que $x \notin \mathrm{sCl}(B)$. Entonces existe $V \in \mathrm{SO}(X,\tau)$ tal que $x \in V$ y $B \cap V = \emptyset$. Puesto que $A \subset B$, se tiene que $A \cap V \subset B \cap V = \emptyset$, por lo que $A \cap V = \emptyset$ y, así, $x \notin \mathrm{sCl}(A)$. En consecuencia, $\mathrm{sCl}(A) \subset \mathrm{sCl}(B)$.

(4) Por el inciso (3), se tiene que $\mathrm{sCl}(A) \subset \mathrm{sCl}(\mathrm{sCl}(A))$. Por otra parte, $\mathrm{sCl}(A) \subset \mathrm{sCl}(A)$ y $\mathrm{sCl}(A)$ es un conjunto semi-cerrado, luego, como sCl(sCl(A)) es el semi-cerrado más pequeño que contiene a $\mathrm{sCl}(A)$, se obtiene que $\mathrm{sCl}(\mathrm{sCl}(A)) \subset \mathrm{sCl}(A)$. Por lo tanto, $\mathrm{sCl}(\mathrm{sCl}(A)) = \mathrm{sCl}(A)$. □

Teorema 1.1.8. *Sea A un subconjunto de un espacio (X,τ) y $U \in \mathrm{SO}(X,\tau)$. Entonces $U \cap \mathrm{sCl}(A) \neq \emptyset$ si y solo si $U \cap A \neq \emptyset$.*

Demostración. Suponga que $U \cap \mathrm{sCl}(A) \neq \emptyset$. Entonces existe $x \in U \cap \mathrm{sCl}(A)$, por lo que $x \in U$ y $x \in \mathrm{sCl}(A)$. Puesto que $U \in \mathrm{SO}(X,\tau)$, se conluye que $U \cap A$ $\emptyset$. En forma recíproca, si $U \cap A \neq \emptyset$, entonces $U \cap A \subset U \cap \mathrm{sCl}(A)$ y, por lo tanto, $\emptyset =$ □

$U \cap \mathrm{sCl}(A) \neq \emptyset$.

Teorema 1.1.9. *Sea (X,τ) un espacio y $A \subset Y \subset X$. Si $A \in \mathrm{SO}(X,\tau)$, entonces $A \in \mathrm{SO}(Y,\tau_Y)$.*

Demostración. Suponga que $A \in \mathrm{SO}(X,\tau)$. Entonces existe $U \in \tau$ tal que $U \subset A \subset \mathrm{Cl}(U)$, por lo que $U \cap Y \subset A \cap Y \subset \mathrm{Cl}(U) \cap Y$ y, puesto que $U \subset A \subset Y$, se tiene que $A = A \cap Y$, $U = U \cap Y$ y $U \in \tau_Y$. Además, como $\mathrm{Cl}_Y(U) = \mathrm{Cl}(U) \cap Y$, se sigue que $U \subset A \subset \mathrm{Cl}_Y(U)$ y $U \in \tau_Y$, lo cual demuestra que $A \in \mathrm{SO}(Y,\tau_Y)$. □

En el siguiente ejemplo se muestra que el recíproco del teorema 1.1.9, en general, no es cierto.

Ejemplo 1.1.9. *Sea $(\mathbb{R},\tau)$ el conjunto de los números reales con la topología usual. Considere el subespacio $Y = \{0\}$ y el conjunto $A = \{0\}$. Entonces $A \in \mathrm{SO}(Y,\tau_Y)$ y $A \notin \mathrm{SO}(X,\tau)$.* □

Corolario 1.1.1. *Sea (X,τ) un espacio. Si $Y \in \tau$ y $U \in \mathrm{SO}(X,\tau)$, entonces $Y \cap U \in \mathrm{SO}(Y,\tau_Y)$.*

Demostración. Si $Y \in \tau$ y $U \in SO(X, \tau)$, entonces por el teorema 1.1.3, se tiene que $Y \cap U \in SO(X, \tau)$ y, por el teorema 1.1.9, se conluye que $Y \cap U \in SO(Y, \tau_Y)$. □

Teorema 1.1.10. *Sea* (X, τ) *un espacio y* $A \subset Y \subset X$*, donde* $Y \in \tau$*. Si* $A \in SO(Y, \tau_Y)$*, entonces* $A \in SO(X, \tau)$*.*

Demostración. Suponga que $A \in SO(Y, \tau_Y)$ y $Y \in \tau$. Entonces existe $U \in \tau_Y$ tal que $U \subset A \subset Cl_Y(U)$. Como Y es abierto, se tiene que $U \in \tau$ y $Cl_Y(U) = Cl(U) \cap Y \subset Cl(U)$. As´ı, $U \subset A \subset Cl(U)$, lo cual demuestra que $A \in SO(X, \tau)$. □

Observación 1.1.4. *El ejemplo 1.1.9 muestra que en el teorema 1.1.10 no se puede omitir la condición de que* Y *sea abierto.*

Proposición 1.1.8. *Para cada subconjunto semi-abierto* A *de un espacio* (X, τ)*,* $Cl(A)$ *es regular cerrado.*

Demostración. Sea A un subconjunto semi-abierto de un espacio (X, τ). Por el teorema 1.1.2, se tiene que $Cl(A) = Cl(Int(A)) \subset Cl(Int(Cl(A)))$. Por otro lado, $Cl(Int(Cl(A))) \subset Cl(Cl(A)) = Cl(A)$ y, as´ı, $Cl(Int(Cl(A))) \subset Cl(A)$. Por lo tanto, $Cl(A)$ es un conjunto regular cerrado. □

Corolario 1.1.2. *Para cada subconjunto* A *de un espacio* (X, τ)*,* $Cl(Int(A))$ *es regular cerrado.*

Demostración. Sea A un subconjunto de (X, τ). Entonces $Int(A)$ es un conjunto semi-abierto y, por la proposición 1.1.8, se concluye que $Cl(Int(A))$ es regular cerrado.

□

Proposición 1.1.9. *Para cada subconjunto semi-abierto* A *de un espacio* (X, τ)*,* $Cl(sCl(A))$ *es regular cerrado.*

Demostración. Sea A un subconjunto semi-abierto de un espacio (X, τ) y $B = Cl(sCl(A))$. Entonces se demostrará que $B = Cl(Int(B))$. En efecto, aplicando el teorema 1.1.2, se obtiene que

$$\begin{aligned}\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(B)) &\subset \mathrm{Cl}(B) = B = \mathrm{Cl}(\mathrm{sCl}(A)) \subset \mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}(A)) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(A)))\\ &\subset \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(\mathrm{sCl}(A))) \subset \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\mathrm{sCl}(A)))) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(B)).\end{aligned}$$

Así, $B = \mathrm{Cl}(\mathrm{sCl}(A)) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(B))$ y, por lo tanto, $\mathrm{Cl}(\mathrm{sCl}(A))$ es un conjunto regular cerrado. □

Definición 1.1.7. *Un subconjunto A de un espacio (X, τ) se dice α-**abierto**, si $A \subset \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(A)))$.*

La colección de todos los conjuntos α-abiertos de un espacio (X, τ) es denotada por τ^{α}.

Proposición 1.1.10. *Cada conjunto abierto en un espacio (X, τ) es α-abierto; esto es, $\tau \subset \tau^{\alpha}$.*

Demostración. Suponga que A es un subconjunto abierto de un espacio (X, τ). Entonces $A = \mathrm{Int}(A)$ y $A \subset \mathrm{Cl}(A) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(A))$, por lo que $A = \mathrm{Int}(A) \subset \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(A)))$. Por lo tanto, A es α-abierto. □

En el siguiente ejemplo se muestra que el recíproco de la proposición 1.1.10, en general, no es cierto.

Ejemplo 1.1.10. *Considere el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, con la topología usual. Sea $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$. Entonces $\mathrm{Cl}(A) = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$ y $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A)) = \emptyset$, por lo que A es un subconjunto no cerrado nunca denso de $\mathbb{R}$ y, así, $\mathbb{R} - A$ no es un conjunto abierto. Por otra parte, $\mathbb{R} - A$ es un conjunto α-abierto, ya que $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(\mathbb{R} - A))) = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\mathbb{R} - \mathrm{Cl}A)) = \mathrm{Int}(\mathbb{R} - \emptyset) = \mathrm{Int}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ y de esta manera, $\mathbb{R} - A \subset \mathbb{R} = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(\mathbb{R} - A)))$.* □

Proposición 1.1.11. *Cada conjunto α-abierto es semi-abierto.*

Demostración. Suponga que A es un subconjunto α-abierto de un espacio (X, τ). Entonces $A \subset \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(A))) \subset \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(A))$ y, por lo tanto, A es semi-abierto. □

En el siguiente ejemplo se muestra que el recíproco de la proposición 1.1.11, en general, no es cierto.

Ejemplo 1.1.11. *Considere el conjunto de los números reales* $\mathbb{R}$ *con la topología usual. Sea* $A = [1, 2)$*. Entonces* A *es un conjunto semi-abierto que no es* α*-abierto, pues* $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(A))) = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}([1, 2)))) = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}((1, 2))) = \mathrm{Int}([1, 2]) = (1, 2)$ *y así,* $A = [1, 2)$ *no está contenido en* $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(A))) = (1, 2)$. □

Lema 1.1.5. *Si* U *es un subconjunto abierto no vac´ıo de un espacio* (X, τ) *tal que* $U \subset \mathrm{Cl}(A)$*, entonces* $U \cap A \quad \emptyset$*.*

Demostración. Suponga que $\emptyset \; /= \; U \in \tau$ y $U \subset \mathrm{Cl}(A)$. Entonces $U \cap \mathrm{Cl}(A) \; /= \emptyset$ Luego, existe $y \in U \cap \mathrm{Cl}(A)$, por lo que $y \in U$ y $y \in \mathrm{Cl}(A)$. Puesto que $y \in \mathrm{Cl}(A)$, se tiene que $W \cap A \; /= \varnothing$ para cada $W \in \tau$ tal que $y \in W$. En particular, como U
$\in \tau$
y $y \in U$, se tiene que $U \cap A \quad \emptyset$. □

Teorema 1.1.11. *Sea* A *un subconjunto de un espacio* (X, τ)*. Entonces* $A \in \tau^{\alpha}$ *si y solo si* $A \cap B \in \mathrm{SO}(X, \tau)$ *para cada* $B \in \mathrm{SO}(X, \tau)$*.*

Demostración. Suponga que $A \in \tau^{\alpha}$ y $B \in \mathrm{SO}(X, \tau)$. Si $A \cap B = \emptyset$, entonces es obvio que $A \cap B \in \mathrm{SO}(X, \tau)$. Asuma que existe $x \in A \cap B$ y sea V un conjunto abierto que contiene a x. Dado que, $x \in A \subset \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(A)))$, se tiene que $V \cap \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(A)))$ es un conjunto abierto que contiene a x y, como $x \in B \subset \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(B))$, se concluye que $V \cap \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(A))) \cap \mathrm{Int}(B) \; /= \emptyset$. Observe que $\mathrm{Int}(A) \subset \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(A)))$, por lo cual $V \cap \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(A))) \cap \mathrm{Int}(B) \cap \mathrm{Int}(A) = V \cap \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B)$. Puesto que $V \cap \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(A))) \cap \mathrm{Int}(B) \subset \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(A))$ y $V \cap \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(A))) \cap \mathrm{Int}(B)$ es un conjunto abierto y no vac´ıo; as´ı, por el lema 1.1.5, se obtiene que $V \cap \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(A))) \cap \mathrm{Int}(B) \cap \mathrm{Int}(A) \; /= \emptyset$ y, por lo tanto, $V \cap \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B) \; /= \emptyset$. De esta manera, $V \cap \mathrm{Int}(A \cap B) \quad \varnothing$ y, en consecuencia, $x \in \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(A \cap B))$. Esto demuestra que $A \cap B \subset \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(A \cap B))$ y, así, $A \cap B \in \mathrm{SO}(X, \tau)$. En forma recíproca, sea $A \subset X$ tal que $A \cap B \in \mathrm{SO}(X, \tau)$ para cada $B \in \mathrm{SO}(X, \tau)$. Observe que $A \in \mathrm{SO}(X, \tau)$, pues $A = A \cap X$ y $X \in \mathrm{SO}(X, \tau)$. Para lograr la prueba, se procederá por reducción al absurdo. Suponga que $x \in A \cap (X - \text{Int}(\text{Cl}(\text{Int}(A))))$. Como $X - \text{Int}(\text{Cl}(\text{Int}(A))) = \text{Cl}(X - \text{Cl}(\text{Int}(A)))$. Entonces $x \in \text{Cl}(V)$, donde $V = X - \text{Cl}(\text{Int}(A))$. Dado que $x \in \text{Cl}(V)$, se tiene que $\text{Cl}(\{x\}) \subset \text{Cl}(V)$ y $V \subset \{x\} \cup V \subset \text{Cl}(\{x\} \cup V) = \text{Cl}(\{x\}) \cup \text{Cl}(V) = \text{Cl}(V)$ y, puesto que $V \in \tau$, se tiene que $\{x\} \cup V \in SO(X, \tau)$. Por hipótesis, se obtiene que $A \cap (\{x\} \cup V) \in SO(X, \tau)$ y, como $A \in SO(X, \tau)$, se deduce que $A \subset \text{Cl}(\text{Int}(A))$ y $V = X - \text{Cl}(\text{Int}(A)) \subset X - A$. Así, $A \cap V \subset A \cap (X - A) = \emptyset$, por lo que $A \cap V = \emptyset$ y $A \cap (\{x\} \cup V) = (A \cap \{x\}) \cup (A \cap V) = \{x\} \cup \emptyset = \{x\}$, lo cual implica que $\{x\} \in SO(X, \tau)$ y el único subconjunto no vacío de $\{x\}$ es $\{x\}$ mismo; por lo tanto, $\{x\} \in \tau$. Ahora, como $x \in A \subset \text{Cl}(\text{Int}(A))$, se tiene que $x \in \text{Cl}(\text{Int}(A))$ y $\{x\} = \text{Int}(\{x\}) \subset \text{Int}(\text{Cl}(\text{Int}(A)))$, lo cual contradice el hecho que $x \notin \text{Int}(\text{Cl}(\text{Int}(A)))$. Así, $x \in A$ implica que $x \in \text{Int}(\text{Cl}((A)))$, lo cual demuestra que $A \in \tau^\alpha$. □

Teorema 1.1.12. *Sea (X, τ) un espacio. La colección τ^α es una topología sobre X.*

Demostración. Se verificarán las tres condiciones para que la colección τ^α sea una topología sobre X:

(1) Dado que $\emptyset$ y X pertenecen a τ y $\tau \subset \tau^\alpha$, se tiene que $\emptyset$ y X pertenecen a τ^α.

(2) Sea $\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subset \tau^\alpha$. Se demostrará que $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \tau^\alpha$. Por el teorema 1.1.11 $A_\lambda \cap B \in SO(X, \tau)$ para cada $B \in SO(X, \tau)$ y cada $\lambda \in \Lambda$. Luego, por el teorema 1.1.4, se tiene que $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} (A_\lambda \cap B) \in SO(X, \tau)$ para cada $B \in SO(X, \tau)$. Por lo tanto, $\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) \cap B \in SO(X, \tau)$ para cada $B \in SO(X, \tau)$ y nuevamente, por el teorema 1.1.11, se concluye que $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \tau^\alpha$.

(3) Sean $A, B \in \tau^\alpha$. Entonces por el teorema 1.1.11, $B \cap C \in SO(X, \tau)$ para cada $C \in SO(X, \tau)$ y también $A \cap (B \cap C) \in SO(X, \tau)$ para cada $C \in SO(X, \tau)$. De esta manera, $(A \cap B) \cap C \in SO(X, \tau)$ para cada $C \in SO(X, \tau)$ y nuevamente, por el teorema 1.1.11, se obtiene que $A \cap B \in \tau^\alpha$. □

Observación 1.1.5. *De acuerdo con el lema 1.1.2, las proposiciones 1.1.10 y 1.1.11* *y el teorema 1.1.12, se tiene que si τ es una topología sobre X, entonces τ_s y τ^α también son topologías sobre X tales que $\tau_s \subset \tau \subset \tau^\alpha \subset \mathrm{SO}(X, \tau)$.*

Lema 1.1.6. *Sea A un subconjunto de un espacio (X, τ) y $U \in \tau$. Entonces $U \cap \mathrm{Cl}(A) = \emptyset$ si y solo si $U \cap A = \emptyset$. Equivalentemente, $U \cap \mathrm{Cl}(A) \neq \emptyset$ si y solo si $U \cap A \neq \emptyset$.*

Demostración. Suponga que $U \cap \mathrm{Cl}(A) \neq \emptyset$. Entonces existe un punto $x \in U \cap \mathrm{Cl}(A)$, por lo que $x \in U$, $x \in \mathrm{Cl}(A)$ y $U \in \tau$. Por lo tanto, $U \cap A \quad \emptyset$. En forma recíproca, suponga que $U \cap \mathrm{Cl}(A) = \emptyset$. Entonces $U \cap A \subset U \cap \mathrm{Cl}(A) = \emptyset$ y así $U \cap A = \emptyset$. $\square$

En lo que sigue denotaremos por Int^α y Cl^α al interior y a la clausura en la topología τ^α, respectivamente.

Teorema 1.1.13. $\mathrm{SO}(X, \tau) = \mathrm{SO}(X, \tau^\alpha)$.

Demostración. Suponga que $B \in \mathrm{SO}(X, \tau)$ y sea $x \in B$. Dado cualquier conjunto $U \in \tau^\alpha$ tal que $x \in U$, se tiene que $x \in U \subset \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(U)))$, por lo que $x \in \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(U)))$ y $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(U))) \in \tau$. Puesto que $x \in B \subset \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(B))$, se sigue $\mathrm{Int}(B) \cap \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(U))) \neq \emptyset$; luego, $\emptyset \quad \mathrm{Int}(B) \cap \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(U))) \subset \mathrm{Int}(B) \cap \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(U))$ y, así, $\mathrm{Int}(B) \cap \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(U)) \neq \emptyset$. Como $\mathrm{Int}(B) \in \tau$, por el lema 1.1.6, se obtiene que $\mathrm{Int}(B) \cap \mathrm{Int}(U) \neq \emptyset$ y, como $\tau \subset \tau^\alpha$, se deduce que $\mathrm{Int}(B) \subset \mathrm{Int}^\alpha(B)$ y $\mathrm{Int}(U) \subset \mathrm{Int}^\alpha(U) = U$. Así, $\emptyset \neq \mathrm{Int}(B) \cap \mathrm{Int}(U) \subset \mathrm{Int}^\alpha(B) \cap U$, por lo que $\mathrm{Int}^\alpha(B) \cap U \neq \emptyset$ y por lo tanto, $x \in \mathrm{Cl}^\alpha(\mathrm{Int}^\alpha(B))$. Esto demuestra que $B \subset \mathrm{Cl}^\alpha(\mathrm{Int}^\alpha(B))$ y $B \in \mathrm{SO}(X, \tau^\alpha)$. En forma recíproca, suponga que $B \in \mathrm{SO}(X, \tau^\alpha)$ y $x \in B$. Sea $V \in \tau$ tal que $x \in V$. Puesto que $V \in \tau \subset \tau^\alpha$ y $x \in B \subset \mathrm{Cl}^\alpha(\mathrm{Int}^\alpha(B))$, se sigue que $V \cap \mathrm{Int}^\alpha(B) \neq \emptyset$. Sea $U = V \cap \mathrm{Int}^\alpha(B)$ y observe que $U \in \tau^\alpha$, por lo que necesariamente $\mathrm{Int}(U) \quad \emptyset$ y $\mathrm{Int}(U) \in \tau$. Además, como $\mathrm{Int}(U) \subset U = V \cap \mathrm{Int}^\alpha(B)$, se tiene que $\mathrm{Int}(U) \subset V$ y $\mathrm{Int}(U) \subset \mathrm{Int}^\alpha(B) \subset B$. Así, $\emptyset \neq \mathrm{Int}(U) \subset V \cap B$ y por lo tanto, $\emptyset \neq \mathrm{Int}(U) \subset \mathrm{Int}(V \cap B) = \mathrm{Int}(V) \cap \mathrm{Int}(B) = V \cap \mathrm{Int}(B)$, lo cual implica que $V \cap \mathrm{Int}(B) \neq \emptyset$ y, en consecuencia, $x \in \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(B))$. Esto demuestra que $B \subset \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(B))$ y $B \in \mathrm{SO}(X, \tau)$. $\square$

En el siguiente teorema se denoterá por Int^s y Cl^s al interior y a la clausura en la topología τ_s, respectivamente.

Teorema 1.1.14. *Sea* (X, τ) *un espacio. Si* $A \in \mathrm{SO}(X, \tau)$, *entonces* $\mathrm{Cl}^\alpha(A) = \mathrm{Cl}(A) = \mathrm{Cl}^s(A)$.

Demostración. Puesto que $\tau_s \subset \tau \subset \tau^\alpha$, se tiene que $\mathrm{Cl}^\alpha(A) \subset \mathrm{Cl}(A) \subset \mathrm{Cl}^s(A)$ para cada subconjunto A de X. Para demostrar las inclusiones opuestas, basta con demostrar que $\mathrm{Cl}^s(A) \subset \mathrm{Cl}^\alpha(A)$ para $A \in \mathrm{SO}(X, \tau)$. Sea $x \notin \mathrm{Cl}^\alpha(A)$. Entonces existe $U \in \tau^\alpha$ tal que $x \in U$ y $U \cap A = \emptyset$. Puesto que $\mathrm{Int}(U) \cap \mathrm{Int}(A) \subset U \cap A = \emptyset$, se tiene que $\mathrm{Int}(U) \cap \mathrm{Int}(A) = \emptyset$ y, por el lema 1.1.6, se sigue que $\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(U)) \cap \mathrm{Int}(A) = \emptyset$. Consecuentemente, $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(U))) \cap \mathrm{Int}(A) = \emptyset$ y nuevamente por el lema 1.1.6, $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(U))) \cap \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(A)) = \emptyset$. Como $A \in \mathrm{SO}(X, \tau)$, se tiene que $A \subset \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(A))$ y, por lo tanto, $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(U))) \cap A = \emptyset$. Como $U \in \tau^\alpha$, $x \in \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(U)))$. Puesto que $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(U))) \in \tau_s$, se concluye que $x \notin \mathrm{Cl}^s(A)$, lo cual finaliza la prueba. □

Corolario 1.1.3. *Sea* (X, τ) *un espacio. Entonces:*

(1) $\mathrm{RC}(X, \tau) = \mathrm{RC}(X, \tau^\alpha)$.

(2) $\mathrm{RO}(X, \tau) = \mathrm{RO}(X, \tau^\alpha)$.

(3) $\tau_s = (\tau^\alpha)_s$.

Demostración. (1) Por la proposición 1.1.6 y los teoremas 1.1.13 y 1.1.14, se tiene que:

$$\begin{aligned} A \in \mathrm{RC}(X, \tau) &\iff A \in \mathrm{SO}(X, \tau) \text{ y } \mathrm{Cl}(A) = A \\ &\iff A \in \mathrm{SO}(X, \tau^\alpha) \text{ y } \mathrm{Cl}^\alpha(A) = A \\ &\iff A \in \mathrm{RC}(X, \tau^\alpha). \end{aligned}$$

(2) Sigue del inciso (1) considerando complementos.

(3) Es consecuencia inmediata del inciso (2). □

Teorema 1.1.15. *Sea* (X, τ) *un espacio. Entonces* $\mathrm{SO}(X, \tau)$ *es una topolog´ıa sobre* X *si y solo si* $\mathrm{SO}(X, \tau) = \tau^{\alpha}$*.*

Demostración. Por la proposicion 1.1.11, se tiene que $\tau^{\alpha} \subset \mathrm{SO}(X, \tau)$. Suponga que $\mathrm{SO}(X, \tau)$ es una topología sobre X y sea $A \in \mathrm{SO}(X, \tau)$. Entonces $A \cap B \in \mathrm{SO}(X, \tau)$ para cada $B \in \mathrm{SO}(X, \tau)$. Por el teorema 1.1.11, se concluye que $A \in \tau^{\alpha}$ y, as´ı, $\mathrm{SO}(X, \tau) \subset \tau^{\alpha}$. En forma recíproca, suponga que $\mathrm{SO}(X, \tau) = \tau^{\alpha}$. Por el teorema 1.1.12, se tiene que τ^{α} es una topología sobre X y, por lo tanto, $\mathrm{SO}(X, \tau)$ es una topología sobre X. □

Definición 1.1.8. *Un subconjunto* A *de un espacio* (X, τ) *se dice* ***pre-abierto****, si* $A \subset \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A))$*. El complemento de un conjunto pre-abierto se denomina conjunto* ***pre-cerrado****.*

La colección de todos los conjuntos pre-abiertos de un espacio (X, τ) se denota por $\mathrm{PO}(X, \tau)$.

Proposición 1.1.12. *Cada subconjunto* α*-abierto de un espacio* (X, τ) *es pre-abierto; esto es,* $\tau^{\alpha} \subset \mathrm{PO}(X, \tau)$*.*

Demostración. Suponga que A es un subconjunto α-abierto de un espacio (X, τ). Entonces $A \subset \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(A))) \subset \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A))$ y por lo tanto, A es un conjunto pre-abierto. □

En los siguientes dos ejemplos se muestra que, en general, las nociones de conjunto semi-abierto y conjunto pre-abierto son independientes.

Ejemplo 1.1.12. *Considere el conjunto de los números reales* $\mathbb{R}$ *con la topología usual. El conjunto de los números racionales* $\mathbb{Q}$ *es un conjunto pre-abierto, pues* $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} = \mathrm{Int}(\mathbb{R}) = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\mathbb{Q}))$*, pero* $\mathbb{Q}$ *no es semi-abierto, ya que* $\mathbb{Q} \not\subset \emptyset = \mathrm{Cl}(\emptyset) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(\mathbb{Q}))$*.* □

Ejemplo 1.1.13. *Sea* $\mathbb{R}$ *el conjunto de los números reales con la topología usual. El conjunto* $[1, 2)$ *es semi-abierto, pero no es pre-abierto, pues* $[1, 2) \not\subset (1, 2) = \mathrm{Int}([1, 2]) = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}([1, 2)))$*.* □

Teorema 1.1.16. *Un subconjunto A de un espacio (X,τ) es pre-abierto si y solo si* $\mathrm{sCl}(A) = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A))$.

Demostración. Suponga que $A \in PO(X,\tau)$. Usando el hecho que $\mathrm{sCl}(A)$ es un conjunto semi-cerrado, se tiene que $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A)) \subset \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\mathrm{sCl}(A))) \subset \mathrm{sCl}(A)$. Para demostrar la inclusión $\mathrm{sCl}(A) \subset \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A))$, suponga que $x \notin \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A))$. Entonces $x \in X - \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A)) = \mathrm{Cl}(X - \mathrm{Cl}(A)) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(X - A))$ y, por la proposición 1.1.5, se tiene que $\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(X - A))$ es un conjunto semi-abierto que contiene a x. Como $A \in PO(X,\tau)$, $A \subset \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A))$ y así, $A \cap \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(X - A)) = A \cap [X - \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A))] \subset \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A)) \cap [X - \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A))] = \emptyset$, por lo que $A \cap \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(X - A)) = \emptyset$, $x \in \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(X - A))$ y $\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(X - A)) \in SO(X,\tau)$. Por lo tanto, $x \notin \mathrm{sCl}(A)$ y, en consecuencia, $\mathrm{sCl}(A) \subset \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A))$. En forma recíproca, si $\mathrm{sCl}(A) = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A))$, entonces $A \subset \mathrm{sCl}(A) = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A))$ y, por lo tanto, $A \in PO(X,\tau)$. □

Corolario 1.1.4. *Si A es un subconjunto abierto de un espacio (X,τ), entonces* $\mathrm{sCl}(A) = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A))$.

Demostración. Suponga que A es un conjunto abierto en un espacio (X,τ). Entonces $A \in \tau \subset \tau^{\alpha} \subset PO(X,\tau)$ y por el teorema 1.1.16, concluimos que $\mathrm{sCl}(A) = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A))$. □

De manera natural no es posible definir un tipo de clausura que involucre a la colección de los conjuntos regular cerrados, ya que éstos no son estables bajo intersecciones arbitrarias. Debido a esto, en 1968, Veličko [27] introdujo la noción de δ-clausura con el propósito de estudiar los espacios H-cerrados en términos de filtros arbitrarios.

Definición 1.1.9. *La **δ-clausura** de un subconjunto A de un espacio (X,τ), denotada por $\mathrm{Cl}_{\delta}(A)$, se define como el conjunto de todos los puntos $x \in X$ tales que $A \cap \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(U)) \neq \emptyset$ para cada conjunto abierto U que contiene a x.*

Definición 1.1.10. *Un subconjunto A de un espacio (X,τ) se dice:*

*(1) δ-**cerrado,** si $A = \mathrm{Cl}_\delta(A)$.*

*(2) δ-**abierto**, si $X - A$ es δ-cerrado.*

La familia de todos los conjuntos δ-abiertos en un espacio (X, τ) se denota por τ_δ.

Proposición 1.1.13. *Para cada conjunto A de un espacio (X, τ), se satisface que $A \subset \mathrm{Cl}(A) \subset \mathrm{Cl}_\delta(A)$.*

Demostración. Se demostrará que $\mathrm{Cl}(A) \subset \mathrm{Cl}_\delta(A)$. Suponga que $x \in \mathrm{Cl}(A)$ y sea U un conjunto abierto que contiene a x. Entonces $A \cap U \neq \emptyset$. Puesto que $A \cap U = A \cap \mathrm{Int}(U) \subset A \cap \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(U))$, se tiene que $A \cap \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(U)) \neq \emptyset$. Así, $x \in \mathrm{Cl}_\delta(A)$ y por lo tanto, $\mathrm{Cl}(A) \subset \mathrm{Cl}_\delta(A)$. Dado que siempre $A \subset \mathrm{Cl}(A)$, se concluye que $A \subset \mathrm{Cl}(A) \subset \mathrm{Cl}_\delta(A)$. □

Corolario 1.1.5. *Cada conjunto δ-cerrado es cerrado y por lo tanto, cada conjunto δ-abierto es abierto.*

Demostración. Si A es un conjunto δ-cerrado, entonces $A \subset \mathrm{Cl}(A) \subset \mathrm{Cl}_\delta(A) = A$, por lo que $A = \mathrm{Cl}(A)$ y A es cerrado. Aplicando complementos, se obtiene que cada conjunto δ-abierto es abierto. □

Definición 1.1.11. *Un subconjunto A de un espacio (X, τ) se dice:*

*(1) **clopen**, si A es un conjunto abierto y cerrado.*

*(2) δ-**clopen**, si A es un conjunto δ-cerrado y δ-abierto.*

*(3) g-**cerrado**, si $\mathrm{Cl}(A) \subset U$ siempre que $A \subset U$ y $U \in \tau$.*

*(4) sg-**cerrado,** si $\mathrm{sCl}(A) \subset U$ siempre que $A \subset U$ y $U \in \mathrm{SO}(X, \tau)$.*

*(5) ϑs-**abierto**, si para cada $x \in A$ existe $U \in \tau$ tal que $x \in U \subset \mathrm{sCl}(U) \subset A$.*

*(6) ϑs-**cerrado**, si $X - A$ es ϑs-abierto.*

*(7) δg-**cerrado**, si* $\mathrm{Cl}_\delta(A) \subset U$ *siempre que* $A \subset U$ *y* $U \in \tau$.

Proposición 1.1.14. *Sea* (X, τ) *un espacio. Entonces:*

(1) Cada conjunto ϑs*-abierto es abierto.*

(2) Cada conjunto ϑs*-cerrado es cerrado.*

(3) Cada conjunto cerrado es g-cerrado.

(4) Cada conjunto δ*-cerrado es* δg*-cerrado.*

(5) Un conjunto es clopen si y solo si es regular abierto y regular cerrado.

Demostración. (1) Sigue inmediatamente de la definición de conjunto ϑs-abierto.
(2) Sigue del inciso (1) aplicando complementos.
(3) Suponga que A un conjunto cerrado y sea U un conjunto abierto tal que $A \subset U$. Entonces $\mathrm{Cl}(A) = A \subset U$ y así, A es un conjunto g-cerrado.
(4) Suponga que A es un conjunto δ-cerrado y sea U un conjunto abierto tal que $A \subset U$. Entonces $\mathrm{Cl}_\delta(A) = A \subset U$ y por lo tanto, A es un conjunto δg-cerrado.
(5) Suponga que A un conjunto clopen. Entonces $\mathrm{Cl}(A) = A = \mathrm{Int}(A)$ y por lo tanto, $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A)) = \mathrm{Int}(A) = A = \mathrm{Cl}(A) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(A))$. De esta manera, A es un conjunto regular abierto y regular cerrado. El recíproco sigue de las observaciones 1.1 y 1.1.2. □

Proposición 1.1.15. *Cada conjunto clopen es* δ*-cerrado.*

Demostración. Se demostrará que $\mathrm{Cl}_\delta(A) \subset \mathrm{Cl}(A)$. Sea $x \in \mathrm{Cl}_\delta(A)$ y suponga que U es un conjunto abierto tal que $x \in U$. Entonces $A \cap \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(U)) \neq \emptyset$ y como A es clopen, se tiene que $\emptyset = A \cap \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(U)) = \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(U)) = \mathrm{Int}(A \cap \mathrm{Cl}(U)) \subset A \cap \mathrm{Cl}(U)$, por lo que $A \cap \mathrm{Cl}(U) \neq \emptyset$. Puesto que A es abierto, por el lema 1.1.6, se tiene que $A \cap U \neq \emptyset$. Luego, por definición de clausura, $x \in \mathrm{Cl}(A)$. Por lo tanto, $\mathrm{Cl}_\delta(A) \subset \mathrm{Cl}(A)$ y como $\mathrm{Cl}(A) \subset \mathrm{Cl}_\delta(A)$, se concluye que $A = \mathrm{Cl}(A) = \mathrm{Cl}_\delta(A)$ y así, A es un conjunto δ-cerrado. □

1.2. Propiedades de separación

Recuerde que un espacio (X, τ) es *regular*, si para cada conjunto cerrado F y cada punto $x \notin F$, existen conjuntos abiertos disjuntos U y V tales que $x \in U$ y $F \subset V$. También, (X, τ) es regular si y solo si para cada punto $x \in X$ y cada conjunto abierto U que contiene a x, existe un conjunto abierto V tal que $x \in V \subset \mathrm{Cl}(V) \subset U$ (véase [28]). Utilizando los conjuntos regular cerrados, Singal y Arya [19] introdujeron un nuevo axioma de separación débil (denominado almost regularidad) que generaliza el concepto de espacio regular. En esta sección, se mostrarán algunos resultados que involucran a este axioma de separación y su relación con la noción de regularidad.

Definición 1.2.1. *Un espacio (X, τ) se dice **almost regular**, si para cada conjunto regular cerrado E y cualquier punto $x \notin E$, existen conjuntos abiertos disjuntos U y V tales que $E \subset U$ y $x \in V$.*

Teorema 1.2.1. *En un espacio (X, τ), los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) (X, τ) *es almost regular.*

(2) Para cada punto $x \in X$ y cada conjunto regular abierto V que contiene a x, existe un conjunto regular abierto G tal que $x \in G \subset \mathrm{Cl}(G) \subset V$.

(3) Para cada punto $x \in X$ y cada conjunto abierto W que contiene a x, existe un conjunto regular abierto V tal que $x \in V \subset \mathrm{Cl}(V) \subset \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(W))$.

Demostración. (1)⇒(2): Sean $x \in X$ y V un conjunto regular abierto tal que $x \in V$. Entonces $F = X - V$ es un conjunto regular cerrado tal que $x \notin F$ y como (X, τ) es almost regular, existen conjuntos abiertos disjuntos U y W tales que $x \in U$ y $F \subset W$. Por el lema 1.1.6, se tiene que $\mathrm{Cl}(U) \cap W = \emptyset$ y, así, $\mathrm{Cl}(U) \subset (X - W) \subset (X - F) = V$, por lo que $x \in U \subset \mathrm{Cl}(U) \subset V$. Dado que U es abierto, se sigue que $U \subset \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(U)) \subset \mathrm{Cl}(U)$, por lo que $\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(U))) = \mathrm{Cl}(U) \subset V$. Por lo tnto, $G = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(U))$ es un conjunto regular abierto tal que $x \in G \subset \mathrm{Cl}(G) \subset V$.

(2)⇒(3): Sean $x \in X$ y W un conjunto abierto tal que $x \in W$. Por la proposición

1.1.1, $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(W))$ es un conjunto regular abierto que contiene a x y, por el inciso (2), existe un conjunto regular abierto V tal que $x \in V \subset \mathrm{Cl}(V) \subset \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(W))$.

(3)⇒(1): Sean $x \in X$ y F un conjunto regular cerrado tal que $x \notin F$. Entonces $X - F$ es un conjunto regular abierto que contiene a x. Puesto que todo conjunto regular abierto es abierto, por el inciso (3), existe un conjunto regular abierto V tal que $x \in V \subset \mathrm{Cl}(V) \subset \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(X - F)) = X - F$. Por lo tanto, V y $X - \mathrm{Cl}(V)$ son conjuntos abiertos disjuntos tales que $x \in V$ y $F \subset X - \mathrm{Cl}(V)$. Esto demuestra que (X, τ) es un espacio almost regular. □

Lema 1.2.1. *Si un espacio (X, τ) es almost regular y semiregular, entonces es regular.*

Demostración. Suponga que (X, τ) es un espacio almost regular y semiregular. Sean $x \in X$ y W un conjunto abierto tal que $x \in W$. Puesto que (X, τ) es un espacio semiregular, existe un conjunto abierto U tal que $x \in U \subset \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(U)) \subset W$. Como (X, τ) es un espacio almost regular, por el teorema 1.2.1, existe un conjunto regular abierto V tal que $x \in V \subset \mathrm{Cl}(V) \subset \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(U))$ y as´ı, $x \in V \subset \mathrm{Cl}(V) \subset W$. Por lo tanto, (X, τ) es un espacio regular. □

A comtinuación, se muestran algunos resultados importantes que involucran un tipo de espacios, denominados espacios extremadamente disconexos.

Definición 1.2.2. *Un espacio (X, τ) se dice **extremadamente disconexo**, si $\mathrm{Cl}(U) \in \tau$ para cada $U \in \tau$.*

Ejemplo 1.2.1. *Considere el conjunto $X = \{a, b, c, d, e\}$ con la topolog´ıa $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, c\}, \{a, b, d\}, \{a, b, c, d\}\}$. La colección de los conjuntos cerrados es $\{\emptyset, X, \{b, c, d, e\}, \{b, d, e\}, \{c, e\}, \{e\}\}$. Por otra parte, se tiene que $\mathrm{Cl}(\{a\}) = X$, $\mathrm{Cl}(\{a, c\}) = X$, $\mathrm{Cl}(\{a, b, d\}) = X$, $\mathrm{Cl}(\{a, b, c, d\}) = X$, $\mathrm{Cl}(X) = X$, $\mathrm{Cl}(\emptyset) = \emptyset$. Así, la clausura de cada conjunto abierto es un conjunto abierto y por lo tanto, (X, τ) es un espacio extremadamente disconexo.* □

Teorema 1.2.2. *Sea* (X, τ) *un espacio extremadamente disconexo. Para cada par de conjuntos abiertos* A *y* B*,* $A \cap B = \emptyset$ *si y solo si* $\mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(B) = \emptyset$*.*

Demostración. Suponga que $A \cap B = \emptyset$ para cada par de conjuntos abiertos A y B. Entonces por el lema 1.1.6, se tiene que $\mathrm{Cl}(A) \cap B = \emptyset$ y como (X, τ) es extremadamente disconexo, $\mathrm{Cl}(A)$ también es un conjunto abierto. Aplicando nuevamente el lema 1.1.6, se obtiene que $\mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(B) = \emptyset$. En forma recíproca, suponga que $\mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(B) = \emptyset$. Entonces $A \cap B \subset \mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(B) = \emptyset$, por lo cual $A \cap B = \emptyset$. $\square$

Corolario 1.2.1. *Suponga que* (X, τ) *es un espacio extremadamente disconexo,* V *es un subconjunto de* X *y existe un conjunto abierto* A *tal que* $A \subset V \subset \mathrm{Cl}(A)$*. Entonces* $V \cap \mathrm{Cl}(H) \neq \emptyset$ *para cada conjunto abierto* H *si y solo si* $\mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(H) \neq \emptyset$*.*

Demostración. Suponga que $V \cap \mathrm{Cl}(H) \neq \emptyset$ para cada conjunto abierto H. Entonces $\emptyset = V \cap \mathrm{Cl}(H) \subset \mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(H)$, por lo que $\mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(H) \neq \emptyset$. En forma recíproca, suponga que $\mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(H) \neq \emptyset$ para cada conjunto abierto H. Por el teorema 1.2.2, se tiene que $\emptyset = V \cap H \subset V \cap \mathrm{Cl}(H)$ y, por lo tanto, $V \cap \mathrm{Cl}(H) \neq \emptyset$. $\square$

Lema 1.2.2. *Si* (X, τ) *es un espacio extremadamente disconexo, entonces* $\mathrm{Cl}(U) = \mathrm{sCl}(U)$ *para cada* $U \in \mathrm{SO}(X, \tau)$*.*

Demostración. Del teorema 1.1.5, se tiene que $\mathrm{Cl}(U) \subset \mathrm{sCl}(U)$ para cada subconjunto U de X. Sea $U \in \mathrm{SO}(X, \tau)$. Entonces se demostrará que $\mathrm{sCl}(U) \subset \mathrm{Cl}(U)$. Si $x \notin \mathrm{sCl}(U)$, entonces existe $V \in \mathrm{SO}(X, \tau)$ tal que $x \in V$ y $V \cap U = \emptyset$, por lo que $\mathrm{Int}(V) \cap \mathrm{Int}(U) = \emptyset$. Por el teorema 1.2.2, se tiene que $\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(V)) \cap \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(U)) = \emptyset$ y como $U \in \mathrm{SO}(X, \tau)$, se sigue que $\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(U)) = \mathrm{Cl}(U)$. Puesto que $x \in V \subset \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(V))$, entonces $x \notin \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(U)) = \mathrm{Cl}(U)$ y, por lo tanto, $\mathrm{sCl}(U) \subset \mathrm{Cl}(U)$. $\square$

Teorema 1.2.3. *Un espacio* (X, τ) *es extremadamente disconexo si y solo si* $\mathrm{SO}(X, \tau)$ *es una topología sobre* X*.*

Demostración. Sea (X, τ) un espacio extremadamente disconexo y suponga que $\mathrm{SO}(X, \tau)$ no es una topología sobre X. En virtud del teorema 1.1.15, existe $B \in$

$SO(X, \tau)$ tal que $B \not\subseteq \tau^\alpha$. Siendo (X, τ) extremadamente disconexo, $\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(B)) \in \tau$ y así, $B \subset \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(B)) = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(B)))$, por lo que $B \in \tau^\alpha$, contradiciendo el hecho que $B \not\subseteq \tau^\alpha$. Por lo tanto, $SO(X, \tau)$ es una topología sobre X. En forma recíproca, suponga que $SO(X, \tau)$ es una topología sobre X y (X, τ) no es extremadamente disconexo. Entonces existe $A \in \tau$ tal que $\mathrm{Cl}(A) \not\subseteq \tau$. Sea $x \in \mathrm{Cl}(A) - \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A))$. Considere $B = \{x\} \cup \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A))$ y $C = \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(X - A))$. Observe que $\{x\} \subset \mathrm{Cl}(A) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(A)) \subset \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A)))$. Luego, $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A)) \subset \{x\} \cup \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A)) \subset \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A)))$; es decir, $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A)) \subset B \subset \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A)))$, por lo que $B \in SO(X, \tau)$. Ahora, por el corolario 1.1.2, C es regular cerrado y por lo tanto, $C \in SO(X, \tau)$, luego como $SO(X, \tau)$ es una topología sobre X, se sigue que $B \cap C = (\{x\} \cup \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A))) \cap \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(X - A)) = (\{x\} \cup \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A))) \cap (X - \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A))) = \{x\}$ es un conjunto semi-abierto. Por lo tanto, $\mathrm{Int}(\{x\})$ $\emptyset$ y así $x \in \mathrm{Int}(\{x\})$. Puesto que $\{x\} \subset \mathrm{Cl}(A)$, entonces $x \in \mathrm{Int}(\{x\}) \subset \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A))$, contradiciendo el hecho que $x \notin \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A))$. En consecuencia, (X, τ) es un espacio extremadamente disconexo. □

Teorema 1.2.4. *Si (X, τ) es un espacio extremadamente disconexo, entonces $SO(X, \tau) \subset PO(X, \tau)$.*

Demostración. Sea $A \in SO(X, \tau)$. Entonces $A \subset \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(A))$ y, como (X, τ) es un espacio extremadamente disconexo, se tiene que $\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(A)) = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(A)))$. Por lo tanto, $A \subset \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(A))) \subset \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(A))$ y, así, $A \in PO(X, \tau)$. □

Recuerde que si S es una colección de subconjuntos de un conjunto dado X, entonces S es una subbase para una topología sobre X. En un espacio (X, τ), se denota por τ_{SO} a la topología sobre X que tiene a la colección $SO(X, \tau)$ de los conjuntos semi-abiertos como una subbase.

Corolario 1.2.2. *Si (X, τ) es un espacio extremadamente disconexo, entonces*

$$\tau^\alpha = SO(X, \tau) \cap PO(X, \tau) = SO(X, \tau) = \tau_{SO}.$$

Demostración. Suponga que (X, τ) es un espacio extremadamente disconexo. Por la proposición 1.1.11, $\tau^\alpha \subset SO(X, \tau)$ y, por la proposición 1.1.12, $\tau^\alpha \subset PO(X, \tau)$. Luego, $\tau^\alpha \subset SO(X,\tau) \cap PO(X,\tau)$. Ahora, por el teorema 1.2.4, se tiene que $SO(X,\tau) \subset PO(X,\tau)$ y, así, $\tau^\alpha \subset SO(X,\tau) \cap PO(X,\tau) = SO(X,\tau)$. Por otra parte, siendo (X,τ) extremadamente disconexo, el teorema 1.2.3, garantiza que $SO(X,\tau)$ es una topología sobre X y, por el teorema 1.1.15, se obtiene que $SO(X,\tau) = \tau^\alpha$. Por lo tanto, $\tau^\alpha = SO(X,\tau) \cap PO(X,\tau) = SO(X,\tau) = \tau_{SO}$. □

1.3. Colecciones especiales de conjuntos

Definición 1.3.1. *Sea (X,τ) un espacio. Una **colección** de subconjuntos de X se denomina **abierta** (resp. **cerrada, semi-abierta, semi-cerrada, regular abierta, regular cerrada**) si está formada por conjuntos abiertos (resp. cerrados, semi-abiertos, semi-cerrados, regular abiertos, regular cerrados).*

Definición 1.3.2. *Sea (X,τ) un espacio y A un subconjunto de X. Se dice que una colección $\{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ de subconjuntos de X cubre a A o es un **cubrimiento** de A, si $A \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$. Un **cubrimiento abierto** (resp. **semi-abierto, semi-cerrado, regular abierto, regular cerrado**) de A, es un cubrimiento que está formado por conjuntos abiertos (resp. semi-abiertos, semi-cerrados, regular abiertos, regular cerrados).*

Definición 1.3.3. *Sea $\mathcal{U}$ una colección de subconjuntos de un espacio (X,τ). Si $\mathcal{V}$ es una colección de subconjuntos de X y para cada $V \in \mathcal{V}$ existe un $U \in \mathcal{U}$ tal que $V \subset U$, se dice que $\mathcal{V}$ refina $\mathcal{U}$ o que $\mathcal{V}$ es un **refinamiento** de $\mathcal{U}$. Si los elementos de $\mathcal{V}$ son conjuntos abiertos (resp. semi-abiertos, semi-cerrados, regular abiertos, regular cerrados), se dice que $\mathcal{V}$ es un **refinamiento abierto** (resp. **semi-abierto, semi-cerrado, regular abierto, regular cerrado**) de $\mathcal{U}$.*

Definición 1.3.4. *Una colección $\mathcal{V}$ de subconjuntos de (X,τ) se dice:*

*(1) **localmente finita**, si para cada punto $x \in X$ existe un conjunto abierto U tal que $x \in U$ y U interseca a lo más un número finito de elementos de $\mathcal{V}$.*

(2) ***s-localmente finita***, *si para cada $x \in X$ existe un conjunto semi-abierto U tal que $x \in U$ y U interseca a lo más un número finito de elementos de $\mathcal{V}$.*

Observación 1.3.1. *Cada colección localmente finita es s-localmente finita. Esto sigue del hecho que cada conjunto abierto es semi-abierto.*

En el siguiente ejemplo se muestra que el recíproco de la observación , en general, no es cierto.

Ejemplo 1.3.1. *Considere el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ con la topología usual. Sea $\mathcal{U} = \{\{\frac{1}{n}\} : n \in \mathbb{N}\}$. Observe que $\mathcal{U}$ es una colección de subconjuntos de $\mathbb{R}$ que no es localmente finita, pues cada vecindad de 0 interseca un número infinito de elementos de $\mathcal{U}$. Para demostrar que la colección $\mathcal{U}$ es s-localmente finita, se analizan los siguientes casos:*

1. *Si $x > 1$, entonces $U = [x, x+1)$ es un conjunto semi-abierto que contiene a x y no interseca ningún elemento de $\mathcal{U}$.*

2. *Si $x \leq 0$, entonces $U = (x-1, x]$ es un conjunto semi-abierto que contiene a x y no interseca ningún elemento de $\mathcal{U}$.*

3. *Si $0 < x \leq 1$, se tiene que:*

   - *Para $x = 1$, $U = (\frac{1}{2}, 1]$ es un conjunto semi-abierto que contiene a x e interseca un solo elemento de $\mathcal{U}$.*
   - *$x = \frac{1}{n}$, $U = (\frac{1}{n+1}, x]$, es un conjunto semi-abierto que contiene a x e interseca un solo elemento de $\mathcal{U}$.*
   - *Para x $\frac{1}{n}$, con $n \in \mathbb{Z}_+$, el punto $y = \frac{1}{x}$ es tal que $y > 1$ y $y \notin \mathbb{Z}_+$. Por lo tanto, existe $m \in \mathbb{Z}^+$ tal que $m < y < m+1$, por lo que $\frac{1}{m+1} < x < \frac{1}{m}$. De esta manera, $U = (\frac{1}{m+1}, x]$ es un conjunto semi-abierto que contiene a x y no interseca algún elemento de $\mathcal{U}$.*

De los casos anteriores, se deduce que la colección $\mathcal{U}$ es s-localmente finita. □

Teorema 1.3.1. *Sea* $\mathcal{V} = \{V_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ *una colección localmente finita de subconjuntos de un espacio* (X, τ)*. Entonces:*

(1) Cualquier subcolección de $\mathcal{V}$ *es localmente finita.*

(2) La colección $\mathcal{W} = \{\mathrm{Cl}(V_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ *es localmente finita.*

(3) La colección $\mathcal{U} = \{\mathrm{sCl}(V_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ *es localmente finita.*

(4) $\mathrm{Cl}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda) = \bigcup_{\lambda\in\lambda} \mathrm{Cl}(V_\lambda)$.

Demostración. (1) Suponga que $\mathcal{A}$ es una subcolección de $\mathcal{V}$ y sea $x \in X$. Puesto que $\mathcal{V}$ es localmente finita, existe un conjunto abierto U_x tal que $x \in U_x$ y U_x interseca a lo más un número finito de elementos de $\mathcal{V}$. Como $\mathcal{A} \subset \mathcal{V}$, se concluye que U_x interseca a lo más un número finito de elementos de $\mathcal{A}$. Por lo tanto, $\mathcal{A}$ es localmente finita.

(2) Suponga que la colección $\mathcal{W} = \{\mathrm{Cl}(V_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ no es localmente finita. Para cada punto $x \in X$, cualquier conjunto abierto que contiene a x interseca a un número infinito de elementos de $\mathcal{W}$. Por el lema 1.1.5, se tiene que $U_x \cap \mathrm{Cl}(V_\lambda) \neq \emptyset$ si y solo si $U_x \cap V_\lambda \neq \emptyset$, por lo que cualquier conjunto abierto U_x que contiene a x, interseca a un número infinito de elementos de $\mathcal{V}$, contradiciendo el hecho que la colección $\mathcal{V}$ es localmente finita.

(3) Puesto que la colección $\mathcal{V} = \{V_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es localmente finita, para cada $x \in X$ existe un conjunto abierto U_x tal que $x \in U_x$ y U_x interseca a lo más un número finito de elementos de $\mathcal{V}$. Esto es, $U_x \cap V_\lambda = \emptyset$, excepto para un número finito de elementos $\lambda \in \Lambda$. Dado que

$$
\begin{aligned}
U_x \cap V_\lambda = \emptyset &\implies V_\lambda \subset X - U_x \\
&\implies \mathrm{sCl}(V_\lambda) \subset \mathrm{sCl}(X - U_x) \subset \mathrm{Cl}(X - U_x) = X - U_x \\
&\implies U_x \cap \mathrm{sCl}(V_\lambda) = \emptyset,
\end{aligned}
$$

se concluye que $U \cap \mathrm{sCl}(V_\lambda) = \emptyset$, excepto para este mismo número finito de $\lambda \in \Lambda$. Por lo tanto, la colección $\mathcal{U} = \{\mathrm{sCl}(V_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ es localmente finita.

(4) En general, $V_\lambda \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$ para cada $\lambda \in \Lambda$, por lo que $\mathrm{Cl}(V_\lambda) \subset \mathrm{Cl}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda)$ y consecuentemente, $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Cl}(V_\lambda) \subset \mathrm{Cl}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda)$. Utilizando la hipótesis de finitud local se probará que $\mathrm{Cl}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda) \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Cl}(V_\lambda)$. Sea $x \in \mathrm{Cl}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda)$. Entonces existe un conjunto abierto U tal que $x \in U$ y U interseca a un número finito de elementos de la colección $\mathcal{V}$, digamos $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, \ldots, V_{\lambda_k}$. Se afirma que $x \in \bigcup_{i=1}^{k} \mathrm{Cl}(V_{\lambda_i})$, pues en caso contrario, si $x \notin \bigcup_{i=1}^{k} \mathrm{Cl}(V_{\lambda_i})$, entonces $U - \bigcup_{i=1}^{k} \mathrm{Cl}(V_{\lambda_i})$ es un conjunto abierto que contiene a x y no interseca a ningún elemento de $\mathcal{V}$, por lo que $U - \bigcup_{i=1}^{k} \mathrm{Cl}(V_{\lambda_i})$ no interseca a $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$, lo cual contradice el hecho que $x \in \mathrm{Cl}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda\right)$. Por lo tanto, $x \in \bigcup_{\lambda\in\lambda} \mathrm{Cl}(V_\lambda)$ y en consecuencia, $\bigcup_{\lambda\in\lambda} \mathrm{Cl}(V_\lambda) = \mathrm{Cl}\left(\bigcup_{\lambda\in\lambda} V_\lambda\right)$. □

Para las colecciones s-localmente finitas también se tienen algunos resultados análogos a los del teorema 1.3.1.

Lema 1.3.1. *Sea $\mathcal{V} = \{V_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ una colección s-localmente finita de subconjuntos de un espacio (X, τ). Entonces:*

(1) Cualquier subcolección de $\mathcal{V}$ es s-localmente finita.

(2) La colección $\mathcal{U} = \{\mathrm{sCl}(V_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ es s-localmente finita.

(3) $\mathrm{sCl}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda) = \bigcup_{\lambda\in\lambda} \mathrm{sCl}(V_\lambda)$.

Demostración. (1) Suponga que $\mathcal{A}$ es una subcolección de $\mathcal{V}$ y sea $x \in X$. Puesto que $\mathcal{V}$ es s-localmente finita, existe un conjunto semi-abierto U_x tal que $x \in U_x$ y U_x interseca a lo más un número finito de elementos de $\mathcal{V}$. Como $\mathcal{A} \subset \mathcal{V}$, se concluye que U_x interseca a lo más un número finito de elementos de $\mathcal{A}$. Por lo tanto, $\mathcal{A}$ es s-localmente finita.

(2) Suponga que la colección $\mathcal{U} = \{sCl(V_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ no es s-localmente finita. Para cualquier $x \in X$, cada conjunto semi-abierto U_x que contiene a x interseca a un número infinito de elementos de la colección $\mathcal{U} = \{sCl(V_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$. Por el teorema 1.1.8, se tiene que $U_x \cap sCl(V_\lambda) \neq \emptyset$ si y solo si $U_x \cap V_\lambda \neq \emptyset$, por lo que cada conjunto semi-abierto U_x que contiene a x interseca a un número infinito de elementos de la colección $\mathcal{V} = \{V_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, contradiciendo el hecho que $\mathcal{V}$ es s-localmente finita.

(3) Puesto que $V_\lambda \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$ para cada $\lambda \in \Lambda$, se tiene que $sCl(V_\lambda) \subset sCl(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda)$, y así, $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} sCl(V_\lambda) \subset sCl(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda)$. Usando el hecho que $\mathcal{V}$ es s-localmente finita se demostrará que $sCl(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda) \subset \bigcup_{\lambda\in\lambda} sCl(V_\lambda)$. Sea $x \in sCl(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda)$. Entonces existe un conjunto semi-abierto U tal que $x \in U$ y U interseca a lo más un número finito de elementos de la colección $\mathcal{V}$, los cuales se escriben $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, \cdots, V_{\lambda_k}$. Si $x \notin \bigcup_{\lambda\in\Lambda} sCl(V_\lambda)$, entonces $U - \bigcup_{i=1}^{k} sCl(V_{\lambda_i})$ es un conjunto semi-abierto que contiene a x y no interseca a ningún elemento de $\mathcal{V}$, por lo que $U - \bigcup_{i=1}^{k} sCl(V_{\lambda_i})$ no interseca a $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$, lo cual contradice el hecho que $x \in sCl(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda)$. Por lo tanto, $x \in \bigcup_{\lambda\in\lambda} sCl(V_\lambda)$. □

El siguiente resultado debido a M. K. Singal y S. P Arya [20] será de utilidad en el desarrollo de este trabajo.

Lema 1.3.2. *Sea* (X, τ) *un espacio. Si* $\{F_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ *es un cubrimiento cerrado localmente finito de* X*, entonces* $\{Cl(Int(F_\lambda)) : \lambda \in \Lambda\}$ *es un cubrimiento regular cerrado localmemte finito de* X*.*

Lema 1.3.3. *Sea* A *un subconjunto de un espacio* (X, τ)*. Si cada cubrimiento abierto* $\mathcal{U}$ *de* A *tiene un refinamiento cerrado localmente finito que es un cubrimiento de* A*, entonces* $\mathcal{U}$ *tiene un refinamiento abierto localmente finito* $\mathcal{V}$ *que es un cubrimiento de* A*.*

Demostración. Sea $\mathcal{U} = \{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ un cubrimiento abierto de A. Por hipótesis, $\mathcal{U}$ tiene refinamiento cerrado localmente finito $\mathcal{F} = \{F_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ tal que $A \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$. Para cada $x \in A$, existe un conjunto abierto G_x tal que $x \in G_x$ y G_x interseca a lo más un número finito de elementos de $\mathcal{F}$. Observe que la colección $\mathcal{G} = \{G_x : x \in A\}$ es un cubrimiento abierto de A y, por hipótesis, $\mathcal{G}$ tiene un refinamiento cerrado localmente finito $\mathcal{H} = \{H_\beta : \beta \in \Delta\}$ tal que $A \subset \bigcup_{\beta\in\Delta} H_\beta$. Sea $\Delta_0 = \{\beta \in \Delta : H_\beta \cap F_\lambda = \emptyset\}$. Como $\{H_\beta : \beta \in \Delta_0\} \subset \mathcal{H}$, por el teorema 1.3.1, se tiene que la colección $\{H_\beta : \beta \in \Delta_0\} \subset \mathcal{H}$ es localmente finita y $\bigcup\{H_\beta : \beta \in \Delta_0\} = \bigcup\{\mathrm{Cl}(H_\beta) : \beta \in \Delta_0\} = \mathrm{Cl}(\bigcup\{H_\beta : \beta \in \Delta_0\})$, por lo que $W_\lambda = X - \bigcup\{H_\beta : \beta \in \Delta_0\}$ es un conjunto abierto tal que $F_\lambda \subset W_\lambda$, para cada $\lambda \in \Lambda$. Ahora, para cada $\beta \in \Delta$ y cada $\lambda \in \Lambda$, se tiene que

$$H_\beta \cap W_\lambda \neq \emptyset \iff H_\beta \cap F_\lambda \neq \emptyset. \qquad (*)$$

Puesto que $\mathcal{F}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$, para cada $\lambda \in \Lambda$ existe $U(\lambda) \in \mathcal{U}$ tal que $F_\lambda \subset U(\lambda)$. Sea $V_\lambda = W_\lambda \cap U(\lambda)$. Entonces la colección $\mathcal{V} = \{V_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es un refinamiento abierto del cubrimiento $\mathcal{U}$ de A. Además, si $x \in A$ entonces existe un conjunto abierto O_x tal que $x \in O_x$ y O_x interseca a lo más un número finito de elementos de $\mathcal{H}$, luego de $(*)$, se obtiene que la colección $\mathcal{V}$ es localmente finita y $A \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$. □

Lema 1.3.4. *Si un cubrimiento $\mathcal{U} = \{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ de un espacio (X, τ) tiene un refinamiento semi-abierto localmente finito que cubre a X, entonces existe un refinamiento semi-abierto preciso localmente finito $\mathcal{V} = \{V_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ de $\mathcal{U}$ que es un cubrimiento de X ("preciso" significa que $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ tienen el mismo conjunto de índices Λ y $V_\lambda \subset U_\lambda$ para cada $\lambda \in \Lambda$).*

Demostración. Suponga que $\mathcal{U} = \{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es un cubrimiento del espacio (X, τ) y sea $\mathcal{W} = \{W_\beta : \beta \in \Delta\}$ un refinamiento semi-abierto localmente finito que cubre a X. Luego, existe una función $\psi : \Delta \to \Lambda$ tal que $W_\beta \subset U_{\psi(\beta)}$ siempre que $\beta \in \Delta$.

Sea $V_\lambda = \bigcup_{\psi(\beta)=\lambda} W_\beta$. Observe que la colección $\mathcal{V} = \{V_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es un cubrimiento semi-abierto de X y $V_\lambda \subset U_\lambda$ para cada $\lambda \in \Lambda$. Falta demostrar que $\mathcal{V}$ es localmente finita. Sea $x \in X$. Entonces existe un conjunto abierto G tal que $x \in G$ y el conjunto $\Delta_0 = \{\beta \in \Delta : G \cap W_\beta \neq \emptyset\}$ es finito. Pero $G \cap V_\lambda \neq \emptyset$ si y solo si $\lambda = \psi(\beta)$ para algún $\beta \in \Delta_0$. Así, el conjunto $\{\lambda \in \Lambda : G \cap V_\lambda \neq \emptyset\}$ es finito y por lo tanto, la colección $\mathcal{V} = \{V_\lambda : \lambda \in \lambda\}$ es localmente finita. $\square$

Proposición 1.3.1. *Si $\mathcal{V} = \{V_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es una colección localmente finita, entonces la colección $\{\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(V_\lambda)) : \lambda \in \Lambda\}$ es localmente finita.*

Demostración. Suponga que $\mathcal{V}$ es una colección localmente finita y sea $x \in X$. Entonces existe un conjunto abierto U tal que a $x \in U$ y el conjunto $\{\lambda \in \Lambda : V_\lambda \cap U \neq \emptyset\}$ es finito. Puesto que $\{\lambda \in \Lambda : \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(V_\lambda)) \cap U \neq \emptyset\} \subset \{\lambda \in \Lambda : V_\lambda \cap U \neq \emptyset\}$, se tiene que $\{\lambda \in \Lambda : \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(V_\lambda)) \cap U \neq \emptyset\}$ es un conjunto finito y, por lo tanto, $\{\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(V_\lambda)) : \lambda \in \Lambda\}$ es una colección localmente finita. $\square$

Definición 1.3.5. *Un espacio (X, τ) se dice **S-cerrado**, si cada cubrimiento semi-abierto $\mathcal{U}$ de X contiene una subcolección finita $\{U_1, \ldots, U_n\}$ tal que la colección $\{\mathrm{Cl}(U_1), \ldots, \mathrm{Cl}(U_n)\}$ es un cubrimiento de X.*

Un resultado debido a Thompson [26] establece que cada espacio extremadamente disconexo compacto es S-cerrado. Seguidamente, se presenta un ejemplo de un espacio S-cerrado.

Ejemplo 1.3.2. *Considere el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, con la topología discreta y sea $\beta\mathbb{N}$ la compactificación de Stone-Čech de $\mathbb{N}$. El espacio $\beta\mathbb{N}$ es extremadamente disconexo compacto y, por lo tanto, S-cerrado.*

Definición 1.3.6. *Un espacio (X, τ) se dice **contablemente S-cerrado**, si cada cubrimiento semi-abierto contable $\mathcal{U}$ de X contiene una subcolección finita $\{U_1, \ldots, U_n\}$ tal que la colección $\{\mathrm{Cl}(U_1), \ldots, \mathrm{Cl}(U_n)\}$ es un cubrimiento de X.*

Observacion 1.3.2. *Puesto que cada cubrimiento semi-abierto contable es un cubrimiento semi-abierto, se tiene que cada espacio S-cerrado es contablemente S-cerrado.*

En el siguiente ejemplo, debido a Dlaska, Ergun y Ganster en [6], se muestra que el recíproco de la observación 1.3.2, en general, no es cierto.

Ejemplo 1.3.3. *Considere el conjunto de los números naturales* $\mathbb{N}$*, con la topología discreta y sea* $\beta\mathbb{N}$ *la compactificación de Stone-Čech de* $\mathbb{N}$*. Si* $X = \beta\mathbb{N} - \{p\}$*, donde* $p \in \beta\mathbb{N} - \mathbb{N}$ *, entonces X es contablemente S-cerrado, pero no es S-cerrado.*

La siguiente caracterización de los espacios contablemente S-cerrados fue establecida por Dlaska, Ergun y Ganster en [6].

Lema 1.3.5. *Un espacio* (X, τ) *es contablemente S-cerrado si y solo si para cualquier sucesión decreciente de conjuntos regular cerrados no vacíos* $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ *se tiene que* $\bigcap\{\mathrm{Int}(F_n) : n \in \mathbb{N}\} = \emptyset$*.*

Teorema 1.3.2. *Sea* (X, τ) *un espacio. Si existe una colección s-localmente finita de conjuntos semi-abiertos de X que es infinita, entonces* (X, τ) *no es un espacio contablemente S-cerrado.*

Demostración. Supongamos que existe una colección s-localmente finita $\mathcal{A} = \{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ de subconjuntos semi-abiertos de X que es infinita. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $F_n = \bigcup_{j=n}^{\infty} \mathrm{sCl}(A_j)$. Puesto que la colección $\mathcal{A}$ es s-localmente finita, por el lema 1.3.1, se obtiene que $F_n = \mathrm{sCl}\left(\bigcup_{j=n}^{\infty} A_j\right)$ y por el teorema 1.1.4, $\bigcup_{j=n}^{\infty} A_j$ es un conjunto semi-abierto. Entonces por la proposicion 1.1.9, se sigue que $\mathrm{Cl}(F_n) = \mathrm{Cl}\left(\mathrm{sCl}\left(\bigcup_{j=n}^{\infty} A_j\right)\right)$ es un conjunto regular cerrado tal que $\mathrm{Cl}(F_1) \supset \mathrm{Cl}(F_2) \supset \mathrm{Cl}(F_3) \supset \cdots$ Para finalizar la prueba, se demostrará que $\bigcap\{\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(F_n)) : n \in \mathbb{N}\} = \emptyset$ y, por el lema 1.3.5, se concluirá que (X, τ) no es contablemente S-cerrado. Suponga lo contrario. Entonces existe un $t \in \bigcap\{\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(F_n)) : n \in \mathbb{N}\}$ y así, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un conjunto abierto $U_{n(t)}$ tal que $t \in U_{n(t)} \subset \mathrm{Cl}(F_n)$. Puesto que $\mathcal{A}$ es s-localmente finita, existe

$O_t \in SO(X, \tau)$ tal que $t \in O_t$ y O_t interseca a lo sumo un número finito de elementos de $\mathcal{A}$. Luego, existe un conjunto abierto V_t tal que $V_t \subset O_t \subset Cl(V_t)$. Como $t \in O_t \subset Cl(V_t)$ y $U_{n(t)}$ es un conjunto abierto que contiene a t, se tiene que $V_t \cap U_{n(t)}$ $\emptyset$ y, como $U_{n(t)} \cap V_t \subset Cl(F_n) \cap V_t$, se sigue que $Cl(F_n) \cap V_t$ $\emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $F_n \cap V_t \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y, así, $F_n \cap O_t \neq \emptyset$, por lo que O_t es un conjunto semi-abierto que interseca a un número infinito de miembros de $\mathcal{A}$, pero esto es imposible ya que $\mathcal{A}$ es una colección s-localmente finita. Puesto que lo anterior surge de haber supuesto $\bigcap\{Int(Cl(F_n)) : n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$, se concluye que $\bigcap\{Int(Cl(F_n)) : n \in \mathbb{N}\} = \emptyset$. Por el lema 1.3.5, se deduce que (X, τ) no es contablemente S-cerrado. □

Observacion 1.3.3. *De acuerdo con el teorema 1.3.2, si un espacio es contablemente S-cerrado, entonces cada colección s-localmente finita de conjuntos semi-abiertos es finita.*

Definición 1.3.7. *Un espacio (X, τ) se dice **nearly compacto**, si cada cubrimiento regular abierto tiene un subcubrimiento finito.*

Observacion 1.3.4. *Del hecho que cada cubrimiento regular abierto es un cubrimiento abierto, se sigue que cada espacio compacto es nearly compacto.*

En el siguiente ejemplo se muestra que el recíproco de la observación 1.3.4, en general, no es cierto.

Ejemplo 1.3.4. *Sea X un conjunto infinito y $p \in X$ un elemento fijo. Se dota a X de la topología punto incluido $\tau = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X : p \in U\}$. Entonces cada subconjunto abierto no vacío de X es denso en X. Por lo tanto, (X, τ) es nearly compacto y obviamente (X, τ) no es compacto, pues el cubrimiento abierto $\{\{x, p\} : x \in X, x \neq p\}$ de X no admite un subcubrimiento finito.* □

1.4. Generalización de espacios paracompactos

El concepto de espacio paracompacto fue introducido en 1944 por Dieudonné [5], como una generalización de los espacios compactos. Un espacio (X, τ) es *paracompacto*, si cada cubrimiento abierto tiene un refinamiento abierto localmente finito que cubre a X. Los espacios paracompactos han sido generalizados utilizando los conjuntos abiertos generalizados descritos al inicio de este capítulo. En esta sección, se presentan algunas de estas generalizaciones y algunas propiedades que serán de utilidad en el desarrollo del trabajo.

El siguiente resultado es una caracterización de un espacio paracompacto bajo la hipótesis de que el espacio sea regular, la cual fue establecida por E. Michael [15].

Teorema 1.4.1. *Sea (X, τ) un espacio regular. Entonces (X, τ) es paracompacto si y solo si cada cubrimiento abierto de X tiene un refinamiento cerrado localmente finito que cubre a X.*

Definición 1.4.1. *Un espacio (X, τ) se dice **nearly paracompacto** [20], si cada cubrimiento regular abierto de X tiene un refinamiento abierto localmete finito que cubre a X.*

Observación 1.4.1. *Cada espacio paracompacto es nearly paracompacto.*

Teorema 1.4.2. *Un espacio (X, τ) es nearly paracompacto si y solo si cada cubrimiento abierto $\mathcal{U}$ de X tiene un refinamiento abierto localmente finito $\mathcal{G}$ tal que la colección $\{\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(G)) : G \in \mathcal{G}\}$ es un cubrimiento de X.*

Demostración. Primero, se probará la necesidad. Sea $\mathcal{U} = \{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ un cubrimiento abierto de X. Puesto que $\mathcal{U}' = \{\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(U_\lambda)) : \lambda \in \Lambda\}$ es un cubrimiento regular abierto de X y (X, τ) es un espacio nearly paracompacto, entonces existe un refinamiento abierto localmente finito $\mathcal{V} = \{V_\beta : \beta \in \Delta\}$ de $\mathcal{U}'$ que cubre a X. Luego, para cada $\beta \in \Delta$ existe un $\lambda(\beta) \in \Lambda$ tal que $V_\beta \subset \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(U_{\lambda(\beta)}))$. Sea $G_\beta = V_\beta - [\mathrm{Cl}(U_{\lambda(\beta)}) - U_{\lambda(\beta)}]$. Entonces $G_\beta = V_\beta \cap U_{\lambda(\beta)} \subset U_{\lambda(\beta)}$ y, por lo tanto, la colección $\mathcal{G} = \{G_\beta : \beta \in \Delta\}$ es un refinamiento abierto localmente finito de $\mathcal{U}$. Se afirma que $\mathcal{G}' = \{\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(G_\beta)) : \beta \in \Delta\}$ es un cubrimiento de X. Sea $x \in X$. Entonces $x \in V_\beta \subset U_{\lambda(\beta)}$ para algún $\beta \in \Delta$. Puesto que $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(G_\beta)) = \mathrm{Int}[\mathrm{Cl}(V_\beta \cap U_{\lambda(\beta)})] = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(V_\beta \cap \mathrm{Cl}(U_{\lambda(\beta)}))) = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(U_{\lambda(\beta)}))$, se tiene que $x \in \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(U_{\lambda(\beta)})) = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(G_\beta))$ y así, $X = \bigcup_{\beta\in\Delta} \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(G_\beta))$. Por lo tanto, $\mathcal{G} = \{G_\beta : \beta \in \Delta\}$ es un refinamiento abierto localmente finito tal que la coleccion $\mathcal{G}' = \{\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(G_\beta)) : \beta \in \Delta\}$ es un cubrimiento de X. Ahora, se probará la suficiencia. Sea $\mathcal{U} = \{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ un cubrimiento regular abierto de X. Entonces $\mathcal{U}$ tiene un refinamiento abierto localmente finito $\mathcal{G} = \{G_\beta : \beta \in \Delta\}$ tal que $X = \bigcup_{\beta\in\Delta} \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(G_\beta))$. Se mostrará que la colección $\mathcal{G}' = \{\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(G_\beta)) : \beta \in \Delta\}$ es un refinamiento abierto localmente finito de $\mathcal{U}$. Para cada $\beta \in \Delta$, existe un $\lambda(\beta) \in \Lambda$ tal que $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(G_\beta)) \subset \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(U_{\lambda(\beta)})) = U_{\lambda(\beta)}$ y así, $\mathcal{G}' = \{\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(G_\beta)) : \beta \in \Delta\}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$ que de acuerdo con la proposición 1.3.1 es localmente finito. Por lo tanto, (X, τ) es un espacio nearly paracompacto. □

Teorema 1.4.3. *El espacio (X, τ) es nearly paracompacto si (X, τ_s) es paracompacto.*

Demostración. Suponga que (X, τ_s) es un espacio paracompacto y sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento τ-regularmente abierto de X. Entonces $\mathcal{U}$ es un cubrimiento básico τ_s-abierto de X. Como (X, τ_s) es paracompacto, existe una colección $\mathcal{V}$ de conjuntos τ_s-abiertos tal que $\mathcal{V}$ es un refinamiento localmente finito de $\mathcal{U}$ y $X = \bigcup\{V : V \in \mathcal{V}\}$. Puesto que cada conjunto τ_s-abierto es τ-abierto, se concluye que (X, τ) es un espacio nearly paracompacto. □

Teorema 1.4.4. *Cada espacio Hausdorff nearly paracompacto es almost-regular.*

Demostración. Suponga que (X, τ) es un espacio Hausdorff nearly paracompacto. Sea F un subconjunto regular cerrado de X y asuma que y es un punto en X tal que $y \notin F$. Puesto que (X, τ) es Hausdorff, para cada $x \in F$ existen conjuntos abiertos disjuntos G_x y G_{xy} tales que $x \in G_x$ y $y \in G_{xy}$. Como $G_x \cap G_{xy} = \emptyset$, por el lema

1.1.6, se tiene que $Cl(G_x) \cap G_{xy} = \emptyset$ y, así, $y \notin Cl(G_x)$. Observe que la colección $\{Int(Cl(G_x)) : x \in F\} \bigcup \{X - F\}$ es un cubrimiento regular abierto de X, por lo que tiene un refinamiento abierto localmente finito $\mathcal{V}$ que es un cubrimiento de X. Sea $\mathcal{U} = \{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ la colección formada por los miembros de $\mathcal{V}$ que intersecan a F. Sea $U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$. Entonces U es un conjunto abierto que contiene a F. Sea $V = X - \bigcup_{\lambda \in \Lambda} Cl(U_\lambda)$. Por el teorema 1.3.1, se tiene que la colección $\mathcal{U} = \{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es localmente finita y $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} Cl(U_\lambda) = Cl\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda\right)$, por lo que V es un conjunto abierto tal que $U \cap V = \emptyset$. Puesto que $\mathcal{U}$ es un refinamiento de $\{Int(Cl(G_x)) : x \in F\} \bigcup \{X - F\}$ y cada U_λ interseca a F, para cada $\lambda \in \Lambda$, existe un $x \in F$ tal que $U_\lambda \subset Int(Cl(G_x))$. Ahora, dado que $Cl(U_\lambda) \subset (Cl(Int(Cl(G_x))) \subset Cl(G_x) \subset X - G_{xy} \subset X - \{y\}$, se tiene que $y \notin Cl(U_\lambda)$ para cada $\lambda \in \Lambda$. Así, $y \notin \bigcup_{\lambda \in \Lambda} Cl(U_\lambda)$ y en consecuencia, $y \in X - \bigcup_{\lambda \in \Lambda} Cl(U_\lambda) = V$. De esta manera, U y V son conjuntos abiertos disjuntos tales que $y \in V$ y $F \subset U$. Por lo tanto, (X, τ) es un espacio almost regular. $\square$

Definición 1.4.2. *Un espacio (X, τ) se dice* ***almost paracompacto*** *[21], si cada cubrimiento abierto $\mathcal{U}$ de X tiene un refinamiento abierto localmente finito $\mathcal{V}$ tal que la colección $\{Cl(V) : V \in \mathcal{V}\}$ es un cubrimiento de X.*

Observación 1.4.2. *Cada espacio nearly paracompacto es almost paracompacto.*

Teorema 1.4.5. *Sea (X, τ) un espacio regular. Entonces (X, τ) es un espacio almost paracompacto si y solo si es paracompacto.*

Demostración. Suponga que (X, τ) es un espacio almost paracompacto y sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento abierto de X. Puesto que (X, τ) es un espacio regular, para cada $x \in X$ existe un conjunto abierto V_x tal que $x \in V_x \subset Cl(V_x) \subset U_x$ para algún $U_x \in \mathcal{U}$. Observe que la colección $\mathcal{V} = \{V_x : x \in X\}$ es un cubrimiento abierto de (X, τ). Como (X, τ) es un espacio almost paracompacto, $\mathcal{V}$ tiene un refinamiento localmente finito $\mathcal{W} = \{W_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ tal que la coleción $\{Cl(W_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ cubre a X. Se verá que $\{Cl(W_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ es un refinamiento localmente finito de $\mathcal{U}$. Como $\mathcal{W}$

es un refinamiento de $\mathcal{V}$, para cada $W_\lambda \in \mathcal{W}$ existe un $V_x \in \mathcal{V}$ tal que $W_\lambda \subset V_x$ y así $\mathrm{Cl}(W_\lambda) \subset \mathrm{Cl}(V_x) \subset U_x$ para algún $U_x \in \mathcal{U}$. Esto prueba que la colección $\{\mathrm{Cl}(W_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$. Ahora, dado que $\mathcal{W}$ es localmente finito, por el teorema 1.3.1, se obtiene que $\{\mathrm{Cl}(W_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ es un refinamiento cerrado localmente finito de $\mathcal{U}$ que cubre a X. Así, por el teorema 1.4.1, se concluye que (X, τ) es un espacio paracompacto. En forma recíproca, suponga que (X, τ) es un espacio paracompacto y sea $\mathcal{U} = \{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ un cubrimiento de X. Entonces $\mathcal{U}$ tiene un refinamiento abierto localmente finito $\mathcal{V} = \{V_\beta : \beta \in \Delta\}$ tal que $X = \bigcup_{\beta\in\Delta} V_\beta \subset \bigcup_{\beta\in\Delta} \mathrm{Cl}(V_\beta)$. Por lo tanto, (X, τ) es un espacio almost paracompacto. □

Corolario 1.4.1. *Si (X, τ) es un espacio regular, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) (X, τ) es paracompacto.

(2) (X, τ) es nearly paracompacto.

(3) (X, τ) es almost paracompacto.

Teorema 1.4.6. *Sea (X, τ) un espacio almost regular. Si (X, τ) es un espacio almost paracompacto, entonces cada cubrimiento regular abierto de (X, τ) tiene un refinamiento regular cerrado localmente finito que cubre a X.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento regular abierto de X. Para cada $x \in X$ existe un $U_x \in \mathcal{U}$ y $x \in U_x$. Por el teorema 1.2.1, la almost regularidad de (X, τ) asegura la existencia de un conjunto regular abierto V_x tal que $x \in V_x \subset \mathrm{Cl}(V_x) \subset U_x$. Por lo tanto, la colección $\mathcal{V} = \{V_x : x \in X\}$ es un refinamiento regular abierto de $\mathcal{U}$ que cubre a X. Puesto que (X, τ) es almost paracompacto, entonces existe un refinamiento abierto localmente finito $\mathcal{W} = \{W_\beta : \beta \in \Delta\}$ de $\mathcal{V}$, tal que $\{\mathrm{Cl}(W_\beta) : \beta \in \Delta\}$ es un cubrimiento de X. Además, por el teorema 1.3.1, la colección $\{\mathrm{Cl}(W_\beta) : \beta \in \Delta\}$ es localmente finita. Por el lema 1.3.2, la colección $\mathcal{W}^* = \{\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(W_\beta))) : \beta \in \Delta\}$ es un cubrimiento regular cerrado de X que es localmente finito. Finalmente, se verá que $\{\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(W_\beta))) : \beta \in \Delta\}$ es un refinamiento $\mathcal{U}$. Como $\mathcal{W}$ refinamiento de $\mathcal{V}$, para cada $W_\beta \in \mathcal{W}$ existe un $V_{x(\beta)} \in \mathcal{V}$ tal que $W_\beta \subset V_{x(\beta)}$, por lo que $\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(W_\beta))) \subset \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(V_{x(\beta)}))) \subset \mathrm{Cl}(V_{x(\beta)}) \subset U_{x(\beta)}$ para algún $U_{x(\beta)} \in \mathcal{U}$. De esta manera, se ha probado que $\mathcal{W}^*$ es un refinamiento regular cerrado de $\mathcal{U}$ el cual es localmente finito y cubre a X. □

El siguiente lema muestra que el recíproco de la observación 1.4.2 se cumple si se considera un espacio almost-regular.

Lema 1.4.1. *Sea (X, τ) un espacio almost-regular. Si (X, τ) es un espacio almost paracompacto, entonces es un espacio nearly paracompacto.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento regular abierto de (X, τ). Por el teorema 1.4.6, existe un refinamiento regular cerrado localmente finito $\mathcal{F}$ de $\mathcal{U}$ que es un cubrimiento de X. Para cada $x \in X$, existe un conjunto abierto O_x tal que $x \in O_x$ y O_x interseca a lo más un número finito de elementos de $\mathcal{F}$. Ahora, se verá que $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(O_x))$ es un conjunto regular abierto que contiene a x e interseca a lo más un número finito de elementos de $\mathcal{F}$. Observe que dado $F \in \mathcal{F}$, si $\varnothing = F \cap O_x$, entonces $\varnothing = \mathrm{Int}(F) \cap O_x$ y, esto implica, por el lema 1.1.6, que $\mathrm{Int}(F) \cap \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(O_x)) \subset \mathrm{Int}(F) \cap \mathrm{Cl}(O_x) = \emptyset$. Nuevamente, por el lema 1.1.6, se obtiene que $F \cap \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(O_x)) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(F)) \cap \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(O_x)) = \emptyset$. Así, el número de elementos de $\mathcal{F}$ que interseca $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(O_x))$ es a lo más el número de elementos de $\mathcal{F}$ que interseca O_x. Por lo tanto, para cada $x \in X$, $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(O_x))$ interseca un número finito de elementos de $\mathcal{F}$. Considere el cubrimiento $\mathcal{O} = \{\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(O_x)) : x \in X\}$ de X. Por la proposición 1.1.1, se tiene que los elementos de la colección $\mathcal{O}$ son conjuntos regular abiertos y, por el teorema 1.4.6, existe un refinamiento $\mathcal{O}'$ regular cerrado de $\mathcal{O}$ que es localmente finito. Sea $V = X - \bigcup\{O' : O' \in \mathcal{O}', O' \cap F = \varnothing\}$. Es claro que $\bigcup\{O' : O' \in \mathcal{O}', O' \cap F = \varnothing\}$ es un conjunto cerrado, por lo que V es un conjunto abierto. Ahora, sea $\mathcal{W} = \{V \cap U_F : F \in \mathcal{F}\}$. Se probará que $\mathcal{W}$ es un refinamiento abierto localmente finito que cubre a X. Como $\mathcal{O}'$ es un refinamiento de $\mathcal{O}$, cada $O' \in \mathcal{O}'$ interseca a lo más un número finito de elementos de $\mathcal{F}$. Además, por la forma en que está definida V, se tiene que $V \cap O' = \emptyset$

si y sólo si $F \cap O' = \emptyset$ y, así, cada $O' \in \mathcal{O}'$ interseca a lo más un número finito de elementos de $\mathcal{W}$, es decir, la colección $\{U_F \cap V \in \mathcal{W} : (U_F \cap V) \cap O' \neq \emptyset\}$ tiene un número finito de elementos para cada $O' \in \mathcal{O}'$. Como $\mathcal{O}'$ es localmemte finita, para cada $x \in X$ existe un abierto G tal que $x \in G$ y la colección $\mathcal{I} = \{O' \in \mathcal{O}' : G \cap O' \neq \emptyset\}$ tiene un número finito de elementos. Luego, $\bigcup_{O' \in \mathcal{I}} \{U_F \cap V \in \mathcal{W} : (U_F \cap V) \cap O' \neq \emptyset\}$ tiene un número finito de elementos, por ser unión finita de conjuntos finitos y $\{U_F \cap V \in \mathcal{W} : (U_F \cap V) \cap (G \cap \bigcup_{O' \in \mathcal{I}} O') \neq \emptyset\} = \{U_F \cap V \in \mathcal{W} : (U_F \cap V) \cap \bigcup_{O' \in \mathcal{I}} (G \cap O') \neq \emptyset\} \subset \bigcup_{O' \in \mathcal{I}} \{U_F \cap V \in \mathcal{W} : (U_F \cap V) \cap O' \neq \emptyset\} = \{U_F \cap V \in \mathcal{W} : (U_F \cap V) \cap \bigcup_{O' \in \mathcal{I}} O' \neq \emptyset\}$, por lo tanto, $\{U_F \cap V \in \mathcal{W} : (U_F \cap V) \cap (G \cap \bigcup_{O' \in \mathcal{I}} O') \neq \emptyset\}$ tiene un número finito de elementos. Puesto que $\mathcal{O}'$ es un cubrimiento de X, se tiene que $G \subset \bigcup_{O' \in \mathcal{I}} O'$ y así, $\{U_F \cap V \in \mathcal{W} : (U_F \cap V) \cap G \neq \emptyset\}$ tiene un número finito de elementos. Dado que $\mathcal{F}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$, para cada $F \in \mathcal{F}$ existe un $U_F \in \mathcal{F}$ tal que $V \cap U_F \subset U_F$. Por lo tanto, la colección $\mathcal{W}$ es un refinamiento abierto localmente finito de $\mathcal{U}$ y $X = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F \subset \bigcup_{F \in \mathcal{F}} V \cap U_F$. Esto prueba que (X, τ) es un espacio nearly paracompacto. □

Definición 1.4.3. *Un espacio* (X, τ) *se dice* S***-paracompacto*** *[1], si cada cubrimiento abierto de X tiene un refinamiento semi-abierto localmente finito que cubre a X.*

Observación 1.4.3. *Cada espacio paracompacto es* S*-paracompacto.*

Teorema 1.4.7. *Si* (X, τ) *es un espacio S-paracompacto, entonces es almost paracompacto.*

Demostración. Sea $\mathcal{U} = \{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ un cubrimiento abierto de X. Puesto que (X, τ) es un espacio S-paracompacto, entonces $\mathcal{U}$ tiene un refinamiento semi-abierto localmente finito $\mathcal{V} = \{V_\beta : \beta \in \Delta\}$ que cubre X. Para cada $\beta \in \Delta$, existe un conjunto abierto O_β tal que, $O_\beta \subset V_\beta \subset \mathrm{Cl}(O_\beta)$. Defina $\mathcal{O} = \{O_\beta : \beta \in \Delta\}$ y observe que $\mathcal{O}$ es una colección localmente finita, pues de lo contrario existiría un

$x \in X$ tal que para para cada conjunto abierto G que lo contenga, el conjunto $\{\beta \in \Delta : O_\beta \cap G \neq \emptyset\}$ es un conjunto infinito y como $\{\beta \in \Delta : O_\beta \cap G \neq \emptyset\} \subset \{\beta \in \Delta : V_\beta \cap G \neq \emptyset\}$, se tiene que $\{\beta \in \Delta : V_\beta \cap G \neq \emptyset\}$ es un conjunto infinito, lo cual es una contradicción. Además, para cada $\beta \in \Delta$ existe un $\lambda \in \Lambda$ tal que $O_\beta \subset V_\beta \subset U_\lambda$. Por último, $X = \bigcup_{\beta\in\Delta} V_\beta \subset \bigcup_{\beta\in\Delta} \mathrm{Cl}(O_\beta)$. Esto prueba que (X, τ) es almost paracompacto. □

Lema 1.4.2. *Si (X, τ) es un espacio de Hausdorff, A es un subconjunto de X y x es un punto de X tal que $x \notin A$, entonces para cada $y \in A$ existe un conjunto abierto U_y tal que $y \in U_y$ y $x \notin \mathrm{Cl}(U_y)$.*

Demostración. Suponga que (X, τ) es un espacio de Hausdorff y sea $x \in X$. Si A es un subconjunto de X tal que $x \notin A$, entonces para cada $y \in A$ existen conjuntos abiertos disjuntos V y U_y tales que $x \in V$ y $y \in U_y$, esto es $x \notin \mathrm{Cl}(U_y)$. □

Teorema 1.4.8. *Sea (X, τ) un espacio y considere los siguientes enunciados:*

(1) (X, τ) es Hausdorff S-paracompacto.

(2) Para cada subconjunto cerrado A de X y cada $x \notin A$, existen conjuntos $U \in \tau$ y $V \in \mathrm{SO}(X, \tau)$ tales que $x \in U$, $A \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$.

(3) Para cada subconjunto abierto G de X y cada $x \in G$, existe $U \in \tau$ tal que $x \in U \subset \mathrm{sCl}(U) \subset G$.

Entonces las siguientes implicaciones se satisfacen: (1)⇒(2)⇔(3).

Demostración. (1)⇒(2): Sea x cualquier punto de X y A un subconjunto cerrado de X tal que $x \notin A$. Puesto que (X, τ) es un espacio de Hausdorff, del lema 1.4.2, se obtiene que para cada $y \in A$ existe un conjunto abierto W_y tal que $y \in W_y$ y $x \notin \mathrm{Cl}(W_y)$. Observe que $A \subset \bigcup_{y\in Y} W_y$ y la colección $\mathcal{W} = \{W_y : y \in A\} \cup \{X - A\}$ es un cubrimiento abierto de X. Como (X, τ) es un espacio S-paracompacto, la colección $\mathcal{W}$ tiene un refinamiento semi-abierto $\mathcal{H}$ que es localmente finito y cubre a X. Considere la colección $\mathcal{H}' = \{H \in \mathcal{H} : H \cap A \neq \emptyset\}$. Si $y \in A$, entonces existe $H_y \in \mathcal{H}$ tal que $y \in H_y$ y así, $A \cap H_y \neq \emptyset$. Por lo tanto, $A \subset \bigcup_{H \in \mathcal{H}'} H$ y en consecuencia, $\mathcal{H}'$ es un cubrimiento semi-abierto de A. Ahora, como $\mathcal{H}$ es un refinamiento de $\mathcal{W}$, se tiene que si $H \in \mathcal{H}'$, entonces H está contenido en algún $W_y \in \mathcal{W}$, por lo que $\mathrm{Cl}(H) \subset \mathrm{Cl}(W_y)$ y dado que $x \notin \mathrm{Cl}(W_y)$, se obtiene que $x \notin \mathrm{Cl}(H)$. Defina $V = \bigcup_{H \in \mathcal{H}'} H$. Por el teorema 1.1.4, V es un conjunto semi-abierto que contiene al conjunto A y, por el teorema 1.3.1, la colección $\mathcal{H}'$ es localmente finita. Además, $\mathrm{Cl}(V) = \mathrm{Cl}\left(\bigcup_{H \in \mathcal{H}'} H\right) = \bigcup_{H \in \mathcal{H}'} \mathrm{Cl}(H)$. Por lo tanto, si $U = X - \mathrm{Cl}(V)$, entonces U es un conjunto abierto tal que $x \in U$ y $U \cap V = (X - \mathrm{Cl}(V)) \cap V = \emptyset$.

(2)$\Rightarrow$(3): Sea G un subconjunto abierto de X y $x \in G$. Entonces $A = X - G$ es un conjunto cerrado y $x \notin A$. Por la hipótesis (2), existen conjuntos $U \in \tau$ y $V \in SO(X, \tau)$ tales que $x \in U$, $A \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$, por lo que $x \in U \subset \mathrm{sCl}(U)$. Falta ver que $\mathrm{sCl}(U) \subset G$. Si $z \in \mathrm{sCl}(U)$ y $z \notin G$, entonces $z \in A \subset V$ y como $V \in SO(X, \tau)$, se obtiene que $U \cap V \neq \emptyset$, lo cual es contradictorio. Por lo tanto, $\mathrm{sCl}(U) \subset G$.

(3)$\Rightarrow$(2): Sea A un subconjunto cerrado de X y sea $x \in X$ tal que $x \notin A$ Entonces $G = X - A$ es un subconjunto abierto de X tal que $x \in G$. Por la hipótesis (3), existe $U \in \tau$ tal que $x \in U \subset \mathrm{sCl}(U) \subset G = X - A$, por lo que el conjunto $V = X - \mathrm{sCl}(U)$ es tal que $V \in SO(X, \tau)$, $A \subset X - \mathrm{sCl}(U) = V$ y $U \cap V = U \cap (X - \mathrm{sCl}(U)) \subset U \cap (X - U) = \emptyset$. □

Teorema 1.4.9. *Si* (X, τ) *es un espacio Hausdorff S-paracompacto, entonces es semiregular.*

Demostración. Por el lema 1.1.2, $\tau_s \subset \tau$. Se demostrará que $\tau \subset \tau_s$. Sea U un subconjunto abierto de X y $x \in U$. Puesto que (X, τ) es un espacio Hausdorff S-paracompacto, por el teorema 1.4.8, existe $V \in \tau$ tal que $x \in V \subset \mathrm{sCl}(V) \subset U$. Luego, por el corolario 1.1.4, se tiene que $\mathrm{sCl}(V) = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(V)) \in RO(X, \tau)$. Así, el conjunto $W = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(V))$ es un conjunto regular-abierto tal que $x \in W \subset U$. Según esto, U se puede expresar como una unión de conjuntos regular abiertos, por lo que $U \in \tau_s$ y así, $\tau \subset \tau_s$. Esto demuestra que (X, τ) es semi-regular. $\square$

Capítulo 2

Nearly S-paracompacidad

2.1. Espacios nearly S-paracompactos

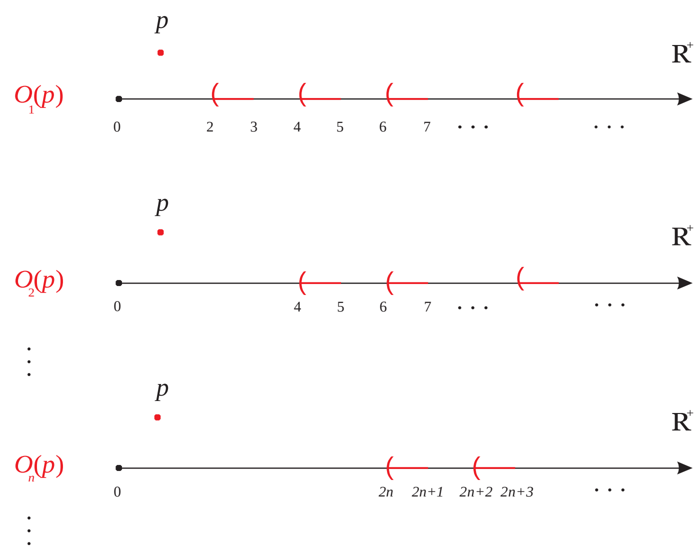
En esta sección, se utilizan las clases de los conjuntos regular abiertos y semi-abiertos para introducir la noción de espacio nearly S-paracompacto [18], la cual es una generalización natural de las nociones de espacio nearly paracompacto y espacio S-paracompacto.

Definición 2.1.1. *Un espacio (X, τ) se dice **nearly S-paracompacto** [18], si cada cubrimiento regular abierto $\mathcal{U}$ de X tiene un refinamiento semi-abierto localmente finito $\mathcal{V}$ que cubre a X.*

Claramente, cada espacio S-paracompacto es nearly S-paracompacto y cada espacio nearly paracompacto es nearly S-paracompacto, pero los recíprocos no son ciertos, en general, como se puede ver en los siguientes dos ejemplos.

Ejemplo 2.1.1. *Existe un espacio nearly S-paracompacto que no es nearly paracompacto. Sea $X = \mathbb{R}^+ \cup \{p\}$, donde $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$ y $p \notin \mathbb{R}^+$. Se dota a X de la siguiente topología: $\mathbb{R}^+$ tiene la topología usual y es un subespacio abierto de X; una vecindad básica de $p \notin X$ tiene la forma*

$$O_n(p) = \{p\} \cup \bigcup_{i=n}^{\infty} (2i, 2i+1), \text{ donde } n \in \mathbb{N}.$$



Vecindades básicas del punto $p \notin \mathbb{R}^+$.

El espacio X tiene las siguientes propiedades:

(1) X es Hausdorff. En primer lugar, considere el punto p y un punto arbitrario $x \in \mathbb{R}^+$. Entonces existe $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $x < n$. Luego, las vecindades $[0, n)$ y $O_n(p)$ son tales que $x \in [0, n)$, $p \in O_n(p)$ y $[0, n) \cap O_n(p) = \emptyset$. En segundo lugar, como $\mathbb{R}^+$ es un espacio de Hausdorff, claramente si $a \in \mathbb{R}^+$, $b \in \mathbb{R}^+$ y $a \neq b$, entonces existen vecindades U y V tales que $a \in U$, $b \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Por lo tanto, X es Hausdorff.

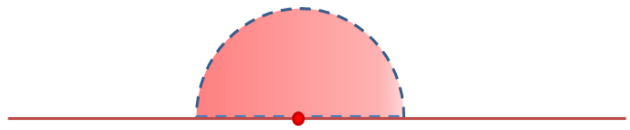
(2) X no es regular. Para ver esto, observe que $\mathrm{Cl}(O_n(p)) = O_n(p) \cup \{k \in \mathbb{N} : k \geq 2n\}$. En efecto, siempre se satisface que $O_n(p) \subset \mathrm{Cl}(O_n(p))$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Además, si $k \in \mathbb{N}$ es tal que $k \geq 2n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $(k - \varepsilon, k + \varepsilon) \cap O_n(p) \neq \emptyset$ para cada $\varepsilon > 0$. Así, $k \in \mathrm{Cl}(O_n(p))$ y, por lo tanto, $O_n(p) \cup \{k \in \mathbb{N} : k \geq 2n\} \subset \mathrm{Cl}(O_n(p))$. Por otra parte, si $x \notin O_n(p) \cup \{k \in \mathbb{N} : k \geq 2n\}$, entonces $x \in U = [0, 2) \cup \bigcup_{i=2}^{\infty} (2i - 1, 2i)$, U es un conjunto abierto en X y $U \cap O_n(p) = \emptyset$. Luego, $x \notin \mathrm{Cl}(O_n(p))$ y, en consecuencia, $\mathrm{Cl}(O_n(p)) = O_n(p) \cup \{k \in \mathbb{N} : k \geq 2n\}$. Ahora, siendo que $\mathrm{Cl}(O_n(p)) = O_n(p) \cup \{k \in \mathbb{N} : k \geq 2n\}$, entonces no existe una vecindad V de p tal que $\mathrm{Cl}(V) \subset O_n(p)$. Así, por el lema 31.1 de [16], se

concluye que X no es regular.

(3) *X es S-paracompacto. Sea $\mathcal{U} = \{U_\beta : \beta \in \Delta\}$ un cubrimiento abierto de X. Entonces existe $U_{\beta_0} \in \mathcal{U}$ tal que $p \in U_{\beta_0}$. Luego, existe algún $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $O_{n_0}(p) \subset U_{\beta_0}$. Por la definición de la topología sobre X, se tiene que $X - O_n(p)$ es un subconjunto cerrado de X y es un subespacio paracompacto de X (note que $X - O_n(p) \subset \mathbb{R}^+$ y $\mathbb{R}^+$ es paracompacto, pues es un subespacio cerrado de $\mathbb{R}$). Por lo tanto, el cubrimiento abierto $\{U_\beta - O_n(p) : \beta \in \Delta\}$ de $X - O_n(p)$ tiene un refinamiento abierto $\mathcal{V}$ que es localmente finito y cubre a $X - O_n(p)$. Por la proposición 1.1.4, se tiene que cada $V \in \mathcal{V}$ es un subconjunto semi-abierto de X. As´ı, $\{O_n(p)\} \cup \mathcal{V}$ es un refinamiento semi-abierto de $\mathcal{U}$ que es localmente finito y es un cubrimiento de X. Esto demuestra que X es S-paracompacto.*

Ahora, por el lema 1.4.9, se sigue que X es semiregular y puesto que X no es regular, por el lema 1.2.1, se tiene que él no es almost regular. Consecuentemente, por el teorema 1.4.4, se concluye que X no es nearly paracompacto. □

Ejemplo 2.1.2. *Existe un espacio nearly S-paracompacto que no es S-paracompacto. Sea $X = P \cup L$, donde $P = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, y > 0\}$ el semi-plano superior abierto con la topolog´ıa euclidiana τ y L es el eje real. Se genera una topolog´ıa τ^* sobre X por la agregación a τ de todos los conjuntos de la forma $\{x\} \cup (P \cap U)$, donde $x \in L$ y U es una vecindad euclidiana de x en el plano. La topología τ^* es llamada la **topología de semi-disco**. Puesto que los discos abiertos forman una base conveniente para la topolog´ıa euclidiana en el plano, se obtiene que la topolog´ıa τ^* es originalmente generada por una base que consiste de dos tipos de vecindades: si $x \in P$, un elemento básico que contiene a x es un disco abierto contenido en P, mientras que los conjuntos básicos alrededor de un punto $y \in L$ son de la forma $\{y\} \cup (P \cap D)$, donde D es un disco abierto alrededor de y. Es decir, un conjunto básico que contiene a $y \in L$ consiste de un semi-disco abierto centrado en $\{y\}$.*



Vecindad básica del punto $y \in \mathbf{L}$.

Es conocido por el ejemplo 78 de [23], que (X, τ^*) es Hausdorff, pero no es semiregular ni paracompacto, y como su semiregularización es el semi-plano superior abierto con la topolog´ıa euclidiana que es paracompacto, entonces por el teorema 1.4.3, se sigue que (X, τ^*) es nearly paracompacto y, por lo tanto, nearly S-paracompacto. Por otra parte, por el lema 1.4.9, se concluye que (X, τ^*) no es S-paracompacto. □

Observacion 2.1.1. *Note que los ejemplos 2.1.1 y 2.1.2 muestran la independencia entre las nociones de espacio nearly paracompacto y espacio S-paracompacto. De acuerdo a lo anterior, se tiene el siguiente diagrama:*

$$\begin{array}{ccc} \text{paracompacto} & \Longrightarrow & \text{nearlyparacompacto} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ S\text{-paracompacto} & \Longrightarrow & \text{nearly } S\text{-paracompacto} \end{array}$$

Se ha visto que cada espacio nearly paracompacto (resp. S-paracompacto) es almost-paracompacto. As´ı, es natural que se haga la siguiente pregunta: ¿Existe alguna relación entre las nociones de espacio nearly S-paracompacto y espacio almost paracompacto?. En el siguiente teorema se da una respuesta positiva a esta pregunta.

Teorema 2.1.1. *Si (X, τ) es un espacio nearly S-paracompact, entonces es almost paracompacto.*

Demostración. Sea $\mathcal{U} = \{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ un cubrimiento abierto de X. Entonces, $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{Int}(\operatorname{Cl}(U_\lambda))$ y, así, por la proposición 1.1.1, se tiene que la colección $\{\operatorname{Int}(\operatorname{Cl}(U_\lambda)) : \lambda \in \Lambda\}$ es un cubrimiento regular abierto de X. Puesto que (X, τ)

es nearly S-paracompacto, se sigue que $\{\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(U_\lambda)) : \lambda \in \Lambda\}$ tiene un refinamiento semi-abierto localmente finito que cubre a X y, por el lema 1.3.4, se obtiene que $\{\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(U_\lambda)) : \lambda \in \Lambda\}$ tiene un refinamiento semi-abierto preciso localmente finito $\mathcal{V} = \{V_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ que es un cubrimiento de X. Ahora, para cada $\lambda \in \Lambda$ existe un subconjunto abierto O_λ de X tal que $O_\lambda \subset V_\lambda \subset \mathrm{Cl}(O_\lambda)$, por ser V_λ un conjunto semi-abierto. Así, para cada $\lambda \in \Lambda$ se tiene que $O_\lambda \subset V_\lambda \subset \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(U_\lambda)) \subset \mathrm{Cl}(U_\lambda)$. Para cada $\lambda \in \Lambda$, definamos $H_\lambda = O_\lambda - [\mathrm{Cl}(U_\lambda) - U_\lambda]$. Como $O_\lambda \subset \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(U_\lambda)) \subset \mathrm{Cl}(U_\lambda)$, se tiene que $H_\lambda = O_\lambda \cap U_\lambda \subset V_\lambda$. Puesto $\mathcal{V}$ es localmente finita y $H_\lambda \subset U_\lambda$ para cada $\lambda \in \Lambda$, se concluye que $\{H_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es un refinamiento abierto localmente finito de $\mathcal{U}$. Se afirma que la colección $\{\mathrm{Cl}(H_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ es un cubrimiento de X. En efecto, sea $x \in X$. Entonces $x \in V_\lambda \subset \mathrm{Cl}(O_\lambda)$ para algún $\lambda \in \Lambda$. Puesto que $\mathrm{Cl}(H_\lambda) = \mathrm{Cl}(O_\lambda \cap U_\lambda) = \mathrm{Cl}(O_\lambda \cap \mathrm{Cl}(U_\lambda)) = \mathrm{Cl}(O_\lambda)$, se tiene que $x \in \mathrm{Cl}(O_\lambda) = \mathrm{Cl}(H_\lambda)$, por lo cual $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Cl}(H_\lambda)$. Esto demuestra que (X, τ) es un espacio almost paracompacto. □

El recíproco del teorema 2.1.1 no es necesariamente cierto, como se verá en el siguiente ejemplo y, para ello, se utilizan las nociones de *espacio minimal Hausdorff* y *espacio H-cerrado*, así como también algunas propiedades relacionadas con tales espacios. Un espacio de Hausdorff (X, τ) se dice *minimal Hausdorff*, si no existe una topología Hausdorff más gruesa que τ. Es decir, τ es el elemento minimal en el conjunto de todas las topologías Hausdorff sobre X, con el orden parcial de la inclusión conjuntista. Por otra parte, un espacio (X, τ) se dice *H-cerrado*, si (X, τ) es Hausdorff y para cada cubrimiento abierto $\mathcal{U} = \{U_\beta : \beta \in \Delta\}$ de X existe un subconjunto finito $\Delta_0 \subseteq \Delta$ tal que la colección $\{\mathrm{Cl}(U_\beta) : \beta \in \Delta_0\}$ cubre a X. Obviamente, cada espacio H-cerrado es almost paracompacto. Katětov [7] demostró que cada espacio minimal Hausdorff es H-cerrado y semiregular. Por lo tanto, cada espacio minimal Hausdorff es almost paracompacto.

Ejemplo 2.1.3. Existe un espacio almost paracompacto que no es nearly S-paracompacto. Sea $X = \mathbb{R}^+ \cup \{p\} \cup \{q\}$, donde $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$, $p \notin \mathbb{R}^+$, $q \notin \mathbb{R}^+$ y $p \neq q$. Se dota a

X de la siguiente topología: $\mathbb{R}^+$ tiene la topología usual y es un subespacio abierto de X; una vecindad básica de $p \in X$ tiene la forma

$$O_n(p) = \{p\} \cup \bigcup_{i=n}^{\infty} (2i, 2i+1)\,, \text{ donde } n \in \mathbb{N};$$

una vecindad básica de $q \in X$ tiene la forma

$$O_m(q) = \{q\} \cup \bigcup_{i=m}^{\infty} (2i-1, 2i)\,, \text{ donde } m \in \mathbb{N}.$$

El espacio X tiene las siguientes propiedades:

(1) X es Hausdorff.

(2) X es minimal Hausdorff y por lo tanto, X es casi-paracompacto. Suponga que τ' es una topología Hausdorff sobre X que es más gruesa que τ. Se afirma que cada intervalo (c, d) de $\mathbb{R}^+$ es abierto en τ', y que cada vecindad básica de p en τ es una vecindad de p en τ'; luego por simetría esto también es cierto para q, y de esta manera $\tau' = \tau$. Observe que el intervalo cerrado $[m, n]$ es compacto en τ, y por lo tanto, él es compacto en la topología más gruesa τ'; además, cada cubrimiento abierto de $[m, n]$ en τ' es un cubrimiento abierto de $[m, n]$ en τ. Pero τ' induce una topología Hausdorff sobre $[m, n]$ más gruesa que la inducida por τ; y cada topología Hausdorff compacta es minimal Hausdorff, por lo que τ y τ' inducen la misma topología sobre $[m, n]$. Entonces, si $x \in (c, d)$, existen conjuntos abiertos y disjuntos U, V y W en τ', que contienen a x, p, y q, respectivamente. Luego, para algún entero positivo N, los únicos puntos de U mayores que N son números enteros positivos. Pero U es un conjunto abierto en τ y, por lo tanto, no puede contener puntos aislados. De esta manera, U está contenido en un intervalo acotado $[m, n]$ que tiene la topología usual, en consecuencia, $U \cap (c, d)$ es abierto en $[m, n]$, por lo que $U \cap (c, d)$ es abierto en U, y así, también es abierto en X bajo τ'. Entonces (c, d) contiene una τ'-vecindad de cada uno de sus puntos, así

(c, d) es abierto en τ'. Por otra parte, sea H la vecindad básica de p que contiene a p y a todos los intervalos de la forma $(2r, 2r+1)$ para r mayor que algún entero positivo N. Entonces, existen conjuntos abiertos disjuntos U, V en τ' con $p \in U$, $q \in V$, por lo que U no contiene puntos de $(2r-1, 2r)$ para r mayor que algún entero positivo M. Como U es un abierto en τ, U no puede contener números enteros positivos arbitrariamente grandes sin que contenga vecindades de ellos, se concluye que U no intercepta a $[2r-1, 2r]$ para r mayor que algún entero M' suficientemente grande. Por lo tanto, $U - H$ es acotado, por lo que se puede suponer que $U - H \subset [c, d]$. Como $[c, d]$ es compacto en τ', que es Hausdorff, se obtiene que $[c, d]$ es cerrado. Luego, $U \cap (X - [c, d])$ es abierto en τ' y está contenido en H, así H es una τ'-vecindad de p.

(3) X no es nearly S-paracompacto. Para ver esto, considere el cubrimiento regular abierto

$$\mathcal{W} = \{[0, 1)\} \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} \left\{ \left(i - \tfrac{1}{3}, i + \tfrac{1}{3} \right) \right\} \cup \{O_1(p)\} \cup \{O_1(q)\}$$

de X. Entonces, por la definición de la topología sobre X, cada refinamiento semi-abierto de $\mathcal{W}$ no es localmente finito en los puntos p o q. Esto demuestra que X no es nearly S-paracompacto. □

Las siguientes implicaciones siguen inmediatamente del teorema 2.1.1 y la observacion 2.1.1.

$$\begin{tikzcd}
\text{paracompact} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{nearly paracompact} \arrow[d, Rightarrow] & \\
S\text{-paracompact} \arrow[r, Rightarrow] & \text{nearly } S\text{-paracompact} \arrow[r, Rightarrow] & \text{almost paracompact}
\end{tikzcd}$$

Teorema 2.1.2. *Un espacio semiregular (X, τ) es nearly S-paracompacto si y solo si es S-paracompacto.*

Demostración. Claramente, si (X, τ) es S-paracompacto, entonces él es nearly S-paracompacto. En forma recíproca, suponga que (X, τ) es un espacio nearly S-paracompacto y sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento abierto de X. Para cada $x \in X$, existe un

$U_x \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U_x$ y, puesto que (X, τ) es semiregular, existe un conjunto regular abierto V_x tal que $x \in V_x \subset U_x$. Ahora, la colección $\mathcal{V} = \{V_x : x \in X\}$ es un cubrimiento regular abierto de X y, por lo tanto, tiene un refinamiento semi-abierto localmente finito $\mathcal{W}$ que cubre a X. Luego, $\mathcal{W}$ es un refinamiento semi-abierto localmente finito de $\mathcal{U}$ que cubre a X, por lo que (X, τ) es un espacio S-paracompacto. □

Teorema 2.1.3. *Sea (X, τ) un espacio almost regular. Entonces, (X, τ) es nearly S-paracompacto si y solo si cada cubrimiento regular abierto $\mathcal{U}$ de X tiene un refinamiento regular cerrado localmente finito $\mathcal{V}$ que cubre a X.*

Demostración. La suficiencia sigue directamente del hecho que cada conjunto regular cerrado es semi-abierto. Para demostrar la necesidad, sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento regular abierto de X. Para cada $x \in X$, existe $U_x \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U_x$. Puesto que (X, τ) es un espacio almost regular, por el teorema 1.2.1, existe un conjunto regular abierto W_x tal que $x \in W_x \subset \mathrm{Cl}(W_x) \subset U_x$. Así, la colección $\mathcal{W} = \{W_x : x \in X\}$ es un cubrimiento regular abierto de X y, como (X, τ) es un espacio nearly S-paracompacto, se sigue que $\mathcal{W}$ tiene un refinamiento semi-abierto localmente finito $\mathcal{G} = \{G_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ que cubre a X. Por la proposición 1.1.8, se tiene que $\mathrm{Cl}(G_\lambda)$ es un conjunto regular cerrado para cada $\lambda \in \Lambda$, por lo que $\mathcal{V} = \{\mathrm{Cl}(G_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ es una colección localmente finita de conjuntos regular cerrados. Puesto que $\mathcal{G}$ es un refinamiento de $\mathcal{W}$, para cada $\lambda \in \Lambda$ existe $W_{x(\lambda)} \in \mathcal{W}$ tal que $G_\lambda \subseteq W_{x(\lambda)}$, y así, para cada $\lambda \in \Lambda$, se tiene que $G_\lambda \subset W_{x(\lambda)} \subset \mathrm{Cl}(W_{x(\lambda)}) \subset U_{x(\lambda)}$ para algún $U_{x(\lambda)} \in \mathcal{U}$. Por lo tanto, para cada $\lambda \in \Lambda$, $\mathrm{Cl}(G_\lambda) \subset \mathrm{Cl}(W_{x(\lambda)}) \subset U_{x(\lambda)}$ para algún $U_{x(\lambda)} \in \mathcal{U}$. De esta manera, la colección $\mathcal{V} = \{\mathrm{Cl}(G_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ es un un refinamiento de $\mathcal{U}$. Finalmente, observe que $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{Cl}(G_\lambda)$, por lo que la colección $\mathcal{V}$ es un cubrimiento de X. □

Corolario 2.1.1. *Sea (X, τ) un espacio almost regular. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) (X, τ) es nearly S-paracompacto.

(2) (X, τ) es nearly paracompacto.

(3) (X, τ) *es almost paracompacto.*

(4) Cada cubrimiento regular abierto $\mathcal{U}$ *de* X *tiene un refinamiento regular cerrado localmente finito* $\mathcal{V}$ *que cubre a* X*.*

Demostración. Esto es una consecuencia inmediata del lema 1.4.1 y los teoremas 1.4.6, 2.1.1 y 2.1.3. □

Corolario 2.1.2. *Sea* (X, τ) *un espacio regular. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) (X, τ) *es nearly S-paracompacto.*

(2) (X, τ) *es paracompacto.*

(3) (X, τ) *es nearly paracompacto.*

(4) (X, τ) *es almost paracompacto.*

(5) (X, τ) *es S-paracompacto.*

(6) Cada cubrimiento regular abierto $\mathcal{U}$ *de* X *tiene un refinamiento regular cerrado localmente finito* $\mathcal{V}$ *que cubre a* X*.*

Demostración. Puesto que cada espacio regular es almost regular, las equivalencias entre (1), (3), (4) y (6) siguen del corolario 2.1.1. La implicación (2) $\Rightarrow$ (5) sigue del hecho que cada conjunto abierto es semi-abierto. La implicación (5) $\Rightarrow$ (4) sigue del teorema 1.4.7. La equivalencia entre (4) y (2) sigue del teorema 1.4.5. □

Teorema 2.1.4. *Sea* (X, τ) *un espacio y considere los siguientes enunciados:*

(1) (X, τ) *es Hausdorff nearly S-paracompacto.*

(2) Para cada subconjunto regular cerrado A *de* X *y cada* $x \notin A$*, existen conjuntos disjuntos* $U \in \mathrm{RO}(X, \tau)$ *y* $V \in \mathrm{SO}(X, \tau)$ *tales que* $x \in U$ *y* $A \subset V$*.*

(3) *Para cada* $G \in \mathrm{RO}(X,\tau)$ *y cada* $x \in G$*, existe* $U \in \mathrm{RO}(X,\tau)$ *tal que* $x \in U \subset \mathrm{sCl}(U) \subset G$*.*

Entonces, las siguientes implicaciones se satisfacen: (1) $\Rightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3).

Demostración. (1)$\Rightarrow$(2): Sea x cualquier punto en X y A un subconjunto regular cerrado de X tal que $x \notin A$. Puesto que (X,τ) es un espacio Hausdorff, por el lema 1.4.2, se tiene que para cada $y \in A$ existe un conjunto abierto W_y tal que $y \in W_y$ y $x \notin \mathrm{Cl}(W_y)$. Observe que $A \subseteq \bigcup\{W_y : y \in A\} \subseteq \bigcup\{\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(W_y)) : y \in A\}$ y la colección $\mathcal{W} = \{\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(W_y)) : y \in A\} \cup \{X - A\}$ es un cubrimiento regular abierto de X. Dado que (X,τ) es un espacio nearly S-paracompacto, por el lema 1.3.4, $\mathcal{W}$ tiene un refinamiento semi-abierto preciso localmente finito $\mathcal{M} = \{M_y : y \in A\} \cup \{G\}$ tal que $M_y \subseteq \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(W_y))$ para cada $y \in A$, $G \subset X - A$ y $\mathcal{M}$ es un cubrimiento de X. Observe que si $y \in A$, entonces $\mathrm{Cl}(M_y) \subset \mathrm{Cl}(W_y)$, por lo que $x \notin \mathrm{Cl}(M_y)$. Sea $V = \bigcup_{y\in A} M_y$. Entonces V es un conjunto semi-abierto tal que $A \subset V$. Puesto que $\mathcal{M}$ es localmente finito, se tiene que $\mathrm{Cl}(V) = \mathrm{Cl}(\bigcup_{y\in A} M_y) = \bigcup_{y\in A} \mathrm{Cl}(M_y)$. Así, por la proposición 1.1.4, $\mathrm{Cl}(V)$ es un conjunto regular cerrado que no contiene a x y, por lo tanto, $U = X - \mathrm{Cl}(V)$ es un conjunto regular abierto tal que $x \in U$ y $U \cap V = (X - \mathrm{Cl}(V)) \cap V = \emptyset$.

(2)$\Rightarrow$(3): Sea $G \in \mathrm{RO}(X,\tau)$ y $x \in G$. Entonces $A = X - G$ es un conjunto regular cerrado tal que $x \notin A$. Por el inciso (2), existen conjuntos disjuntos $U \in \mathrm{RO}(X,\tau)$ y $V \in \mathrm{SO}(X,\tau)$ tales que $x \in U$ y $A \subset V$, por lo que $x \in U \subset \mathrm{sCl}(U)$. Se demostrará que $\mathrm{sCl}(U) \subset G$. Puesto que $U \cap V = \emptyset$, por el teorema 1.1.8, se sigue que $\mathrm{sCl}(U) \cap V = \emptyset$, por lo que $\mathrm{sCl}(U) \subset X - V$ y, así, $A \cap \mathrm{sCl}(U) \subset A \cap (X - V) = \emptyset$. Consecuentemente, $A \cap \mathrm{sCl}(U) = \emptyset$ y esto implica que $\mathrm{sCl}(U) \subset X - A$. Por lo tanto, $\mathrm{sCl}(U) \subset G$.

(3) $\Rightarrow$ (2): Sea A un subconjunto regular cerrado de X y sea $x \in X$ tal que $x \notin A$. Entonces $G = X - A$ es un subconjunto regular abierto de X con $x \in G$. Por el inciso (3), existe $U \in \mathrm{RO}(X,\tau)$ tal que $x \in U$ y $\mathrm{sCl}(U) \subset G$. Así, el conjunto $V = X - \mathrm{sCl}(U) \in \mathrm{SO}(X,\tau)$ y $U \cap V = U \cap (X - \mathrm{sCl}(U)) \subset U \cap (X - U) = \emptyset$. Además,

$A - V = A - (X - \mathrm{sCl}(U)) = A \cap \mathrm{sCl}(U) = (X - G) \cap \mathrm{sCl}(U) = \mathrm{sCl}(U) - G = \emptyset$, por lo que $A \subset V$. □

Corolario 2.1.3. *Si (X, τ) es un espacio de Hausdorff extremadamente disconexo nearly S-paracompacto, entonces él es almost regular. Consecuentemente, (X, τ) es nearly paracompacto.*

Demostración. Sea $U \in \mathrm{RO}(X, \tau)$ y $x \in U$. Por el teorema 2.1.4, existe $V \in \mathrm{RO}(X, \tau)$ tal que $x \in V$ y $\mathrm{sCl}(V) \subset U$. Siendo (X, τ) un espacio extremadamente disconexo, por el lema 1.2.2, se tiene que $\mathrm{sCl}(V) = \mathrm{Cl}(V)$ y así, existe $V \in \mathrm{RO}(X, \tau)$ tal que $x \in V \subset \mathrm{Cl}(V) \subset U$. Ahora, por el teorema 1.2.1, se sigue que (X, τ) es un espacio almost regular. Del corolario 2.1.1 se infiere que (X, τ) es nearly paracompacto. □

Teorema 2.1.5. *Si (X, τ) es un espacio nearly S-paracompacto contablemente S-cerrado, entonces (X, τ) es nearly compacto.*

Demostración. Sea $\mathcal{U} = \{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ un cubrimiento regular abierto de X. Puesto que (X, τ) es nearly S-paracompacto, $\mathcal{U}$ tiene un refinamiento semi-abierto localmente finito $\mathcal{V} = \{V_\mu : \mu \in \Delta\}$ que cubre a X. Dado que $\mathcal{V}$ es una colección s-localmente finita y (X, τ) es un espacio contablemente S-cerrado, por el teorema 1.3.2, se tiene que $\mathcal{V}$ es finita. Sin pérdida de generalidad, suponga que $\mathcal{V} = \{V_{\mu_i} : i = 1, 2, \ldots, n\}$. Puesto que $\mathcal{V}$ refina $\mathcal{U}$, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, existe $U_{\lambda(i)} \in \mathcal{U}$ tal que $V_{\mu_i} \subset U_{\lambda(i)}$. Así, $X = \bigcup\{V_\mu : \mu \in \Delta\} = \bigcup\{V_{\mu_i} : i = 1, \ldots, n\} \subset \bigcup\{U_{\lambda(i)} : i = 1, \ldots, n\}$, por lo que (X, τ) es nearly compacto. □

Corolario 2.1.4. *Sea (X, τ) un espacio extremadamente disconexo. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) (X, τ) es nearly S-paracompacto y S-cerrado.

(2) (X, τ) es nearly compacto.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2): Puesto que cada espacio S-cerrado es contablemente S-cerrado, el teorema 2.1.5 garantiza que (X, τ) es nearly compacto.

(2) $\Rightarrow$ (1): Sea $\mathcal{U} = \{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ un cubrimiento semi-abierto de (X, τ). Entonces, para cada $\lambda \in \Lambda$ existe un conjunto abierto V_λ tal que $V_\lambda \subset U_\lambda \subset \mathrm{Cl}(V_\lambda)$ y, como (X, τ) es extremadamente disconexo, se tiene que $\mathrm{Cl}(V_\lambda) \in \tau$ para cada $\lambda \in \Lambda$. Por lo tanto, $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Cl}(V_\lambda)$ y, así, la colección $\mathcal{V} = \{\mathrm{Cl}(V_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ es un cubrimiento abierto de X. Ahora, dado que (X, τ) es nearly compacto, existe una subcoleccion $\{\mathrm{Cl}(V_{\lambda_i}) : i = 1, 2, \ldots, n\} \subset \mathcal{V}$ tal que $X = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Cl}(V_{\lambda_i}) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Cl}(U_{\lambda_i})$. Esto demuestra que (X, τ) es S-cerrado. Finalmente, puesto que cada espacio nearly compacto es nearly paracompacto, se sigue que (X, τ) es nearly S-paracompacto. □

Teorema 2.1.6. *Un espacio (X, τ) es nearly S-paracompacto si y solo si (X, τ^α) es nearly S-paracompacto.*

Demostración. Por el corolario 1.1.3 y el teorema 1.1.13, se tiene que $\mathrm{RO}(X, \tau) = \mathrm{RO}(X, \tau^\alpha)$ y $\mathrm{SO}(X, \tau) = \mathrm{SO}(X, \tau^\alpha)$, respectivamente. Por lo tanto, la prueba sigue inmediatamente de estos resultados. □

Corolario 2.1.5. *Sea (X, τ) un espacio extremadamente disconexo. Entonces, (X, τ_{so}) es nearly S-paracompacto si y solo si (X, τ) es nearly S-paracompacto.*

Demostración. Si (X, τ) es un espacio extremadamente disconexo, entonces por el corolario 1.2.2, se tiene que $\tau^\alpha = \mathrm{SO}(X, \tau) = \tau_{so}$. El resto de la prueba sigue del teorema 2.1.6. □

2.2. Subconjuntos α-nearly S-paracompactos

La noción de subconjunto α-paracompacto fue introducida por C. E. Aull [2] en 1966. Se dice que un subconjunto A de un espacio (X, τ) es α-paracompacto si cada cubrimiento abierto de A tiene un refinamiento abierto localmente finito que cubre a A. Reemplazando el cubrimiento abierto por un cubrimiento regular abierto en la definición de subconjunto α-paracompacto, en 1979, I. Koväcević introdujo la clase de subconjuntos α-nearly paracompactos, como sigue: " Un subconjunto A de un espacio (X, τ) se dice α-nearly paracompacto, si cada cubrimiento regular abierto de A tiene un refinamiento abierto localmente finito que cubre a A". En forma similar, en 2006, K. Y. Al-Zoubi [1] introdujo la noción de subconjunto αS-paracompacto de la siguiente manera: " Un subconjunto A de un espacio (X, τ) se dice αS-paracompacto, si cada cubrimiento abierto de A tiene un refinamiento semi-abierto localmente finito que cubre a A". En esta sección, se introduce la noción de subconjunto α-nearly S-paracompacto, cuya definición es similar a los distintos conceptos de subconjuntos antes mencionados, pero en este caso el cubrimiento dado está formado por conjuntos regular abiertos y el refinamiento está formado por conjuntos semi-abiertos.

Definición 2.2.1. *Un subconjunto A de un espacio (X, τ) se dice **α-nearly S-paracompacto**, si cada cubrimiento regular abierto $\mathcal{U}$ de A tiene un refinamiento semi-abierto $\mathcal{V}$ que es localmente finito y es un cubrimiento de A.*

Observación 2.2.1. *Cada subconjunto αS-paracompacto es α-nearly S-paracompacto y cada subconjunto α-nearly paracompacto es α-nearly S-paracompacto.*

Ejemplo 2.2.1. Existe un espacio X y un subconjunto α-nearly S-paracompacto A de X que no es αS-paracompacto en X. Sea $X = \{a, b, c, a_i : i = 1, 2, \ldots\}$. Se dota a X de la siguiente topología: los puntos c y a_i son aislados; el sistema fundamental de vecindades del punto a es $\{O_n(a) : n = 1, 2, \ldots\}$, donde

$$O_n(a) = \{a, a_i : i \geq n\};$$

el sistema fundamental de vecindades del punto b es $\{O_n(b) : n = 1, 2, \ldots\}$, donde

$$O_n(b) = O_n(a) \cup \{b, c\}.$$

I. Koväcević [10] demostró que el conjunto $A = \{b, a_i : i = 1, 2, \ldots\}$ es α-nearly paracompacto en X y, por lo tanto, es α-nearly S-paracompacto. Por otra parte, A

no es αS-paracompacto en X, pues si se considera el cubrimiento

$$\mathcal{V} = \{O_n(b) : n = 1, 2, \ldots\}$$

de A por subconjuntos abiertos de X, se tiene que cada refinamiento semi-abierto de $\mathcal{V}$ que cubre a A no es localmente finito en el punto b, por lo que A no es αS-paracompacto en X. En efecto, suponga que $\mathcal{W}$ es un refinamiento semi-abierto de $\mathcal{V}$ que cubre a A. Entonces se analizan los siguientes casos de puntos de A:

(1) Como $a_1 \in A$, existe $W_1 \in \mathcal{W}$ tal que $a_1 \in W_1 \cap O_1(b) \subset O_1(b)$.

(2) Como $a_2 \in A$, existe $W_2 \in \mathcal{W}$ tal que $a_2 \in W_2 \cap O_2(b) \subset O_2(b)$.

(3) Como $a_3 \in A$, existe $W_3 \in \mathcal{W}$ tal que $a_3 \in W_3 \cap O_3(b) \subset O_3(b)$.

.

(k) Como $a_k \in A$, existe $W_k \in \mathcal{W}$ tal que $a_k \in W_k \cap O_k(b) \subset O_k(b)$.

.

Sean $U_1 = W_1 \cap O_1(b)$, $U_2 = W_2 \cap O_2(b)$, $U_3 = W_3 \cap O_3(b), \ldots, U_k = W_k \cap O_k(b), \ldots$. Como $O_1(b) \supset O_2(b) \supset O_3(b) \supset \ldots \supset O_k(b) \supset$, se tiene que:

- $a_1 \in U_1 = W_1 \cap O_1(b) \subset O_1(b)$,
- $a_2 \in U_2 = W_2 \cap O_2(b) \subset O_2(b) \subset O_1(b)$,
- $a_3 \in U_3 = W_3 \cap O_3(b) \subset O_3(b) \subset O_2(b) \subset O_1(b)$,

  .

- $a_k \in U_k = W_k \cap O_k(b) \subset O_k(b) \subset O_{k-1}(b) \subset O_{k-2}(b) \subset ..... \subset O_1(p)$,

  .

Luego:

- $U_k \subset O_1(b)$ para cada $k \geq 1$,
- $U_k \subset O_2(b)$ para cada $k \geq 2$,

- $U_k \subset O_3(b)$ para cada $k \geq 3$,

  .

- $U_k \subset O_n(b)$ para cada $k \geq n$.

  .

Por lo tanto, cada vecindad del punto b interseca un número infinito de conjuntos $W_k \in \mathcal{W}$. Así, $\mathcal{W}$ no es localmente finito en el punto p. □

Ejemplo 2.2.2. *Existe un espacio X y un subconjunto α-nearly S-paracompacto A de X que no es α-nearly paracompacto en X. Considere el espacio X dado en el ejemplo 2.1.1. P.-Y. Li y Y.-K. Song [12] demostraron que $A = \{p\} \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} [2n, 2n+1]$ es un subconjunto αS-paracompacto de X y por lo tanto, α-nearly S-paracompacto en X. Por otra parte, A no es α-nearly paracompacto en X, pues si se considera el cubrimiento*

$$\mathcal{V} = \left\{\left[0, \tfrac{1}{3}\right)\right\} \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} \left\{\left(i - \tfrac{1}{3}, i + \tfrac{1}{3}\right)\right\} \cup \left\{\bigcup_{i=0}^{\infty} (2i, 2i+1) \cup \{p\}\right\}$$

de A por subconjuntos regular abiertos de X, se tiene que cada refinamiento abierto de $\mathcal{V}$ que cubre a A no es localmente finito en el punto p, por lo que A no es α-nearly paracompacto en X. En efecto, suponga que $\mathcal{W}$ es un refinamiento abierto de $\mathcal{V}$ que cubre a A. Entonces se analizan los siguientes casos de puntos de A:

(1) $x_1 \in A$, $\frac{7}{3} < x_1 < \frac{8}{3}$. Existe $W_1 \in \mathcal{W}$ tal que $x_1 \in W_1 \cap O_1(p) \subset O_1(p)$.

(2) $x_2 \in A$, $\frac{13}{3} < x_2 < \frac{14}{3}$. Existe $W_2 \in \mathcal{W}$ tal que $x_2 \in W_2 \cap O_2(p) \subset O_2(p)$.

(3) $x_3 \in A$, $\frac{17}{3} < x_3 < \frac{20}{3}$. Existe $W_3 \in \mathcal{W}$ tal que $x_3 \in W_3 \cap O_3(p) \subset O_3(p)$.

.

(k) $x_k \in A$, $2k + \frac{1}{3} < x_k < 2k + \frac{2}{3}$. Existe $W_k \in \mathcal{W}$ tal que $x_k \in W_k \cap O_k(p) \subset O_k(p)$.

.

Sean $U_1 = W_1 \cap O_1(p)$, $U_2 = W_2 \cap O_2(p)$, $U_3 = W_3 \cap O_3(p), \ldots$, $U_k = W_k \cap O_k(p), \ldots$. Como $O_1(p) \supset O_2(p) \supset O_3(p) \supset \ldots \supset O_k(p) \supset \ldots$, se tiene que:

- *$x_1 \in U_1 = W_1 \cap O_1(p) \subset O_1(p)$,*

- $x_2 \in U_2 = W_2 \cap O_2(p) \subset O_2(p) \subset O_1(p)$,
- $x_3 \in U_3 = W_3 \cap O_3(p) \subset O_3(p) \subset O_2(p) \subset O_1(p)$,

  $\vdots$
- $x_k \in U_k = W_k \cap O_k(p) \subset O_k(p) \subset O_{k-1}(p) \subset O_{k-2}(p) \subset \ldots \subset O_1(p)$,

  $\vdots$

Luego:

- $U_k \subset O_1(p)$ *para cada* $k \geq 1$,
- $U_k \subset O_2(p)$ *para cada* $k \geq 2$,
- $U_k \subset O_3(p)$ *para cada* $k \geq 3$,

  $\vdots$
- $U_k \subset O_n(p)$ *para cada* $k \geq n$.

  $\vdots$

Por lo tanto, cada vecindad del punto p interseca un número infinito de conjuntos $W_k \in \mathcal{W}$. *Así,* $\mathcal{W}$ *no es localmente finito en el punto p.* □

Teorema 2.2.1. *Cada subconjunto δg-cerrado en un espacio nearly S-paracompacto es α-nearly S-paracompacto.*

Demostración. Suponga que A es un subconjunto δg-cerrado de un espacio nearly S-paracompacto (X, τ) y sea $\mathcal{U} = \{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ un cubrimiento regular abierto de A. Puesto que $A \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ y A es δg-cerrado, se tiene que $\mathrm{Cl}_\delta(A) \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$. Para cada $x \notin \mathrm{Cl}_\delta(A)$, existe un conjunto abierto W_x tal que $x \in W_x$ y $A \cap \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(W_x)) = \emptyset$. Sea $\mathcal{U}' = \{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \cup \{\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(W_x)) : x \notin \mathrm{Cl}_\delta(A)\}$. Entonces, $\mathcal{U}'$ es un cubrimiento regular abierto del espacio nearly S-paracompacto (X, τ), por lo que $\mathcal{U}'$ tiene un refinamiento semi-abierto $\mathcal{V} = \{V_\beta : \beta \in \Delta\}$ que es localmente finito y cubre a X. Para cada $\beta \in \Delta$, se tiene que $V_\beta \subset U_{\lambda(\beta)}$ para algún $\lambda(\beta) \in \Lambda$ o que $V_\beta \subset$

$\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(W_{x(\beta)}))$ para cada $x(\beta) \notin \mathrm{Cl}_\delta(A)$. Luego, la colección $\mathcal{V}' = \{V_\beta : \beta \in \Delta_0\}$ donde $\Delta_0 = \{\beta \in \Delta : V_\beta \subseteq U_{\lambda(\beta)}\}$ es un refinamiento semi-abierto de $\mathcal{U}$ que es localmente finito. Se afirma que $A \subset \bigcup_{\beta\in\Delta_0} V_\beta$. Si $z \notin \bigcup_{\beta\in\Delta_0} V_\beta$, entonces $z \notin V_\beta$ para cada $\beta \in \Delta_0$ y, como $\mathcal{V}$ es un cubrimiento de X, existe $\beta_0 \notin \Delta$ tal que $z \in V_{\beta_0} \subset \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(W_{x(\beta_0)}))$, con $x(\beta_0) \notin \mathrm{Cl}_\delta(A)$. Puesto que $A \cap \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(W_{x(\beta_0)})) = \emptyset$, se concluye que $z \notin A$ y consecuentemente, $A \subset \bigcup_{\beta\in\Delta_0} V_\beta$. Esto demuestra que A es un subconjunto α-nearly S-paracompacto de (X, τ). □

Teorema 2.2.2. *Sea (X, τ) un espacio. Entonces, las siguientes propiedades se satisfacen:*

(1) Si A es un subconjunto abierto α-nearly S-paracompacto de (X, τ), entonces (A, τ_A) es nearly S-paracompacto.

(2) Si A es un subconjunto clopen de (X, τ), entonces A es α-nearly S-paracompacto en (X, τ) si y solo si (A, τ_A) es nearly S-paracompacto.

Demostración. (1) Suponga que A es un subconjunto abierto nearly αS-paracompacto de un espacio (X, τ). Sea $\mathcal{U} = \{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ un cubrimiento de A por conjuntos regular abiertos en (A, τ_A). Como A es abierto en (X, τ), por el lema 1.1.4, se sigue que $U_\lambda = V_\lambda \cap A$, con $V_\lambda \in \mathrm{RO}(X, \tau)$, para cada $\lambda \in \Lambda$. Claramente, $\mathcal{V} = \{V_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es un cubrimiento de A por conjuntos regular abiertos en (X, τ) y puesto que A es α-nearly S-paracompacto, existe una colección $\mathcal{W} = \{W_\beta : \beta \in \Delta\}$ de conjuntos semi-abiertos en (X, τ) tal que $\mathcal{W}$ es localmente finita en (X, τ) y es un refinamiento de $\mathcal{V}$ que cubre a A. Ahora, se probará que $\mathcal{W}_A = \{W_\beta \cap A : \beta \in \Delta\}$ es una colección localmente finita de conjuntos semi-abiertos en (A, τ_A) tal que $\mathcal{W}_A$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$ que cubre a A. En efecto:

- $\mathcal{W}_A = \{W_\beta \cap A : \beta \in \Delta\}$ es una colección de conjuntos semi-abiertos en (A, τ_A). Como A es abierto en (X, τ) y $W_\beta \in \mathrm{SO}(X, \tau)$ para cada $\beta \in \Delta$, por el corolario 1.1.1, se tiene que $W_\beta \cap A \in \mathrm{SO}(A, \tau_A)$ para cada $\beta \in \Delta$.

- $\mathcal{W}_A$ es localmente finita en (A, τ_A). Sea $a \in A \subset X$. Como $\mathcal{W}_A$ es localmente finita en (X, τ), existe $U_a \in \tau$ tal que $a \in U_a$ y el conjunto $\{\beta \in \Delta : W_\beta \cap U_a \neq \emptyset\}$ es finito. Dado que $a \in U_a \cap A$, $U_a \cap A \in \tau_A$ y $\{\beta \in \Delta : (A \cap W_\beta) \cap (U_a \cap A) \neq \emptyset\}$ $= \{\beta \in \Delta : W_\beta \cap (U_a \cap A) \neq \emptyset\} \subset \{\beta \in \Delta : W_\beta \cap U_a \neq \emptyset\}$, se concluye que $\mathcal{W}_A = \{W_\beta \cap A : \beta \in \Delta\}$ es localmente finita en (A, τ_A).

- $\mathcal{W}_A$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$. Dado que $\mathcal{W} = \{W_\beta : \beta \in \Delta\}$ es un refinamiento de $\mathcal{V} = \{V_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, se tiene que para cada $\beta \in \Delta$, existe $\lambda(\beta) \in \Lambda$ tal que $W_\beta \subset V_{\lambda(\beta)}$, por lo que $W_\beta \cap A \subset V_{\lambda(\beta)} \cap A = U_{\lambda(\beta)}$. Así, para cada $\beta \in \Delta$ existe $\lambda(\beta) \in \Lambda$ tal que $W_\beta \cap A \subset U_{\lambda(\beta)}$ y por lo tanto, $\mathcal{W}_A$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$.

- $\mathcal{W}_A$ es un cubrimiento de A. Puesto que $\mathcal{W} = \{W_\beta : \beta \in \Delta\}$ es un cubrimiento de A, se obtiene que $A \subset \left(\bigcup_{\beta\in\Delta} W_\beta\right) \cap A = \bigcup_{\beta\in\Delta} (W_\beta \cap A)$.

De esta manera, se ha demostrado que (A, τ_A) es un espacio nearly S-paracompacto.
(2) Si A es un subconjunto clopen y α-nearly S-paracompacto de (X, τ), entonces por el inciso (1), se obtiene que (A, τ_A) es un espacio nearly S-paracompacto. En forma recíproca, sea $\mathcal{U} = \{U_\beta : \beta \in \Delta\}$ un cubrimiento de A por conjuntos regular abiertos en (X, τ). Por el lema 1.1.4, $\mathcal{U}_A = \{U_\beta \cap A : \beta \in \Delta\}$ es una colección de conjuntos regular abiertos en (A, τ_A) y, como (A, τ_A) es un espacio nearly S-paracompacto, existe una colección $\mathcal{W} = \{W_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ de conjuntos semi-abiertos en (A, τ_A) tal que $\mathcal{W}$ es localmente finita en (A, τ_A) y es un refinamiento de $\mathcal{U}$ que cubre a A. Por el teorema 1.1.10, se tiene que $W_\lambda \in SO(X, \tau)$ para cada $\lambda \in \Lambda$. Además, como $\mathcal{W}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}_A$, para cada $\lambda \in \Lambda$ existe $\beta(\lambda) \in \Delta$ tal que $W_\lambda \subset A \cap U_{\beta(\lambda)} \subset U_{\beta(\lambda)}$, por lo que $\mathcal{W}$ es una colección semi-abierta en (X, τ) que es un refinamiento de $\mathcal{U}$. Ahora, se mostrará que $\mathcal{W}$ es una colección localmente finita en (X, τ). Sea $x \in X$. Si $x \in A$, entonces existe $O_x \in \tau_A$ tal que $x \in O_x$ y O_x interseca a lo más un número finito de elementos de $\mathcal{W}$. Por otro lado, si $x \notin A$, entonces $X - A$ es un conjunto abierto en (X, τ) que contiene a x y que no interseca a miembros de $\mathcal{W}$. Por lo tanto,

$\mathcal{W}$ es una colección localmente finita en (X, τ). Esto demuestra que A es un conjunto α-nearly S-paracompacto en (X, τ). □

Corolario 2.2.1. *Cada subespacio clopen de un espacio nearly S-paracompacto es nearly S-paracompacto.*

Demostración. Suponga que A es un subespacio clopen de un espacio nearly S-paracompacto (X, τ). Puesto que A es clopen, por la proposición 1.1.15, se tiene que A es δ-cerrado y por lo tanto, δg-cerrado. Así, por el teorema 2.2.1, se sigue que A es α-nearly S-paracompacto. Finalmente, por el teorema 2.2.2, se concluye que A es nearly S-paracompacto. □

Teorema 2.2.3. *Si (X, τ) es un espacio Hausdorff y A es un subconjunto α-nearly S-paracompacto de (X, τ), entonces A es un conjunto ϑs-cerrado.*

Demostración. Sea $x \notin A$. Puesto que (X, τ) es Hausdorff, por el lema 1.4.2, para cada $y \in A$ existe un conjunto abierto U_y tal que $y \in U_y$ y $x \notin \mathrm{Cl}(U_y)$. Como $U_y \subset \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(U_y))$, se sigue que la colección $\mathcal{U} = \{\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(U_y)) : y \in A\}$ es un cubrimiento de A por subconjuntos regular abiertos de X y, dado que A es α-nearly S-paracompacto, existe una colección $\mathcal{V}$ de conjuntos semi-abiertos en X tal que $\mathcal{V}$ es localmente finita y es un refinamiento de $\mathcal{U}$ que cubre a A. Sea $W = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V$ y $W' = X - \mathrm{Cl}(W)$. Observe que $A \subset W$, $W \in SO(X, \tau)$, $W' \in \tau$ y $W' \subset s\mathrm{Cl}(W') \subset s\mathrm{Cl}(X - \mathrm{Cl}(W)) \subset s\mathrm{Cl}(X - W) = X - W \subset X - A$, por lo que $W' \subset s\mathrm{Cl}(X - A)$. Se afirma que $x \in W'$, pues en caso contrario tendríamos que $x \in \mathrm{Cl}(W)$ y, por lo tanto, $x \in \mathrm{Cl}(V)$ para algún $V \in \mathcal{V}$, por lo que existiría $y \in A$ tal que $V \subset \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(U_y)) \subset \mathrm{Cl}(U_y)$ y, así, se concluiría que $x \in \mathrm{Cl}(U_y)$, contradiciendo el hecho que $x \notin \mathrm{Cl}(U_y)$. Esto demuestra que $X - A$ es un conjunto ϑs-abierto y, por lo tanto, A es un conjunto ϑs-cerrado. □

Teorema 2.2.4. *Sea (X, τ) un espacio regular y A un subconjunto de X. Entonces, A es αS-paracompacto en (X, τ) si y solo si A es α-nearly S-paracompacto en (X, τ).*

Demostración. Si A es un subconjunto αS-paracompacto de (X, τ), entonces A es α-nearly S-paracompacto en (X, τ), ya que cada conjunto regular abierto es abierto.

Para el recíproco, sea $\mathcal{U} = \{U_\beta : \beta \in \Delta\}$ un cubrimiento de A por subconjuntos abiertos de (X, τ). Para cada $x \in A$, existe un $\beta(x) \in \Delta$ tal que $x \in U_{\beta(x)}$ y, como (X, τ) es un espacio regular, existe un subconjunto abierto V_x de (X, τ) tal que $x \in V_x \subset \mathrm{Cl}(V_x) \subset U_{\beta(x)}$. Según esto, $\mathcal{V} = \{V_x : x \in A\}$ es un cubrimiento de A por subconjuntos abiertos de (X, τ) y como $V_x \subset \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(V_x))$, se tiene que $\mathcal{V}' = \{\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(V_x)) : x \in A\}$ es un cubrimiento de A por conjuntos regular abiertos en (X, τ). Puesto que A es α-nearly S-paracompacto, existe una colección $\mathcal{W} = \{W_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ de conjuntos semi-abiertos en (X, τ) tal que W es localmente finita y es un refinamiento de $\mathcal{V}'$ que cubre a A. Además, para cada $\lambda \in \Lambda$, existe un $x(\lambda) \in A$ tal que $W_\lambda \subset \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(V_{x(\lambda)})) \subset \mathrm{Int}(U_{\beta(x(\lambda))}) = U_{\beta(x(\lambda))}$, por lo que $\mathcal{W}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$. Así, A es αS-paracompacto en (X, τ). □

Es conocido que en presencia del axioma de regularidad, las nociones de subconjuntos α-paracompactos y αS-paracompactos coinciden (véase [12, Theorem 2.13]). De acuerdo con el resultado anterior, se tiene el siguiente corolario.

Corolario 2.2.2. *Sea (X, τ) un espacio regular y A un subconjunto de X. Entonces, las siguientes propiedades son equivalentes:*

(1) A es α-paracompacto en (X, τ).

(2) A es αS-paracompacto en (X, τ).

(3) A es α-nearly S-paracompacto en (X, τ).

Proposición 2.2.1. *Sean A y B subconjuntos de (X, τ) tales que $A \subset B \subset \mathrm{sCl}(A)$. Si A es sg-cerrado y α-nearly S-paracompacto, entonces B es un subconjunto α-nearly S-paracompacto en (X, τ).*

Demostración. Sea $\mathcal{U} = \{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ un cubrimiento de B por conjuntos regular abiertos en (X, τ). Entonces, $A \subset B \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ y, por lo tanto, $\mathcal{U}$ es un cubrimiento de A por conjuntos regular abiertos en (X, τ). Puesto que A es α-nearly S-paracompacto, existe una colección $\mathcal{V} = \{V_\beta : \beta \in \Delta\}$ de conjuntos semi-abiertos en (X,τ) tal que $\mathcal{V}$ es localmente finita y es un refinamiento de $\mathcal{U}$ que cubre a A. Ahora, como A es sg-cerrado y $\bigcup_{\beta\in\Delta} V_\beta \in SO(X,\tau)$, se tiene que $sCl(A) \subset \bigcup_{\beta\in\Delta} V_\beta$. Por lo tanto, $B \subset sCl(A) \subset \bigcup_{\beta\in\Delta} V_\beta$ y, así, la colección $\mathcal{V}$ es un cubrimiento de B por conjuntos semi-abiertos en (X,τ). Esto demuestra que B es un subconjunto α-nearly S-paracompacto de (X,τ). □

Proposición 2.2.2. *Sean A y B subconjuntos de un espacio (X,τ) tales que $A \subset B$ y B es clopen. Entonces A es α-nearly S-paracompacto en (B,τ_B) si y solo si A es α-nearly S-paracompacto en (X,τ).*

Demostración. Sea $\mathcal{U} = \{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ un cubrimiento de A por conjuntos regular abiertos en (X,τ). Puesto que $A \subset B$ y $A \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$, se sigue que $A \subset B \cap \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(B \cap U_\lambda)$. Por el lema 1.1.4, la colección $\mathcal{U}' = \{B \cap U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es un cubrimiento de A por conjunto regular abiertos en (B,τ_B). Como A es α-nearly S-paracompacto en (B,τ_B), existe una colección $\mathcal{V} = \{V_\beta : \beta \in \Delta\}$ de conjuntos semi-abiertos en (B,τ_B) tal que $\mathcal{V}$ es localmente finita y es un refinamiento de $\mathcal{U}'$ que cubre a A. Por el teorema 1.1.10, se obtiene que $V_\beta \in SO(X,\tau)$ para cada $\beta \in \Delta$, por lo que $\mathcal{V}$ es una coleccion de conjuntos semi-abiertos de (X,τ). Como $\mathcal{V}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}'$, se tiene que para cada $\beta \in \Delta$, existe $\lambda(\beta) \in \Lambda$ tal que $V_\beta \subset B \cap U_{\lambda(\beta)} \subset U_{\lambda(\beta)}$, por lo que $\mathcal{V}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$. Ahora, se probará que $\mathcal{V} = \{V_\beta : \beta \in \Delta\}$ es localmente finita en (X,τ). Sea $x \in X$. Si $x \in B$, entonces existe $O_x \in \tau_B \subset \tau$ tal que $x \in O_x$ y O_x interseca a lo sumo un número finito de elementos de $\mathcal{V}$. Por otro lado, si $x \notin B$, entonces $X - B$ es un conjunto abierto en (X,τ) que contiene a x y que no interseca a miembros de $\mathcal{V}$. Por lo tanto, $\mathcal{V}$ es localmente finita en (X,τ). Esto demuestra que A es un conjunto α-nearly S-paracompacto en (X,τ). En forma recíproca, sea $\mathcal{U} = \{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ un cubrimiento de A por conjuntos regular abiertos en (B,τ_B). Puesto que $B \in RO(X,\tau)$, por el teorema 1.1.1, se sigue que $\mathcal{U}$ es un cubrimiento de A por subconjuntos regular abiertos de (X,τ) y, como A es α-nearly S-paracompacto en (X,τ), existe una colección $\mathcal{V} = \{V_\beta : \beta \in \Delta\}$ de subconjuntos semi-abiertos de (X, τ) tal que $\mathcal{V}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ es localmente finita en en (X, τ) y $\mathcal{V}$ es un cubrimiento de A. Dado que $B \in \tau$, por el corolario 1.1.1, se obtiene que $\mathcal{V}_B = \{V_\beta \cap B : \beta \in \Delta\}$ es una colección de conjuntos semi-abiertos en (B, τ_B). Ahora, se demostrará que la colección $\mathcal{V}_B = \{V_\beta \cap B : \beta \in \Delta\}$ es localmente finita en (B, τ_B). Sea $b \in B \subset X$. Puesto que $\mathcal{V}$ es localmente finita en (X, τ), existe $U_b \in \tau$ tal que $b \in U_b$ y el conjunto $\{\beta \in \Delta : V_\beta \cap U_b \neq \emptyset\}$ es finito. Como $b \in U_b \cap B$, $U_b \cap B \in \tau_B$ y $\{\beta \in \Delta : (B \cap V_\beta) \cap (U_b \cap B) \neq \emptyset\} = \{\beta \in \Delta : V_\beta \cap (U_b \cap B) \neq \emptyset\} \subset \{\beta \in \Delta : V_\beta \cap U_b \neq \emptyset\}$, se concluye que $\mathcal{V}_B = \{V_\beta \cap B : \beta \in \Delta\}$ es localmente finita en (B, τ_B). Para finalizar, se demostrará que $\mathcal{V}_B$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$ que cubre a A. Como $\mathcal{V} = \{V_\beta : \beta \in \Delta\}$ es un refinamiento de $\mathcal{U} = \{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, se tiene que para cada $\beta \in \Delta$, existe $\lambda(\beta) \in \Lambda$ tal que $V_\beta \subset U_{\lambda(\beta)}$, por lo que $V_\beta \cap B \subset U_{\lambda(\beta)} \cap B \subset U_{\lambda(\beta)}$. Luego, para cada $\beta \in \Delta$, existe $\lambda(\beta) \in \Lambda$ tal que $V_\beta \cap B \subset U_{\lambda(\beta)}$, por lo que $\mathcal{V}_B$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$. Además, dado que la colecćción $\mathcal{V} = \{V_\beta : \beta \in \Delta\}$ es un cubrimiento de A y $A \subset B$, se obtiene que $A \subset \left(\bigcup_{\beta\in\Delta} V_\beta\right) \cap B = \bigcup_{\beta\in\Delta} (V_\beta \cap B)$, por lo que la colección $\mathcal{V}_B = \{V_\beta : \beta \in \Delta\}$ es un cubrimiento de A y en consecuencia, A es α-nearly S-paracompacto en (B, τ_B). □

Capítulo 3

Comportamiento bajo funciones, suma y producto

3.1. Invarianza bajo funciones perfectas

En esta sección, se introducen las nociones de funciones abiertas, regular abiertas, cerradas, regular cerradas, perfectas y regular perfectas, para estudiar la invarianza de los espacios nearly S-paracompactos bajo imágenes directas e inversas de tales funciones. En lo que sigue, se considera que X y Y son conjuntos que están dotados de sendas topologías. Además, para una función $f : X \to Y$ y un punto $y \in Y$, se denota a la imagen inversa $f^{-1}(\{y\})$ por $f^{-1}(y)$.

Definición 3.1.1. *Una función $f : X \to Y$ se dice:*

*(1) **Abierta** [28], si $f(U)$ es un subconjunto abierto de Y para cada subconjunto abierto U de X.*

*(2) **Almost abierta** [14], si $f(U)$ es un subconjunto abierto de Y para cada subconjunto regular abierto U de X.*

*(3) **Cerrada** [28], si $f(U)$ es un subconjunto cerrado de Y para cada subconjunto cerrado U de X.*

(4) ***Regular abierta*** *[4], si $f(U)$ es un subconjunto regular abierto para cada subconjunto abierto U de X.*

(5) ***Regular cerrada*** *[4], si $f(U)$ es un subconjunto regular cerrado para cada subconjunto cerrado U de X.*

(6) ***Perfecta*** *[28], si f es sobreyectiva, continua, cerrada y la fibra $f^{-1}(y)$ es compacta para cada $y \in Y$.*

(7) ***Regular perfecta*** *[4], si f es sobreyectiva, continua, regular-cerrada y la fibra $f^{-1}(y)$ es compacta para cada $y \in Y$.*

(8) ***Almost continua*** [14], *si $f^{-1}(U)$ es un conjunto abierto en X para cualquier conjunto U regular abierto en Y.*

(9) ***Almost completamente continua*** [8], *si $f^{-1}(U)$ es un conjunto regular abierto en X para cualquier conjunto U regular abierto en Y.*

Observación 3.1.1. *De la definición 3.1.1 se tienen los hechos siguientes:*

(1) *Dado que un conjunto es regular abierto si y solo si su complemento es regular cerrado, se sigue que una función $f : X \to Y$ es almost continua (resp. almost completamente continua) si y solo si $f^{-1}(B)$ es un conjunto cerrado (resp. regular cerrado) en X para cualquier conjunto B regular cerrado en Y.*

(2) *Dado que cada conjunto regular abierto es abierto, se tiene que cada función abierta es almost abierta y cada función continua es almost continua.*

(3) *Dado que cada conjunto regular cerrado es cerrado, se tiene que cada función regular cerrada es cerrada. Además, cada función regular abierta es abierta y, por lo tanto, es almost abierta.*

Lema 3.1.1. *Una función $f : X \to Y$ es abierta si y solo si $f^{-1}(\mathrm{Cl}(G)) \subset \mathrm{Cl}(f^{-1}(G))$ para cada conjunto $G \subset Y$.*

Demostración. Suponga que f es una función abierta y que existe un conjunto $G \subset Y$ tal que la inclusión $f^{-1}(\mathrm{Cl}(G)) \subset \mathrm{Cl}(f^{-1}(G))$ no se cumple. Entonces, existe un punto $z \in f^{-1}(\mathrm{Cl}(G))$ tal que $z \notin \mathrm{Cl}(f^{-1}(G))$. Así, $f(z) \in \mathrm{Cl}(G)$ y existe un conjunto abierto $V \subset X$ tal que $z \in V$ y $f^{-1}(G) \cap V = \emptyset$. Observe que $f(z) \in f(V)$ y $f(V)$ es un conjunto abierto en Y, de manera que $f(V) \cap G \neq \emptyset$. Luego, $\emptyset = f(\emptyset) = f(f^{-1}(G) \cap V) = f(V) \cap G$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $f^{-1}(\mathrm{Cl}(G)) \subset \mathrm{Cl}(f^{-1}(G))$ para cada conjunto $G \subset Y$. En forma recíproca, suponga que para cada conjunto $G \subset Y$ se cumple que $f^{-1}(\mathrm{Cl}(G)) \subset \mathrm{Cl}(f^{-1}(G))$ y la función f no es abierta, luego existe un conjunto abierto $U \subset X$ tal que $f(U)$ no es abierto, esto es, existe un punto $y \in f(U)$ tal que $y \notin \mathrm{Int}(f(U))$. Entonces para cada conjunto abierto V en Y tal que $y \in V$, se tiene que $V \not\subset f(U)$ y, así $V \cap (Y - f(U)) \neq \emptyset$, por b que $y \in \mathrm{Cl}(Y - f(U))$. De esta manera, $f^{-1}(y) \subset f^{-1}(\mathrm{Cl}(Y - f(U))) \subset \mathrm{Cl}(f^{-1}(Y - f(U))) = \mathrm{Cl}(f^{-1}(Y) - f^{-1}(f(U))) = \mathrm{Cl}(X - f^{-1}(f(U))) \subset \mathrm{Cl}(X - U) = X - U$, por lo que $f^{-1}(y) \cap U = \emptyset$ y, así $y \notin f(U)$, contradiciendo el hecho que $y \in f(U)$. Por lo tanto, se concluye que f es una función abierta. □

Para lograr uno de los objetivos de esta sección se utilizará el siguiente resultado que fue establecido por T. Noiri (véase [14, Lemma 1]).

Lema 3.1.2. *Si $f : X \to Y$ es una función almost continua y almost abierta, entonces f es almost completamente continua.*

Demostración. Sea U un subconjunto regular abierto de Y. Puesto que f es almost continua, se tiene que $f^{-1}(U)$ es un conjunto abierto en X y así,

$$f^{-1}(U) = \mathrm{Int}(f^{-1}(U)) \subset \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(f^{-1}(U))).$$

Por otro lado, como $\mathrm{Cl}(U)$ es un subconjunto regular cerrado de Y, por la almost continuidad de f también se tiene que $f^{-1}(\mathrm{Cl}(U))$ es un subconjunto cerrado de X y así, $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(f^{-1}(U))) \subset \mathrm{Cl}(f^{-1}(U)) \subset \mathrm{Cl}(f^{-1}(\mathrm{Cl}(U))) = f^{-1}(\mathrm{Cl}(U))$. Ahora, dado que f es almost abierta y $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(f^{-1}(U)))$ es un subconjunto regular abierto de X, se sigue que $f(\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(f^{-1}(U))))$ es un subconjunto abierto de Y. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} f(\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(f^{-1}(U)))) &= \mathrm{Int}(f(\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(f^{-1}(U))))) \\ &\subset \mathrm{Int}(f(f^{-1}(\mathrm{Cl}(U)))) \subset \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(U)) = U. \end{aligned}$$

Así, se concluye que

$$\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(f^{-1}(U))) \subset f^{-1}(f(\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(f^{-1}(U))))) \subset f^{-1}(U).$$

Esto demuestra que $f^{-1}(U)$ es un subconjunto regular abierto de X y, por lo tanto, f es almost completamente continua. □

Lema 3.1.3. *Sea $f : X \to Y$ una función continua y abierta. Si U es un subconjunto semi-abierto de Y y V es un subconjunto abierto de X, entonces $f^{-1}(U) \cap V$ es un subconjunto semi-abierto de X.*

Demostración. Sea U un subconjunto semi-abierto de Y y V un subconjunto abierto de X. Puesto que U es un subconjunto semi-abierto de Y, existe un subconjunto abierto O de Y tal que $O \subset U \subset \mathrm{Cl}(O)$ y así, $f^{-1}(O) \subset f^{-1}(U) \subset f^{-1}(\mathrm{Cl}(O))$. Siendo f una función abierta, del lema 3.1.1, se tiene que $f^{-1}(\mathrm{Cl}(O)) \subset \mathrm{Cl}(f^{-1}(O))$, por lo que, $f^{-1}(O) \subset f^{-1}(U) \subset \mathrm{Cl}(f^{-1}(O))$. Dado que f es continua, $f^{-1}(O)$ es un conjunto abierto en X y, por lo tanto, $f^{-1}(U)$ es un conjunto semi-abierto en X. Ahora, por el teorema 1.1.3, se obtiene que $f^{-1}(U) \cap V$ es un conjunto semi-abierto en X. □

Lema 3.1.4. *Para una función $f : X \to Y$, las siguientes propiedades son equivalentes:*

(1) f es cerrada.

(2) Para cada conjunto $B \subset Y$ y cada conjunto abierto $U \subset X$ que contiene a $f^{-1}(B)$, existe un conjunto abierto $V \subset Y$ tal que $B \subset V$ y $f^{-1}(V) \subset U$.

(3) Para cada punto $y \in Y$ y cada conjunto abierto $U \subset X$ que contiene a $f^{-1}(y)$, existe un conjunto abierto $V \subset Y$ tal que $y \in V$ y $f^{-1}(V) \subset U$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2): Suponga que $f : X \to Y$ es una función cerrada. Sea $B \subset Y$ y U un conjunto abierto en X tal que $f^{-1}(B) \subset U$. Puesto que $X - U$ es un conjunto cerrado en X, se tiene que $f(X - U)$ es un conjunto cerrado en Y y, por lo tanto, $V = Y - f(X - U)$ es un conjunto abierto en Y. Luego,

$$X - U \subset X - f^{-1}(B) = f^{-1}(Y) - f^{-1}(B) = f^{-1}(Y - B),$$

por lo que

$$f(X - U) \subset f(f^{-1}(Y - B)) \subset Y - B$$

y, así,

$$B \subset Y - f(X - U) = V.$$

Además,

$$\begin{aligned} f^{-1}(V) &= f^{-1}(Y - f(X - U)) = f^{-1}(Y) - f^{-1}(f(X - U)) \\ &= X - f^{-1}(f(X - U)) \subset X - (X - U) = U. \end{aligned}$$

(2) $\Rightarrow$ (1): Suponga que E es un conjunto cerrado de X. Entonces, $X - E$ es un conjunto abierto de X y $f^{-1}(Y - f(E)) = f^{-1}(Y) - f^{-1}(f(E)) = X - f^{-1}(f(E)) \subset X - E$. Por hipótesis, existe un conjunto abierto $V \subset Y$ tal que $Y - f(E) \subset V$ y $f^{-1}(V) \subset X - E = U$. Según esto, $Y - V \subset f(E)$ y $V \cap f(E) = \emptyset$, pues si $z \in V \cap f(E)$, entonces $z \in V$ y $z \in f(E)$, por lo que $z = f(a)$ para algún $a \in E$ y $f(a) \in V$; luego $a \in f^{-1}(V)$, lo cual contradice el hecho que $f^{-1}(V) \subset X - E$. Por lo tanto, $f(E) \subset Y - V$ y como $Y - V \subset f(E)$, se obtiene que $f(E) = Y - V$. Puesto que $Y - V$ es un conjunto cerrado, se concluye que f es una función cerrada.

(2) $\Rightarrow$ (3) Sean $y \in Y$ y U un conjunto abierto en X tal que $f^{-1}(y) \subset U$. Si se hace $B = \{y\}$, por la hipótesis, existe un conjunto abierto $V \subset Y$ tal que $y \in B \subset V$

y $f^{-1}(V) \subset U$.

(3) $\Rightarrow$ (2): Sean B cualquier subconjunto de X y U un conjunto abierto en X tal que $f^{-1}(B) \subset U$. Para cada $y \in B$, se tiene que $f^{-1}(y) \subset f^{-1}(B) \subset U$ y, por la hipótesis, existe un conjunto abierto $V_y \subset Y$ tal que $y \in V_y$ y $f^{-1}(V_y) \subset U$. Por lo tanto, $V = \bigcup_{y\in B} V_y$ es un conjunto abierto en Y tal que $B \subset V$ y $f^{-1}(V) =$

$$f^{-1}\left(\bigcup_{y\in B} V_y\right) = \bigcup_{y\in B} f^{-1}(V_y) \subset U. \qquad \square$$

Lema 3.1.5. *Para una función $f : X \to Y$ considere las siguientes propiedades:*

(1) f es regular cerrada.

(2) Para cada conjunto $B \subset Y$ y cada conjunto abierto $U \subset X$ que contiene a $f^{-1}(B)$, existe un conjunto regular abierto $V \subset Y$ tal que $B \subset V$ y $f^{-1}(V) \subset U$.

(3) Para cada punto $y \in Y$ y cada conjunto abierto $U \subset X$ que contiene a $f^{-1}(y)$, existe un conjunto regular abierto $V \subset Y$ tal que $y \in V$ y $f^{-1}(V) \subset U$.

Entonces se satisfacen (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3).

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2): Suponga que $f : X \to Y$ es una función regular cerrada. Sean $B \subset Y$ y U un conjunto abierto en X tal que $f^{-1}(B) \subset U$. Puesto que $X - U$ es un conjunto cerrado en X, se tiene que $f(X - U)$ es un conjunto regular cerrado en Y y, por lo tanto, $V = Y - f(X - U)$ es un conjunto regular abierto en Y. Además,

$$X - U \subset X - f^{-1}(B) = f^{-1}(Y) - f^{-1}(B) = f^{-1}(Y - B),$$

por lo que

$$f(X - U) \subset f(f^{-1}(Y - B)) \subset Y - B$$

y, así

$$B \subset Y - f(X - U) = V.$$

También,

$$\begin{aligned} f^{-1}(V) &= f^{-1}(Y - f(X - U)) = f^{-1}(Y) - f^{-1}(f(X - U)) \\ &= X - f^{-1}(f(X - U)) \subset X - (X - U) = U. \end{aligned}$$

(2) $\Rightarrow$ (3) Sean $y \in Y$ y U un conjunto abierto en X tal que $f^{-1}(y) \subset U$. Si se toma $B = \{y\}$, por el inciso (2) existe un conjunto regular abierto $V \subset Y$ tal que $y \in B \subset V$ y $f^{-1}(V) \subset U$. □

En el siguiente ejemplo se muestra que el recíproco de la implicación (1) $\Rightarrow$ (3) del lema 3.1.5, en general, no es cierto.

Ejemplo 3.1.1. *Existe una función que satisface el inciso (3) del lema 3.1.5 que no es regular cerrada. Sea* $\mathbb{R}$ *el conjunto de los números reales y considere* τ_u *y* τ_c *las topologías usual y cofinita sobre* $\mathbb{R}$*, respectivamente. Sea* $f : (\mathbb{R}, \tau_c) \to (\mathbb{R}, \tau_u)$ *la función identidad. Se afirma que se satisface el inciso (3) del lema 3.1.5. En efecto, sean* $y \in \mathbb{R}$ *y* $U \in \tau_c$ *tal que* $f^{-1}(y) \subset U$*. Puesto que* $\tau_c \subset \tau_u$ *y* $f^{-1}(y) = y$*, existe un básico* $V \in \tau_u$ *tal que* $y \in V \subset U$*. Dado que los básicos en* τ_u *son regular abiertos en* τ_u *y* $f^{-1}(V) = V$*, se tiene que existe un conjunto* $V \in \mathrm{RO}(\mathbb{R}, \tau_u)$ *tal que* $y \in V$ *y* $f^{-1}(V) \subset U$*. Así, la función* f *satisface el inciso (3) del lema 3.1.5. Por otra parte, se tiene que el conjunto* $\{0\}$ *es cerrado en* $(\mathbb{R}, \tau_c)$*, pero* $f(\{0\})$ *no es un conjunto regular cerrado en* $(\mathbb{R}, \tau_u)$*, ya que* $f(\{0\}) = \{0\}$ *y* $\{0\} \neq \emptyset = \mathrm{Cl}_{\tau_u}(\mathrm{Int}_{\tau_u}(\{0\}))$*. Por lo tanto, la función* f *no es regular cerrada.*

Lema 3.1.6. *Si* $f : X \to Y$ *es una función perfecta y* $\mathcal{V} = \{V_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ *es una colección localmente finita de subconjuntos de* X*, entonces* $f(\mathcal{V}) = \{f(V_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ *es una colección localmente finita de subconjuntos de* Y*.*

Demostración. Sea $y \in Y$. Puesto que $\mathcal{V}$ es localmente finita en X, para cada $x \in f^{-1}(y)$ existe un conjunto abierto $G_x \subset X$ tal que $x \in G_x$ y $\{\lambda \in \Lambda : G_x \cap V_\lambda \neq \emptyset\}$ es un conjunto finito. Como $f^{-1}(y) \subset \bigcup_{x \in f^{-1}(y)} G_x$ y $f^{-1}(y)$ es un conjunto compacto, existe un subconjunto finito N_y de $f^{-1}(y)$ tal que $f^{-1}(y) \subset \bigcup_{x \in N_y} G_x$. Observe que $G = \bigcup_{x \in N_y} G_x$ es un conjunto abierto en X y, además, $\{\lambda \in \Lambda : G \cap V_\lambda \neq \emptyset\}$ es finito. Dado que f es cerrada, por el lema 3.1.4, existe un conjunto abierto $O_y \subset Y$ tal que $y \in O_y$ y $f^{-1}(O_y) \subset G$. Así, $\{\lambda \in \Lambda : f^{-1}(O_y) \cap V_\lambda \neq \emptyset\} \subset \{\lambda \in \Lambda : G \cap V_\lambda \neq \emptyset\}$ es un conjunto finito y, por lo tanto, $\{\lambda \in \Lambda : O_y \cap f(V_\lambda) \neq \emptyset\} = \{\lambda \in \Lambda : f(f^{-1}(O_y)) \cap f(V_\lambda) \neq \emptyset\}$ también es finito. Esto demuestra que la colección $f(\mathcal{V}) = \{f(V_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ es localmente finita en Y. □

Teorema 3.1.1. *Sea $f : X \to Y$ una función abierta y perfecta. Si X es un espacio nearly S-paracompacto, entonces Y es un espacio nearly S-paracompacto.*

Demostración. Suponga que X es un espacio nearly S-paracompacto y sea $\mathcal{U} = \{U_\beta : \beta \in \Delta\}$ un cubrimiento regular abierto de Y. Puesto que se satisfacen las hipótesis del lema 3.1.2, la función f es almost completamente continua y según esto, la colección $f^{-1}(\mathcal{U}) = \{f^{-1}(U_\beta) : \beta \in \Delta\}$ es un cubrimiento regular abierto de X. Como X es nearly S-paracompacto, $f^{-1}(\mathcal{U})$ tiene un refinamiento semi-abierto localmente finito $\mathcal{V} = \{V_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ que cubre a X. Por ser $\mathcal{V}$ una colección semi-abierta, para cada $\lambda \in \Lambda$ existe un conjunto abierto O_λ tal que $O_\lambda \subset V_\lambda \subset \mathrm{Cl}(O_\lambda)$ y dada la continuidad de f se tiene que $f(O_\lambda) \subset f(V_\lambda) \subset f(\mathrm{Cl}(O_\lambda)) \subset \mathrm{Cl}(f(O_\lambda))$. Puesto que f es abierta, se sigue que $f(O_\lambda)$ es un conjunto abierto para cada $\lambda \in \Lambda$ y, así, $f(V_\lambda)$ es una conjunto semi-abierto en Y para cada $\lambda \in \Lambda$. Por lo tanto, $f(\mathcal{V}) = \{f(V_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ es una colección de conjuntos semi-abiertos en Y tal que $Y = f(X) = f\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f(V_\lambda)$ y, además, $f(\mathcal{V}_\lambda)$ refina $\mathcal{U}$, ya que para cada $\lambda \in \Lambda$, existe un $\beta \in \Delta$ tal que $f(V_\lambda) \subset f(f^{-1}(U_\beta)) = U_\beta$. Finalmente, como f es perfecta, por el lema 3.1.6, se concluye que $f(\mathcal{V})$ es localmente finita. Esto demuestra que Y es un espacio nearly S-paracompacto. □

Teorema 3.1.2. *Sea $f : X \to Y$ una función abierta y regular-perfecta. Si Y es un espacio nearly S-paracompacto, entonces X es un espacio nearly S-paracompacto.*

Demostración. Suponga que Y es un espacio nearly S-paracompacto y sea $\mathcal{U} = \{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ un cubrimiento regular abierto de X. Para cada $y \in Y$, se tiene que $f^{-1}(y) \subset X \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$, por lo que $\mathcal{U}$ es un cubrimiento abierto de $f^{-1}(y)$ para cada $y \in Y$. La compacidad de $f^{-1}(y)$ garantiza la existencia de una subcolección finita $\mathcal{U}_y = \{U_{\lambda_1}(y), U_{\lambda_2}(y), \cdots, U_{\lambda_n}(y)\}$ de $\mathcal{U}$ que es un cubrimiento de $f^{-1}(y)$. Observe que $O_y = \bigcup_{i=1}^{n} U_{\lambda_i}(y)$ es un conjunto abierto tal que $f^{-1}(y) \subset O_y$ y, como f es una función regular cerrada, entonces por el lema 3.1.5, existe un conjunto regular abierto V_y en Y tal que $y \in V_y$ y $f^{-1}(V_y) \subset O_y$. Claramente, la colección $\mathcal{V} = \{V_y : y \in Y\}$ cubre al espacio Y y, dado que Y es nearly S-paracompacto, la colección $\mathcal{V}$ tiene un refinamiento semi-abierto localmente finito que cubre a Y. Por el lema 1.3.4, existe un cubrimiento semi-abierto localmente finito $\mathcal{W} = \{W_y : y \in Y\}$ de Y tal que $W_y \subset V_y$. Sea $\mathcal{G}_y = \{U_{\lambda_i}(y) \cap f^{-1}(W_y) : i = 1, 2, 3..., n\}$. Se demostrará que la coleccion $\mathcal{G} = \bigcup_{y\in Y} \mathcal{G}_y$ es un refinamiento semi-abierto localmente finito de $\mathcal{U}$ que cubre a X. Por el lema 3.1.3, cada conjunto $U_{\lambda_i}(y) \cap f^{-1}(W_y) \in \mathcal{G}_y$ es un conjunto semi-abierto en X para cada $y \in Y$ y, además, para cada $y \in Y$, existe un λ_i tal que $U_{\lambda_i}(y) \cap f^{-1}(W_y) \subset U_{\lambda_i}(y)$, por lo que la colección $\mathcal{G}$ es un refinamiento semi-abierto de $\mathcal{U}$. A continuación, se verá que $\mathcal{G}$ cubre a X. Sea $x \in X$. Entonces existe $y_0 \in Y$ tal que $x \in f^{-1}(W_{y_0}) \subset f^{-1}(V_{y_0}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{\lambda_i}(y_0)$ y, así, $x \in U_{\lambda_i}(y_0)$ para algún $U_{\lambda_i}(y_0) \in \mathcal{U}_y$. Por lo tanto, $x \in U_{\lambda_i}(y_0) \cap f^{-1}(W_{y_0})$ y $U_{\lambda_i}(y_0) \cap f^{-1}(W_{y_0}) \in \mathcal{G}_{y_0}$. Consecuentemente, la colección $\mathcal{G}$ es un cubrimiento de X. Finalmente, se mostrará que $\mathcal{G}$ es localmente finita. Sea $x \in X$. Entonces $y = f(x) \in Y$ y, como la colección $\mathcal{W} = \{W_y : y \in Y\}$ es localmente finita, existe un conjunto abierto $B_y \subset Y$ tal que $y \in B_y$ y el conjunto $\{y \in Y : W_y \cap B_y \neq \emptyset\}$ es finito. Note que $f^{-1}(B_y)$ es un conjunto abierto en X tal que $x \in f^{-1}(B_y)$ y $f^{-1}(W_y) \cap f^{-1}(B_y) = f^{-1}(W_y \cap B_y) \neq \emptyset$ si y solo si $W_y \cap B_y \neq \emptyset$, por lo tanto, el conjunto $\{y \in Y : f^{-1}(W_y) \cap f^{-1}(B_y) \neq \emptyset\}$ es finito. Por otro lado, por cada W_y hay solo un número finito de $U_{\lambda_i}(y)$ y cada miembro G de $\mathcal{G}$ tiene la forma $G = f^{-1}(W_y) \cap U_{\lambda_i}(y)$ para algún $y \in Y$. De esta manera, $f^{-1}(B_y)$ interseca a lo más un número finito de miembros de la colección $\mathcal{G}$ y, por consiguiente

$\mathcal{G}$ es localmente finita. Esto demuestra que X es nearly S-paracompacto. □

3.2. Estabilidad bajo suma y producto

En esta sección se estudia el comportamiento de la suma y el producto de espacios donde se considera que cada uno de los factores es un espacio nearly S-paracompacto. Para lograr este propósito es necesario definir la suma de espacios.

Definición 3.2.1. *Sea $\{(X_\lambda, \tau_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ una colección de espacios tal que $X_\lambda \cap X_\beta = \emptyset$ para cada $\lambda \neq \beta$. El conjunto $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ dotado de la topología $\tau = \{U \subset X : U \cap X_\lambda \in \tau_\lambda$, para cada $\lambda \in \Lambda\}$ se llama* ***suma topológica****, o simplemente suma, de la colección de espacios $\{(X_\lambda, \tau_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ y se denota por $X = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$.*

Observacion 3.2.1. *La suma topológica $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ también se puede definir para una colección de espacios $\{(X_\lambda, \mathrm{T}_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ que no satisfaga la condición $X_\lambda \cap X_\beta = \emptyset$ para cada $\lambda \neq \beta$. En este caso, es necesario encontrar una colección $\{(X'_\lambda, \mathrm{T}'_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ tal que X'_λ es homeomorfo a X_λ y $X'_\lambda \cap X'_\beta = \emptyset$ para cada $\lambda \neq \beta$ y luego se define $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X'_\lambda$.*

Teorema 3.2.1. *Un conjunto $F \subset \bigoplus_{\lambda\in\lambda} X_\lambda$ es cerrado si y solo si $F \cap X_\lambda$ es cerrado en X_λ para cada $\lambda \in \Lambda$.*

Demostración. Suponga que F es un conjunto cerrado en el espacio $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$. Entonces $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda - F$ es un conjunto abierto en $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$. Luego, para cada $\lambda \in \Lambda$, $X_\lambda - (F \cap X_\lambda) = \left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda - F\right) \cap X_\lambda$ es un conjunto abierto en X_λ y, por lo tanto, $F \cap X_\lambda$ es un conjunto cerrado en X_λ para cada $\lambda \in \Lambda$. En forma recíproca, suponga que $F \cap X_\lambda$ es un conjunto cerrado en X_λ para cada $\lambda \in \Lambda$. Entonces $\left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda - F\right) \cap X_\lambda =$

$X_\lambda - (F \cap X_\lambda)$ es un conjunto abierto en X_λ y, consecuentemente, $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda - F$ es un conjunto abierto en $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$. Así, F es un conjunto cerrado en el espacio $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$. □

Corolario 3.2.1. *Cada espacio X_λ es un subespacio clopen de $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$.*

Demostración. Inicialmente, se verá que cada X_λ es un conjunto clopen en $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$. Observe que $X_\lambda \cap X_\lambda = X_\lambda \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ y $X_\lambda \in \tau_\lambda$, por lo que X_λ es un conjunto abierto en $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$. Por otro lado, $X_\lambda \cap X_\lambda = X_\lambda$ es un conjunto cerrado en X_λ para cada $\lambda \in \Lambda$ y $X_\lambda \subset \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, así por el teorema 3.2.1, X_λ es un conjunto cerrado en $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ para cada $\lambda \in \Lambda$. Ahora, se probará que $X_\lambda \in$ es un subespacio de $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$. Sea $V \subset X_\lambda$. Si $V \in \tau_\lambda$, entonces $V \in \tau|_{X_\lambda}$, pues $V = V \cap X_\lambda$. En forma recíproca, si $V \in \tau|_{X_\lambda}$, entonces $V = X_\lambda \cap U$ con $U \in \tau$ y, como $X_\lambda \in \tau$, se tiene que $V \in \tau$, por lo que $V = V \cap X_\lambda \in \tau_\lambda$. Esto demuestra que cada espacio X_λ es un subespacio clopen de $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$. □

Teorema 3.2.2. *La suma $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ es un espacio nearly S-paracompacto si y solo si X_λ es un espacio nearly S-paracompacto para cada $\lambda \in \Lambda$.*

Demostración. Suponga que el espacio $X = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ es nearly S-paracompacto. Del corolario 3.2.1, se sigue que cada espacio X_λ es clopen en el espacio $X = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ y, por el corolario 2.2.1, se concluye que para cada $\lambda \in \Lambda$, X_λ es un espacio nearly S-paracompacto. En forma recíproca, suponga que X_λ es un espacio nearly S-paracompacto para cada $\lambda \in \Lambda$ y sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento regular abierto del espacio $X = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$. Por el lema 1.1.4, se tiene que para cada $\lambda \in \Lambda$, la colección $\mathcal{U}_\lambda = \{U \cap X_\lambda : U \in \mathcal{U}\}$ es un cubrimiento regular abierto del espacio X_λ. Luego, $\mathcal{U}_\lambda$ tiene un refinamiento semi-abierto localmente finito $\mathcal{V}_\lambda$ que cubre a X_λ. Defina $\mathcal{V} = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{V}_\lambda$ y observe que $\mathcal{V}$ es una colección formada por conjuntos semi-abiertos en X tal que $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda}\bigcup_{V\in\mathcal{V}_\lambda} V = \bigcup_{V\in\mathcal{V}} V$. Por otro lado, si $V \in \mathcal{V}$, entonces existe un $\lambda \in \Lambda$ tal que $V \in \mathcal{V}_\lambda$ y; así, $V \subset U \cap X_\lambda \subset U$ para algún $U \in \mathcal{U}$, por lo que $\mathcal{V}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$ que cubre a X. Falta mostrar que la colección $\mathcal{V}$ es localmente finita en $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$. Sea $x \in X$. Entonces $x \in X_{\lambda_0}$ para algún $\lambda_0 \in \Lambda$, como $\mathcal{V}_{\lambda_0}$ es localmente finita en X_{λ_0}, existe un conjunto abierto B en X_{λ_0} tal que $x \in B$ y el conjunto $\{V \in \mathcal{V}_{\lambda_0} : V \cap B \neq \emptyset\}$ es finito. Ahora, $B \cap X_{\lambda_0} = (B \cap X_{\lambda_0}) \cap X_\lambda$ si $\lambda = \lambda_0$ y $(B \cap X_{\lambda_0}) \cap X_\lambda = \emptyset$; si $\lambda \neq \lambda_0$, entonces $(B \cap X_{\lambda_0}) \cap X_\lambda$ es un conjunto abierto en X_λ para cada $\lambda \in \Lambda$ y, así, $B = B \cap X_{\lambda_0}$ es un conjunto abierto en $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ tal que $x \in B$. Por otra parte, si $W \in \mathcal{V}$ y $W \in \mathcal{V}_{\lambda_0}$, entonces el conjunto $\{W \in \mathcal{V} : W \cap B\}$ es finito. En caso contrario, si $W \in \mathcal{V}$ y $W \notin \mathcal{V}_{\lambda_0}$, entonces $W \in \mathcal{V}_\lambda$ con $\lambda \neq \lambda_0$ y así $W \cap B \subset X_\lambda \cap X_{\lambda_0} = \emptyset$, por lo que el conjunto $\{W \in \mathcal{V} : W \cap B \neq \emptyset\} = \emptyset$ es finito. Esto prueba que la colección $\mathcal{V}$ es localmente finita en $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ y de esta manera, se concluye que el espacio $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ es nearly S-paracompacto. □

A continuación, se considera el producto cartesiano $X \times Y$ de dos espacios X y Y, dotado de la topología producto. Los siguientes dos lemas serán útiles para estudiar el comportamiento del producto cartesiano $X \times Y$ cuando uno de los factores es un espacio nearly S-paracompacto.

Lema 3.2.1. *Para cada par $(x, y) \in X \times Y$ y cada subconjunto regular abierto U de $X \times Y$ que contiene a (x, y), existen conjuntos W y V regular abiertos en X y Y, respectivamente, tales que $(x, y) \in W \times V \subset U$.*

Demostración. Sea $(x, y) \in X \times Y$ y U un subconjunto regular abierto de $X \times Y$ tal que $(x, y) \in U$. Entonces U es un subconjunto abierto de $X \times Y$ y, así, existen conjuntos abiertos W' y V' en X y Y, respectivamente, tales que $(x, y) \in W' \times V'$ y $W' \times V' \subset U$. Luego, $(x, y) \in W' \times V' \subset \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(W')) \times \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(V'))$ y $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(W')) \times \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(V')) = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(W') \times \mathrm{Cl}(V')) = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(W' \times V')) \subset \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(U)) = U.$ Al tomar $W = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(W'))$ y $V = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(V'))$, se tiene que W y V son conjuntos regular abiertos en X y Y, respectivamente, tales que $(x, y) \in W \times V \subset U$. □

Lema 3.2.2. *Si W es un subconjunto semi-abierto de un espacio X y V es un subconjunto semi-abierto de un espacio Y, entonces $W \times V$ es un subconjunto semi-abierto del espacio producto $X \times Y$.*

Demostración. Sea W un subconjunto semi-abierto de X y V un subconjunto semi-abierto de Y. Entonces $W \subset \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(W))$ y $V \subset \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(V))$ y, así, $W \times V \subset \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(W)) \times \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(V)) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(W) \times \mathrm{Int}(V)) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(W \times V))$. Por lo tanto, $W \times V$ es un subconjunto semi-abierto del espacio producto $X \times Y$. □

Teorema 3.2.3. *Si X es un espacio nearly S-paracompacto y Y es un espacio nearly compacto, entonces el espacio producto $X \times Y$ es nearly S-paracompacto.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento regular abierto de $X \times Y$. Para cada par $(x, y) \in X \times Y$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $(x, y) \in U$ y, por el lema 3.2.1, existen conjuntos $W_{(x,y)}$ y $V_{(x,y)}$ regular abiertos en X y Y, respectivamente, tales que $(x, y) \in W_{(x,y)} \times V_{(x,y)} \subset U$. Sea $I_x = \{x\} \times Y$ para cada $x \in X$. Entonces $\{V_{(x,y)} : (x, y) \in I_x\}$ es un cubrimiento regular abierto de Y, y como Y es un espacio nearly compacto, existe un subconjunto finito J_x de I_x, tal que $\mathcal{V} = \{V_{(x,y)} : (x, y) \in J_x\}$ es un cubrimiento de Y. Por otro lado, para cada $x \in X$, defina el conjunto $M_x = \bigcap_{(x,y)\in J_x} W_{(x,y)}$.
Puesto que la intersección finita de conjuntos regular abiertos es un conjunto regular abierto, se tiene que M_x es un conjunto regular abierto que contiene a x y la colección $\mathcal{W} = \{M_x : x \in X\}$ es un cubrimiento regular abierto de X. Dado que X es un espacio nearly S-paracompacto, existe un refinamiento semi-abierto localmente finito $\mathcal{G} = \{G_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ de $\mathcal{W}$ que cubre a X. Ahora, sea $\mathcal{H} = \{G_\lambda \times V_{(x,y)} : \lambda \in \Lambda, (x, y) \in J_x\}$. Se demostrará que la colección $\mathcal{H}$ es un refinamiento semi-abierto localmente finito de $\mathcal{U}$ que cubre a $X \times Y$. En efecto:

- Para cada $\lambda \in \Lambda$ y cada $(x, y) \in J_x$, existe un conjunto $M_x \in \mathcal{W}$ tal que $G_\lambda \subset M_x \subset W_{(x,y)}$, por lo que $G_\lambda \times V_{(x,y)} \subset W_{(x,y)} \times V_{(x,y)} \subset U$ para algún $U \in \mathcal{U}$, así $\mathcal{H}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$.

- Sea $(x, y) \in X \times Y$. Entonces $x \in X$ y $y \in Y$, por lo que $x \in G_\lambda$ para algún $\lambda \in \Lambda$ y $y \in V_{(x,y)}$ para algún $(x, y) \in J_x$. Así, $(x, y) \in G_\lambda \times V_{(x,y)}$ y, por lo tanto, $\mathcal{H}$ es un cubrimiento de $X \times Y$.

- Puesto que $V_{(x,y)}$ es un conjunto regular abierto en Y, entonces él es semi-abierto y, por el lema 3.2.2, se tiene que $G_\lambda \times V_{(x,y)}$ es un conjunto semi-abierto en $X \times Y$, para cada $\lambda \in \Lambda$ y cada $(x, y) \in J_x$. Por lo tanto, $\mathcal{H}$ es una colección semi-abierta.

- Sea $(x, y) \in X \times Y$. Entonces $x \in X$ y $y \in Y$. Luego, existe un subconjunto abierto O_x de X tal que $x \in O_x$ y O_x interseca a un número finito de elementos de $\mathcal{G}$. Por otro lado, existe un subconjunto abierto V_y de Y tal que $y \in O'_y$ y, como $\mathcal{V}$ es una colección finita, entonces O'_y interseca a lo sumo un número finito de elementos de $\mathcal{V}$. Por lo tanto, $O_x \times O'_y$ es un conjunto abierto en $X \times Y$ tal que $(x, y) \in O_x \times O'_y$ y $O_x \times O'_y$ interseca a lo sumo un número finito de elementos de $\mathcal{H}$.

$\square$

Bibliografía

[1] K. Y. Al-Zoubi, *S-paracompact spaces*, Acta. Math. Hungar. **110** (1-2) (2006), 165–174.

[2] C. E. Aull, *α-paracompact subsets*, Proc. Second Prague Topological Symp. 1966, Acad. Pub. House Czechoslovak Acad. Sci., Prague (1967), 45–51.

[3] R. H. Bing, *Metrization of topological spaces*, Canadian J. Math. **3** (1951), 175–186.

[4] C. Blanco, J. Sanabria, O. Ferrer, *More results on nearly S-paracompactness*, Submitted (2020).

[5] J. Dieudonné, *Une généralisation des espaces compacts*, J. Math. Pures Appl. **23** (9) (1944), 65–76.

[6] K. Dlaska, N. Ergun, M. Ganster, *Countably S-closed spaces*, Math. Slovaca **44** (1994), 337–348.

[7] M. Katětov, *Über H-abgeschlossene und bikompakte Räume*, Časopis Pěst. Mat. Fys. **69** (1940), 36–49.

[8] J. K. Kohli, D. Singh, *Between strong continuity and almost continuity*, Appl. Gen. Topol. **11** (1) (2010), 29–42.

[9] I. Koväcević, *On nearly paracompact spaces*, Publ. De LÍnst. Math. (N.S.) **25** (39) (1979), 63–69.

[10] I. Koväcević, *On nearly and almost paracompactness*, Kyungpook Math. J. **30** (2) (1990), 181–193.

[11] N. Levine, *Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces*, Amer. Math. Monthly **70** (1963), 36–41.

[12] P. Y. Li, K. Y. Song, *Some remarks on S-paracomopact spaces*, Acta Math. Hungar. **118** (4) (2008), 345–355.

[13] O. Njåstad, *On some classes of nearly open sets*, Pacific J. Math. **15** (1965), 961–970.

[14] T. Noiri, *Almost-continuity and some separation axioms*, Glasnik Mat. **9** (29) (1974), 131–135.

[15] E. Michael, *A note on paracompact spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953), 831–838.

[16] J. R. Munkres, *Topology*, Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, New Jersey, 1975.

[17] J. Nagata, *On a necessary and sufficient condition of metrizability*, J. Inst. Polytech. Osaka City Univ. Ser. A. Math. **1** (1950), 93–100.

[18] J. Sanabria, E. Rosas, C. Blanco, *Nearly S-paracompact spaces*, Submitted (2020).

[19] M. K. Singal, S. P. Arya, *On almost-regular spaces*, Glasnik Mat. Ser. III **4** (24) (1969), 89–99.

[20] M. K. Singal, S. P Arya, *On nearly paracompact spaces*, Mat. Vesnik **6** (21) (1969), 3–16.

[21] M. K. Singal, S. P. Arya, *On M-paracompact spaces*, Math. Ann. **181** (1969), 119-133.

[22] Y. Smirnov, *A necessary and sufficient condition for metrizability of a topological space*, Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.) **77** (1951), 197–200.

[23] L. A. Steen, J. A. Seebach Jr., *Counterexamples in Topology*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1978.

[24] A. H. Stone, *Paracompactness and product spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **54** (1948), 977–982.

[25] M. H. Stone, *Application of the theory of Boolean rings to general topology*, Trans. Amer. Math. Soc. **41** (1937), 374–481.

[26] T. Thompson, *S-closed spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **69** (1976), 335–338.

[27] N. V. Veličko, *H-closed topological spaces*, Amer. Math. Soc. Transl. **78** (1968), 103–118.

[28] S. Willard, *General Topology*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1970.