

COLECCION G. M. BRUÑO

ARITMETICA

CURSO SUPERIOR



PARIS
Procuraduria general
78 Rue de Sèvres. 78

320

ARITMETICA

CURSO SUPERIOR

PROPIEDAD
DE LA SOCIEDAD GENERAL DE EDICIÓN

COLECCION G. M. BRUÑO

ARITMETICA

CURSO SUPERIOR

con

Cálculo Mental y Parte Comercial

por

G. M. BRUÑO

5a. Edición Revisada



MEDELLIN
LIBRERIA BEDOUT

— 1947 —

Advertencia

Este *Curso superior* completa nuestros *cursos elemental y medio*.

Hemos procedido con mucha sencillez en la exposición de la parte teórica, y enriquecido la parte práctica con buena copia de ejercicios orales y de *cálculo mental*.

A estos ejercicios siguen unos 1.100 problemas que juntos con más de 200 de recapitulación, clasificados por géneros, no dudamos serán de suma utilidad para los jóvenes, proporcionándoles abundante materia para tareas escritas.

Cinco partes comprende este tratado:

Parte I. — Operaciones con números enteros.

— II. — Operaciones con números decimales, y fracciones. — Raíces cuadrada y cúbica.

— III. — Sistema métrico. — Números complejos.

— IV. — Operaciones con números proporcionales. — Reglas diversas.

— V. — Parte *comercial*. En ella se ha introducido el cálculo del Interés y del Descuento por los *métodos comerciales*, valoración de mercaderías, nociones sobre los Efectos de comercio, Cuentas corrientes, Cambio, Corretaje, derechos de Aduana, etc. etc.

Termina el Curso por la teoría simplificada de las Progresiones, del Cálculo logarítmico y de los Intereses compuestos.

ARITMETICA

DEFINICIONES PRELIMINARES

1. Aritmética es la ciencia que trata de la expresión, cálculo y propiedades de las cantidades consideradas como números.

2. Cantidad.—Llámase *cantidad* todo lo que es susceptible de aumento o de disminución.

Por ejemplo, *la longitud de una cuerda, la población de una ciudad, etc.*

Hay dos clases de cantidades, la *continua* y la *discreta*.

Cantidad continua es aquella cuyas partes no pueden separarse.

Ejemplo: *la longitud de un camino, la de una pieza de paño, la altura de una pared.*

Cantidad discreta es la que consta de partes distintas o separables.

Como por ejemplo, *los alumnos de una clase, una hilera de árboles.*

Todo lo que se puede medir es *cantidad continua*, y lo que se puede contar es *cantidad discreta*.

3. Medir una cantidad es compararla con otra conocida y de la misma especie, que se llama *unidad*.

4. Número es el conjunto de *unidades o partes de unidad* de una misma especie, o también la *unidad* misma.

5. Unidad es la cantidad conocida con la cual se comparan todas las cantidades de la misma especie.

Por ejemplo, si se quiere contar los árboles de una alameda, los metros que tiene una pieza de paño, etc., la *unidad* será un árbol, un metro.

6. De la comparación de una cantidad con su unidad pueden resultar tres clases de números: 1º *el entero*, 2º *el quebrado*, y 3º *el mixto*.

Resulta un número entero cuando la cantidad medida contiene la unidad un número exacto de veces.

Como tres vasos, diez hombres.

Se tiene un quebrado cuando la cantidad es menor que la unidad.

Como un tercio de litro, tres quintos de kilogramo.

Resulta un número mixto cuando la cantidad medida contiene la unidad una o varias veces, y además una o varias partes de la unidad.

Por ejemplo, dos metros y medio.

Estas tres clases de números se dividen en *abstractos* y *concretos*.

7. Número abstracto es aquél en que no está determinada la naturaleza de la unidad.

Por ejemplo, cuatro, dos tercios.

8. Número concreto es aquél en que está determinada la naturaleza de la unidad.

Como cuatro palomas, dos tercios de litro.

Los números concretos son homogéneos cuando se refieren a unidades de una misma especie.

V. g.: cinco libros, veinte libros.

Y son heterogéneos cuando se refieren a unidades de distinta especie.

Como veinte sombreros, quince cuadernos.

El número concreto se subdivide en *complejo*, e *incomplejo*.

9. Número complejo es el que consta de varias partes que se refieren respectivamente a unidades de diferentes especies, pero de un mismo género, y cuyo sistema de numeración no es decimal.

V. g.: cuatro días seis horas cinco minutos.

10. Número incomplejo es el que consta sólo de unidades de un mismo género y especie.

V. g.: ocho arrobas; veinticuatro horas.



Parte I

NUMEROS ENTEROS

CAPITULO I

NUMERACION

11. Definición.—*Numeración* es la parte de la Aritmética que enseña a expresar o nombrar y a escribir los números.

La numeración se divide en *hablada* y *escrita*.

§ I.—Numeración hablada

12. Definición.—*Numeración hablada* es el arte de expresar los números con algunas palabras, empleadas solas o convenientemente combinadas.

Las palabras con que se expresan los números se llaman *nombres de los números*.

13. Formación de los números enteros.—La unidad se expresa por la palabra *uno*. Esta palabra es la *unidad simple* o de *primer orden*. Para formar los números se añade la unidad a sí misma, luego otra unidad al grupo de las dos primeras, y así sucesivamente.

Así, *uno* añadido a *uno* da *dos*; *uno* añadido a *dos*

da tres; uno añadido a tres da cuatro, y así en adelante; de modo que, añadiendo una unidad a cada número ya encontrado, se forma un nuevo número.
La serie de los números enteros es ilimitada.

14. Los nombres de los nueve primeros números son: **uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve.**

Cada uno de los nueve primeros números expresa *unidades simples* o de *primer orden*.

15. El número siguiente se llama *diez* o *decena*; es la unidad de *segundo orden*, que se compone de diez unidades simples.

1º Por *decenas* se cuenta del mismo modo que se contó por unidades simples; se dirá pues: *una decena, dos decenas, hasta nueve decenas.*

El uso ha reemplazado estas expresiones con las siguientes: *diez, veinte, treinta, cuarenta, cincuenta, sesenta, setenta, ochenta, noventa.*

2º Los nombres de los nueve números comprendidos entre dos decenas consecutivas se forman añadiendo al nombre de cada decena el de las nueve unidades simples. de esta manera: *treinta y uno, cuarenta y seis, hasta noventa y nueve.*

16. **Nota.**—1º El uso ha querido que en vez de decir *diez y uno, diez y dos, diez y tres, diez y cuatro, diez y cinco*, se diga *once, doce, trece, catorce, quince*; los demás números hasta *veinte* siguen la formación ordinaria: *diez y seis, diez y siete, etc.*

2º Desde *veinte* hasta *treinta*, los números se expresan en una sola palabra: *veintiuno, veintidós, veintitrés, veintinueve.*

17. El conjunto de diez decenas se llama *centena* o *ciento*; es la unidad de *tercer orden*.

1º Se cuenta por *centenas* como se contó por *decenas* y por *unidades simples*, diciendo: *una centena, dos centenas... , nueve centenas, o más simplemente: cien*

to, doscientos, trescientos, cuatrocientos, quinientos, seiscientos, setecientos, ochocientos, novecientos.

2º Los nombres de los números comprendidos entre dos centenas consecutivas se forman añadiendo al nombre de cada centena, el de los noventa y nueve primeros números; v. gr.: *ciento uno, ciento dos, ciento noventa y nueve... , novecientos uno, novecientos dos... , hasta novecientos noventa y nueve.*

3º El grupo de los tres primeros órdenes de unidades contiene la *clase de las unidades simples*.

18. El conjunto de diez centenas se llama *mil, millar* o *unidad de segunda clase*.

1º La *clase de los millares*, así como la de las unidades simples, se compone de *unidades, decenas y centenas*, las cuales constituyen los *órdenes* 4º, 5º y 6º.

2º Los nombres de los números comprendidos entre dos millares consecutivos se forman añadiendo al nombre de cada colección de miles los nombres de los novecientos noventa y nueve primeros números.

3º El conjunto de *diez centenas de mil, o mil millares*, se llama *millón* o *unidad de tercera clase*.

19. La *clase de los millones*, así como la de los *millares* y la de las *unidades simples*, se compone de *unidades, decenas y centenas*, las cuales constituyen los *órdenes* 7º, 8º y 9º.

Los nombres de los números comprendidos entre dos millones consecutivos se forman añadiendo al nombre de cada colección de millones los nombres de los novecientos noventa y nueve mil novecientos noventa y nueve primeros números.

Continuando, sucesivamente se obtienen *millares de millón, o unidad de cuarta clase*, en seguida los *billones, millares de billón, trillones, millares de trillón, etc.*

20. **Sistema de numeración.**—Llámase *sistema de numeración* al conjunto de las convenciones según las cuales se expresan y representan todos los números.

21. Base de un sistema de numeración es el número de unidades de un orden cualquiera necesarias para componer una unidad del orden superior inmediato. El sistema de numeración que acabamos de estudiar se llama decimal, porque su base es diez. Se ve, en efecto, que el sistema decimal se funda en esta convención:

Diez unidades de un orden forman una unidad del orden superior inmediato, y mil unidades de una clase forman una unidad de la clase superior inmediata. Recíprocamente, una unidad de un orden vale diez unidades del orden inferior inmediato, etc.

Así, diez unidades equivalen a una decena; cien unidades a una centena; una centena a diez decenas; un millar a diez centenas, etc.

Nota.—Por lo que antecede se ve que se han podido designar todos los números por medio de un reducido número de vocablos.

TABLA DE NUMERACIÓN

8a clase	7a clase	6a clase	5a clase	4a clase	3a clase	2a clase	1a clase
242322	212019	181716	151413	121110	9 8 7	6 5 4	3 2 1
orden	orden	orden	orden	orden	orden	orden	orden
638	127	394	237	867	523	675	478
centenas decenas unidades	centenas decenas unidades	centenas decenas unidades	centenas decenas unidades	centenas decenas unidades	centenas decenas unidades	centenas decenas unidades	centenas decenas unidades
de millar de trillón	de trillón	de millar de billón	de billón	de millar de millón	de millón	de millar	simples
4o período trillones		3er período billones		2o período millones		1er período unidades	

§ II.—Numeración escrita.

22. Definición.—Numeración escrita es el arte de representar los números por medio de ciertos signos convencionales llamados *cifras*, o *guarismos*.

Estos signos son las cifras *arábigas* (1) siguientes:

1 2 3 4 5 6 7 8 9
 uno dos tres cuatro cinco seis siete ocho nueve
 0
 cero

Las nueve primeras cifras se llaman *significativas* porque representan por sí mismas un valor.

El *cero* no tiene valor ninguno ni por sí, ni antepuesto a otro número; es una cifra *insignificativa* o *auxiliar* cuyo oficio es ocupar el lugar de cualquier orden, cuando no haya unidades de este orden en un número.

23. Valor absoluto y valor relativo.—Cada cifra significativa tiene dos valores: el uno *absoluto* y el otro *relativo*.

Valor absoluto de una cifra es el que depende de la forma que tiene; conserva este valor en cualquier lugar en que se encuentre.

V. g.: En los números 402 y 14, el 4 siempre valdrá 4, y no 3 ni 5, etc.

Valor relativo o *local* de una cifra es el que depende del lugar que ocupa en un número.

Así, en el número 6.408, el valor absoluto del primer guarismo de la izquierda es 6, su valor relativo es 6 unidades de millar; asimismo, el valor absoluto del segundo guarismo es 4, y su valor relativo es 4 centenas, etc.

24. Convención.—La numeración escrita se funda en la convención siguiente:

Toda cifra escrita a izquierda de otra representa unidades diez veces mayores que las que expresa ésta.

(1) Estas cifras se llaman *arábigas* porque fueron los Arabes quienes las introdujeron en Europa en el siglo X.

De este principio resulta que si la primera cifra representa *unidades simples*, la que la sigue a la izquierda representará *decenas*; la tercera, *centenas*, etc.

Así, en el número 624, el 6 representa centenas; el 2, decenas; y el 4, unidades; y en el número 4.009, el 4 representa millares, y el 9 unidades.

Luego se necesita una cifra para representar un número que no tiene más que unidades, dos para el que tiene decenas, etc.

25. **ESCRITURA DE UN NUMERO.**—Para representar un número, se escriben sucesivamente de izquierda a derecha las centenas, decenas y unidades de cada clase, empezando por la clase superior, y colocando ceros en los lugares que carecen de unidades.

Para representar, por ejemplo, el número *cuatrocientos cinco*, se escribirá 405.

Y para representar el número *cuatro mil seis millones veinte mil quinientas unidades*, se dispondrán los guarismos del modo siguiente: 4 006 020 500.

26. **Lectura de un número.**—I. Para leer un número de tres guarismos, *se anuncian separadamente las centenas, las decenas y las unidades.*

Así, 739 se leerá: *setecientos treinta y nueve unidades.*

II.—**PARA LEER UN NUMERO CUALQUIERA:** 1º Se divide el número en grupos de a seis cifras, empezando por la derecha; entre el primero y el segundo grupo, y en la parte inferior, se escribe el número 1 que representa los millones; entre el segundo y el tercero, el número 2 que representa los billones; entre el tercero y el cuarto el número 3 que representa los trillones, etc.

Cada grupo de a seis cifras se subdivide en dos de a tres, con un punto o con una coma, para separar los millares. La última sección puede constar de sólo una o dos cifras.

2º En seguida, empezando por la izquierda, se leen sucesivamente las diferentes secciones, posponiendo la palabra mil donde se encuentra un punto; millón donde se encuentra la cifra uno; billón donde hay el dos, etc.

Así, el número 4 203 000 963 005 430 728 se dispondrá del modo siguiente: 4,203.000,963.005,430.728 y se leerá:

Cuatro trillones—doscientos tres mil billones—novecientos sesenta y tres mil cinco millones—cuatrocientos treinta mil setecientos veintiocho unidades.

27. **Nota.**—De los principios de la numeración resulta que *para que un número entero sea 10, 100, 1000... veces mayor, basta escribir a la derecha de este número, uno, dos, tres... ceros.*

Ejemplo.—Sea el número 25.

Si se agrega un cero a la derecha, resulta el número 250. Al principio teníamos 25 unidades, y ahora, 25 decenas; siendo las decenas diez veces mayores que las unidades, el número 250 es, por lo tanto, diez veces mayor que 25.

Un raciocinio análogo probaría que, agregando dos ceros, el número se hace cien veces mayor, etc.

Del mismo modo se demostraría que *para hacer un número terminado por ceros, 10, 100, 1000, etc., veces menor, basta quitar uno, dos, tres, etc., ceros de la derecha.*

Cifras Romanas

28. Para representar los números, los Romanos usaban las cifras siguientes:

I	V	X	L	C	D	M	
cuyo valor es:	1	5	10	50	100	500	1000.

La escritura de los números por medio de las cifras romanas se funda en las siguientes convenciones.

29. **CONVENCIONES.**—I. Si a la derecha de una cifra se escribe otra de valor igual o menor, el valor que representa ésta se agrega al valor de la primera.

Así, los números III, XV, XXVII, CLXI, MDCCXVI se leen 3 15 27 161 1716

Es de advertir que no se repite más de tres veces seguidas el mismo carácter.

30. II.—Si a la izquierda de una cifra se escribe otra menor, el valor de aquélla queda disminuido en el valor de ésta.

Los números IV, XL, XCI, CDXIX, MDCCCXCVIII, MCMIX se leen 4 40 91 419 1898 1909

31. III.—Una rayita encima de una cifra le hace representar miles; dos rayitas, millones, etc.

Los números	III,	VII
representan	3 000	7 000 000

Sin embargo los números 1 000, 2 000, 3 000, se suelen escribir M, MM, MMM.

EJERCICIOS

1. ¿Cuál es el período o la clase de las mayores unidades de un número entero que tiene: 1º 9 guarismos, 2º 13 guarismos; 3º 17 guarismos; 4º 12 guarismos?

2. Cuántas cifras tienen los números enteros cuyas mayores unidades son: 1º decenas de billón; 2º centenas de mil; 3º unidades de millón; 4º centenas de millón?

3. Hágase 10 y 100 veces mayor cada uno de los números siguiente: 384, 645, 8.572.

4. Hágase 100 y 1 000 veces menor cada uno de los números siguientes: 2 000, 384 000, 75 000.

5. Escríbanse con cifras arábigas las cantidades siguientes: XLV, LVIII, LXIX, LXXXIV, XCIX, CIX, CCXXXIV, CDXCIX, CMLIV, MCDXCII, MDCCXIX, MDCCCLXXXVII.

6. Escríbanse con cifras romanas las cantidades siguientes: 85, 69, 979, 904, 1 099, 1 214, 1 328, 1 355, 1 451, 1 515, 1 610, 1 648, 1 699, 1 779, 1 794, 1 800, 1 814, 1 830, 1 848, 1 870, 1 880, 1 910.

OPERACIONES
CON LOS NUMEROS ENTEROS

DEFINICIONES.

32. Operaciones aritméticas.—Llámanse *operaciones*, en Aritmética, las diversas combinaciones que se hacen con los números, cuando se quiere buscar algún resultado.

Las operaciones fundamentales son cuatro: *adición*, *sustracción*, *multiplicación* y *división*.

33. Prueba.—*Prueba* de una operación es otra operación que tiene por objeto cerciorarse de la exactitud de la primera.

La prueba no da siempre *certidumbre absoluta* de la exactitud de una operación, como lo veremos a continuación.

34. Problema.—*Problema* es una cuestión que tiene por objeto buscar cantidades desconocidas, valiéndose para ello de otras conocidas.

Las cantidades conocidas son los *datos* del problema.

La resolución de un problema comprende la solución y el cálculo.

Solución es la indicación de las operaciones que se deben efectuar.

Cálculo es la ejecución de las operaciones indicadas en la solución.

CAPITULO II

ADICION DE ENTEROS

§ I.—Noción de la adición

35. Definición.—*Adición* es una operación que tiene por objeto reunir varios números de una misma especie en uno solo, llamado suma o total.

Si se quiere saber, por ejemplo, cuántos niños hay en tres clases de las cuales la primera tiene 45, la segunda, 62, y la tercera, 84, se debe ejecutar una adición, reuniendo los números 45, 62 y 84 en uno solo.

36. Sumandos.—Las cantidades que han de añadirse unas a otras se llaman *sumandos*.

En la suma de números concretos, los sumandos han de ser cantidades de una misma especie, u homogéneas.

Así, se pueden sumar pesos con pesos, metros con metros, botellas con botellas, pero no pesos con metros ni botellas.

37. Signo de la adición.—La adición se indica con el signo + que se lee *más*, el cual se coloca entre los números que deben sumarse.

Así, para indicar la suma de 3, 4 y 7, se escribe:

$$3 + 4 + 7$$

Que se lee: *tres más cuatro más siete*.

38. Igualdad.—Dos rayitas horizontales = forman el signo de *igualdad*, que se lee *igual a*, e indica que la cantidad o cantidades que le preceden son iguales a las que le siguen

Podemos escribir: $3 + 4 + 7 = 14$

lo cual se llama *una igualdad*. La parte $3 + 4 + 7$ es el *primer miembro*, y 14, el *segundo miembro*.

II.—Práctica de la adición

Consideraremos dos casos:

39. 1er Caso.—Suma de un número dígito con cualquier otro número.

Para sumar un número dígito con cualquier otro número, se añade el primero a la cifra de las unidades simples del segundo.

Si ocurriere que esta suma resulte mayor que 9, se suma la decena con las decenas del segundo número.

Así, para sumar 6 con 342 se añade 6 a 2, y resulta la suma 348.

Para sumar 8 con 347, se dirá: 8 y 7 son 15; escribo 5 y llevo 1 decena; 1 y 4 son 5, etc.

40. 2º Caso.—Suma de varios números cualesquiera.

Súmense: 847, 292 y 759.

847	}	<i>Sumandos.</i>	Escribo primero los sumandos u-
292			nos debajo de otros, colocando las
759			unidades debajo de las unidades,
1898		<i>Total</i>	las decenas debajo de las decenas,

etc. Tiro una raya debajo de los sumandos, y empiezo por la derecha diciendo: 7 unidades más 2 unidades son 9 unidades, más 9 unidades son 18 unidades. En 18 unidades hay 8 unidades que escribo debajo de las unidades, y 1 decena que llevo a la columna de las decenas. Una decena y 4 decenas son 5 decenas, y nueve decenas son 14 decenas, y 5 decenas son 19 decenas. En 19 decenas hay 9 decenas que escribo debajo de las decenas, y una centena que llevo a la columna de las centenas. Una centena y 8 centenas son 9 centenas, y 2 centenas son 11 centenas, y 7 centenas son 18 centenas que escribo.

El total es 1898.

En la *práctica*, se dice:

7 y 2...9 y 9...18, escribo 8 y llevo 1;
1 y 4...5 y 9...14 y 5...19, escribo 9 y llevo 1;
1 y 8...9 y 2...11 y 7...18, que escribo.

41. REGLA.—Para sumar varios números cualesquiera, se escriben los sumandos unos debajo de otros, de modo que las unidades de mismo orden vayan en una misma columna; se tira una raya debajo del último sumando, y se escribe el resultado debajo de esta raya.

Empezando por la derecha, se suman las cifras de la columna de las unidades; si la suma no pasa de 9, se escribe íntegra; si pasa de 9, se escriben sólo las unidades, reservando las decenas que resulten, para sumarlas con las cifras de la columna siguiente.

Se suman del mismo modo las demás columnas, y debajo de la última se escribe íntegro el total que resulte.

42. Nota.—I. Se empieza la adición por la columna de las unidades para que se puedan llevar a la columna de las decenas las que provienen de la adición de la primera columna, y las centenas que provienen de la segunda columna se puedan llevar a la de las centenas, etc.

II.—Cuando hay muchos sumandos, se puede, para facilitar el cálculo, formar varios grupos y hacer sumas parciales, escribir el resultado de cada adición parcial y sumar luego estos resultados.

43. Prueba de la adición.—La prueba de la adición puede hacerse principalmente de los dos modos siguientes:

1º Repitiendo la operación en un orden inverso al que se siguió al ejecutarla, como lo manifiesta el ejemplo adjunto.

22 481	<i>Prueba.</i>
7 642	
8975	
426	
5 438	

22 481 *Total.*

2º Cuando hay muchos sumandos, se pueden formar con ellos grupos de 3, 4, 5... que se suman separadamente. Después se reúnen en uno solo todos los totales parciales. El último resultado debe ser igual a la suma primitiva.

12 324	}	18 191
925		
4 942	}	29 839
25 015		
98		
4 726		

§ III. — Cálculo mental en la adición

44. No existen reglas generales y absolutas para el cálculo mental, sólo la práctica enseña varios procedimientos rápidos que vamos a poner de manifiesto por medio de varios ejemplos.

El procedimiento del *número redondo* es propiamente como la base del cálculo mental.

Número redondo es el que termina por uno o varios ceros; dado un número, para hacerlo redondo basta añadirle el *complemento* a 10 de la cifra de las unidades.

Observemos primero que cada uno de los números dígitos tiene su complemento a 10, esto es un número que, añadido al primero, da 10.

I. *Súmense:* 1º 6, 7 y 4.

Diremos: 6, 4 y 7 son 17, pues 4 es el complemento de 6.

2º 7, 8, 3 y 2.

Se dice, agrupando las cifras cuya suma es igual a 10:
7, 3, 8 y 2=20, pues 7+3=10; 8+2=10.

3º 8, 7, 12 y 15.

Se dice:
o también 8, 7 y 15 son 30 y 12=42
8 y 12, 20 y 15, 35 y 7=42.

II. *Súmense:* 1º 87 y 15.

Se puede añadir a 87 lo que le falta para que iguale a 90, tomándolo a 15, pues más fácil es operar con los números 90 y 12, desde luego se ve, en efecto, que 90+12=102.

Hubiéramos podido decir también 87+10+5=102.

2º 235 y 127.

Mentalmente se dice 235 y 5 y 122 son 362.
o también 235 y 120 y 7 son 362.

III. *Súmense:* 342 y 453.

Se descomponen los números en sus unidades de varios ór-

denes; se hacen las sumas de las unidades del mismo orden, empezando por el mayor, y se suman los resultados parciales.

Para sumar 342 con 453, se dice:
 300 y 400 = 700
 40 y 50 = 90
 2 y 3 = 5
 Total 795

Para sumar los números 692, 565, 422, se dice:
 600, 500 y 400 = 1500
 90, 60 y 20 = 170
 2, 5 y 2 = 9
 total 1679

Nota.—Generalmente no se emplea exclusivamente el cálculo mental; a proporción que se obtiene un resultado, se lo escribe, y se combina el cálculo mental con el cálculo escrito.

CAPITULO III

SUSTRACCION DE ENTEROS

§ I. — Noción de la sustracción

45. Definición.—*Sustracción* o *resta* es una operación por medio de la cual se quita un número de otro de la misma especie.

La sustracción es una operación inversa de la adición, y puede también definirse así: Es una operación en la cual dada la suma de dos números y uno de ellos, se busca el otro.

Así, la operación por medio de la cual se averigua cuántas naranjas deben separarse o sacarse de un canasto que tiene 86, para que queden 34, se llama *sustracción*, porque para esto debe restarse 34 de 86.

46. Signo de la sustracción.—La sustracción se indica con el signo —, que se lee *menos*.

Para indicar que de 19 se restan 7, se escribe $19 - 7$, y se lee 19 menos 7.

47. Minuendo y sustraendo.—Llámase *minuendo* la cantidad de que ha de restarse o quitarse otra menor.

Sustraendo es el número que se resta del minuendo. En el ejemplo anterior, 19 es el *minuendo*, y 7 el *sustraendo*.

48. El resultado de la sustracción se llama *resta*, *exceso*, o *diferencia*.

§ II. — Práctica de la sustracción

Ocurren dos casos en la operación de restar:

49. 1er. Caso.—Restar un número de otro cuando cada cifra del sustraendo es menor que su correspondiente del minuendo, o igual a ella.

Réstese 325 de 749.

749 <i>Minuendo</i>	Basta restar sucesivamente las
325 <i>Sustraendo</i>	unidades, decenas y centenas de
—	325 de las unidades, decenas y
424 <i>Resta</i>	centenas de 749.

Quito 5 unidades de 9, y quedan 4; 2 decenas de 4, y quedan 2; 3 centenas de 7, y quedan 4; o más brevemente: 5 de 9, 4; 2 de 4, 2; 3 de 7, 4; la cantidad 424 representará la diferencia que hay entre los dos números propuestos.

50. 2º Caso.—Restar dos números cuando una o varias cifras del sustraendo son mayores que sus correspondientes del minuendo.

Entonces hay que aplicar el principio siguiente que se considera como evidente:

La diferencia de dos números no se altera cuando se les añade una misma cantidad.

Sea restar 3 849 de 6 456.

6 456 Después de haber dispuesto los números
3 849 como en el caso precedente, se ve que no
2 607 pueden restarse 9 unidades de 6; añado entonces al 6 una decena o 10 unidades, lo cual da 16; 9 de 16, 7; como añadí una decena a las 6 unidades, debo añadir también una decena a las 1 y 4 son 5, de 5 queda 0; 8 de 14 quedan 6, llevo 1 millar a los 3 del sustraendo; 1 y 3 son 4, de 6 quedan 2.

En la práctica se dice así:

de 9 a 16 van 7, y llevo una;
de 5 a 5, cero;
de 8 a 14, 6;
de 4 a 6, 2.

De lo que antecede se deduce la siguiente regla:

51. REGLA.—Para restar un número de otro, se escribe el sustraendo debajo del minuendo, de modo que vayan las unidades debajo de las unidades, las decenas debajo de las decenas etc.

Debajo del sustraendo se tira una raya para separarlo del resultado.

Se quitan sucesivamente las unidades, decenas, centenas, etc. del sustraendo, de las unidades, decenas, centenas, etc. del minuendo. Si una cifra del sustraendo es mayor que su correspondiente del minuendo, se añaden a ésta diez unidades de su orden y por compensación, se añade una unidad de su orden a la cifra siguiente del sustraendo.

El número así obtenido es la diferencia de los números dados.

52. Nota.—Se empieza la sustracción por la derecha, porque si se empezase por la izquierda, sería menester cambiar el resultado ya escrito cada vez que la cifra siguiente del sustraendo fuere mayor que su correspondiente del minuendo.

No importa empezar la sustracción por cualquier columna cuando todas las cifras del sustraendo son menores que sus correspondientes del minuendo.

53. Prueba de la sustracción.—La prueba de la sustracción puede hacerse principalmente de dos modos:

1º Por la adición.—Sumando la diferencia con el sustraendo, el total debe ser igual al minuendo.

$$\begin{array}{r} 1\ 854 \\ 968 \\ \hline 1\ 854 \text{ Prueba.} \end{array}$$

Diferencia: 886

2º Por la sustracción.—Restando del minuendo la diferencia, el resultado debe ser igual al sustraendo.

Operación	Prueba
2 908	2 908
1 439	1 469
Diferencia: 1 469	1 439 = al sustraendo.

§ III. — Cálculo mental en la adición y sustracción combinadas

54. I. *Súmense*: 1º 6 425 y 193.

A 6 425 se añadirá 200 y se restará 7, ya que $200-7=193$.
 $6\ 425+193=6\ 425+200-7=6\ 618$

2º 4 225 y 992.

A 4 225 se añadirá 1 000 y se restará 8, pues $1\ 000-8=992$.
 $4\ 225+1\ 000-8=5\ 217$

II. De 425 réstese: 1º 93.

Se restará 100 y se añadirá 7, pues $100-7=93$.
 $425-93=425-100+7=332$

2º 294.

Se restará 300 y se añadirá 6.
 $425-294=425-300+6=131$

III. De 48 réstese $8+4+6$.

Se dice $48-(8+4+6)=48-8-4-6$
 $48-8=40, 40-4=36, 36-6=30.$

Lo que manifiesta que para restar de un número la suma de otros se restan sucesivamente estos números del primero.

IV. De 425 réstese 167.

He aquí como puede descomponerse la operación:

$$\begin{array}{r} 425 - 100 = 325 \\ 325 - 60 = 265 \\ 265 - 7 = 258 \end{array}$$

La diferencia es 258.

Para restar 60 de 325, hubiéramos podido restar 100 y añadir 40.

EJERCICIOS DE SUMAR Y RESTAR

Ejercicios orales

7. ¿Por qué no se empieza la adición por la izquierda, y cuándo puede empezarse por cualquier columna?
8. ¿Qué indica el total cuando se añade la ganancia al precio de compra?
9. ¿Qué indica el total cuando se añade la pérdida al precio de venta?
10. Si se añade la edad que tienes ahora al año de tu nacimiento, ¿qué indica el total?
11. ¿Por qué se empieza la sustracción por la derecha, y en qué caso sería indiferente empezarla por la izquierda o por cualquier columna?
12. ¿Cómo se hace la prueba de la sustracción por la sustracción?
13. ¿Qué número resulta sumando el sustraendo con la diferencia?
14. ¿Qué resulta si del minuendo se quita la diferencia?
15. Si se aumenta el minuendo ¿qué sucede con la diferencia?
16. ¿Qué sucede con la diferencia si se disminuye el minuendo?
17. ¿Qué alteración hay en la diferencia cuando se aumenta el sustraendo?
18. ¿Se altera la diferencia si se añade una misma cantidad a ambos términos?

19. Si se quita una misma cantidad de ambos términos, ¿queda alterada la diferencia?
20. ¿Qué cantidad resulta sumando juntamente el minuendo, el sustraendo y la diferencia?
21. Si a la suma de dos números se añade su diferencia ¿qué resulta en el total?
22. La diferencia de dos números añadida a su suma da 432; ¿cuál es el número mayor?
23. Cuando se conoce la suma de dos números y su diferencia, ¿cómo se encuentra el número mayor?
24. Si de la suma de dos números se resta su diferencia, ¿qué número sale en el resultado?
25. Conocida la suma de dos números y su diferencia, ¿qué debe hacerse para encontrar el menor?
26. La suma de dos números es igual a 24, su diferencia a 6; ¿cuál es el número menor?
27. La suma de dos números es igual a 50, su diferencia a 20; ¿cuál es el número menor?
28. ¿Qué resulta si se resta la suma de dos números del duplo del mayor?
29. ¿Qué resulta si se resta de la suma de dos números el duplo del menor?
30. La suma de dos números es 400, el duplo de su diferencia es 36; ¿cuáles son estos números?
31. La suma de dos números es 80, el duplo del menor es 60; ¿cuál es la diferencia de estos números?

CALCULO MENTAL

32. Efectuar las sumas siguientes:

1o. $3+9+7$;	3o. $7+4+6+3$;	5o. $27+33$;
2o. $6+5+4+5$;	4o. $6+3+1+7$;	6o. $26+34$;
33. Súmense: 1o. $42+58$; 3o. $509+491$; 5o. $333+367$;
2o. $72+27$; 4o. $712+688$; 6o. $426+174$.
34. Descomponer en dos partes de una sola cifra, y de todos los modos posibles, los números: 11, 12, 13, 14, 15, 16.
35. Súmense: 1º $4+15+6+23$; 3º $72+43+15+28$;
2º $56+87+44+21$; 4º $277+209+310$.

36. Súmense: 1º 215+97; 3º 312+95; 5º 292+63;
2º 133+92; 4º 434+91; 6º 896+119.
37. Con los datos del N° precedente efectuar las restas.
38. Súmense: 1º 125+97+319; 3º 67+43+198;
2º 150+91+174; 4º 288+98+147.
39. Efectuar las restas siguientes:
1º 247-92; 3º 333-88; 5º 382-105;
2º 423-93; 4º 234-107; 6º 382-98.
40. Réstense: 1º 80-50; 3º 2500-1200;
2º 350-170; 4º 4000-1200.
41. Efectúense las operaciones indicadas:
1º 440-95; 3º 82400+99; 5º 214+267+92;
2º 548+98; 4º 82400-99; 6º 74-28.

PROBLEMAS

42. Cristóbal Colón nació en Génova en 1436; a los 56 años descubrió la América y murió en Valladolid 14 años después; pregúntase; 1º en qué año descubrió la América; 2º en qué año falleció.
43. La América Meridional cuenta 46 897 500 habitantes; la América Septentrional, 117 985 000; Europa, 435 783 000; Asia, 864 565 500; Africa, 145 230 000; Oceanía, 46 000 000; ¿cuál es la población total del globo?
44. Celedonio tiene \$ 5 786; Felisa \$ 3 794, y Eudoxia tanto como los dos primeros juntos; ¿cuánto tiene esta última, y cuánto todos tres?
45. Pablo y Pedro se reparten 98 lápices; si Pablo debe recibir 10 más que Pedro, ¿cuántos cabrán a cada uno?
46. Patricio ha coprado paño, y lo revende en \$ 6 218, perdiendo \$ 143; ¿en cuánto lo había comprado?
47. Tres sobrinos han heredado: el 1º \$ 4 720; el 2º \$ 1 365 más que el 1º; y el 3º tanto como los otros dos juntos. Dígase cuánto fue la herencia total.
48. El gran Pontífice Pío IX nació en Mayo de 1792 y murió de edad de 86 años; ¿cuál fué el año de su muerte?
49. El mayor de dos números es 286 704, y su diferencia 79 815. ¿En cuánto el menor pasa al número 43 210?

50. Preguntado un hacendado por el número de ovejas que tiene, responde que en un redil tiene 732, en otro 984, en otro 762, en el cuarto 978, en el quinto 723, y en el último 324; ¿cuál es el número total de sus ovejas?
51. Varias personas contribuyen a la fabricación de una iglesia. Silvano da \$ 1 431; Milciades, \$ 1 395; Heraclio, \$ 989; Indalecio, \$ 763, y Gerardo, \$ 1 437; ¿con qué suma han contribuido los cinco juntos?
52. La suma de dos números es 45 215; su diferencia 23 949; ¿cuáles son estos dos números?
53. La diferencia de dos números es 2 369; el duplo del mayor es 6 508; ¿cuáles son estos números?
54. La diferencia de dos números es 3 215; el duplo del menor es 7 270; ¿cuál es el mayor?
55. La suma de dos números es 5 810; el duplo del menor es 1 374; ¿cuál es la diferencia de estos números?
56. Tres buques han cargado respectivamente 2 520, 1 990 y 2 150 costales de trigo; dos comerciantes compran, el uno 1 880 costales y el otro 1 720; ¿cuántos quedan por vender?
57. Un padre tenía 45 años cuando nació su hijo, ¿cuál será la edad de éste cuando el padre tenga 87 años?
58. El Libertador Simón Bolívar nació en Caracas en 1783; principió su carrera militar en 1811, y murió en la quinta de San Pedro, cerca de Santa Marta, 19 años después; 1º ¿qué edad tenía cuando principió su carrera militar? 2º ¿en qué año, y de qué edad murió?
59. Antonio deja al morir una fortuna de \$ 15 860, que debe repartirse como sigue: a sus herederos \$ 6 700, a un convento \$ 5 400 y el resto a los pobres; ¿cuánto les tocó a éstos?
60. Vicente deposita en el Banco \$ 8 752; saca una vez \$ 3 234, después \$ 1 700, más tarde \$ 962, y por fin \$ 49; ¿cuánto le queda todavía en el Banco?
61. Emerenciana cosecha en su hacienda 1 575 hectolitros de cebada y 900 de trigo. Vende 807 hectolitros de cebada y 391 de trigo a Humberto, y todo lo demás a Evaristo, ¿cuántos hectolitros de cada especie ha vendido a este último?
62. Raimundo tiene que caminar: 6 784 millas, de las cuales 2 324 en ferrocarril, 1 570 en coche, 450 a caballo, 175 a pie, y las restantes en vapor; ¿cuántas millas tiene que caminar en vapor?
63. En 1819 fundó Bolívar la República de Colombia, com-

puesta de los estados de Venezuela, Nueva Granada y Ecuador; en 1829 se desmembró Venezuela, y un año más tarde el Ecuador; ¿a los cuántos años de la fundación de la República se desmembró Venezuela, y en qué año el Ecuador?

CAPITULO IV

MULTIPLICACION DE ENTEROS

§ I. — Nociones generales

55. Definición.—*Multiplicación* es una operación por la cual se toma un número llamado *multiplicando* tantas veces como unidades tiene otro llamado *multiplicador*.

Según esta definición, multiplicar un número por 5, es tomarlo cinco veces.

Así pues, multiplicar 10 por 5 es lo mismo que *hacer la suma* de 5 números iguales a 10.

$$10 \times 5 = 10 + 10 + 10 + 10 + 10.$$

Por donde se ve: 1º que el producto de *cero* por cualquier número es *cero*, pues la suma de cualquier número de ceros es *cero*; 2º que el producto de 1 por cualquier número es igual a este número; porque multiplicar 1 por 10, por ejemplo, es hacer la suma de 10 números iguales a 1; luego el producto es 10.

Por definición también, el producto de un número por *cero* es igual a *cero*, y el producto por 1 de un número es igual a este número.

La definición precedente conviene sólo cuando el multiplicador es un *número entero*; la siguiente es general.

56. Otra definición.—Multiplicación es una operación que tiene por objeto buscar un número, llama-

do *producto*, que sea respecto del multiplicando lo que el multiplicador es respecto de la unidad.

Según esta definición, cuando el multiplicador es igual a 2 veces, 3 veces, 20 veces, etc. la unidad, el producto es igual a 2 veces, 3 veces, 20 veces, etc. el multiplicando; y cuando el multiplicador no es más que la décima parte, la centésima parte, los 45 milésimos, etc. de la unidad, el producto no es más que la décima parte, la centésima parte, los 45 milésimos, etc. del multiplicando.

57. Signo de la multiplicación.—La multiplicación se indica con el signo \times o con un punto puesto entre las cantidades que se deben multiplicar.

Así, para indicar el producto de 10 por 5 se escribe 10×5 o 10.5 , que se lee *10 multiplicado por 5*.

$$\text{Luego } 10 \times 5 = 10.5 = 50.$$

El producto de la suma de varios números por otro se indica escribiendo la suma entre paréntesis, posponiéndole el número por el cual se debe multiplicar.

Así, para indicar el producto de $3+4$ por 7, se escribirá: $(3+4) \times 7$, o $(3+4).7$, o más sencillamente $(3+4)7$.

58. El resultado de la multiplicación se llama *producto*.

El producto es de la misma especie que el multiplicando.

Así en este ejemplo: Si el metro de paño cuesta 9 pesos ¿cuánto costarán 7 metros? el multiplicando es 9 pesos; el producto buscado es también de la misma especie y por consiguiente 63 psos.

59. Factores del producto.—El multiplicando y multiplicador juntamente tomados son los *factores del producto*, esto es, los números que engendran el producto.

En el ejemplo 10×5 , 10 es el *multiplicando*, 5 el *multiplicador* y 50 el *producto*.

El multiplicando y el multiplicador, como tales, son siempre números abstractos, aunque en la prácti-

ca el multiplicando representa ordinariamente un número concreto.

60. Llámase *producto de varios factores*, el número que resulta multiplicando el primer factor por el segundo, el resultado por el tercero, este último resultado por el cuarto, y así sucesivamente.

Si consideramos el producto de los factores 2, 3, 5, tendremos:
 $2 \times 3 \times 5 = 30$.

61. *Tabla de multiplicar*.—Para ejecutar con facilidad la multiplicación, es necesario tomar de memoria los productos de dos números dígitos cualesquiera, contenidos en la siguiente tabla que, por haber sido inventada por Pitágoras, se llama *Tabla pitagórica*.

TABLA PITAGORICA

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Para construir esta Tabla, se escriben en línea horizontal las nueve primeras cifras.

En seguida se añade cada número de esta primera línea a sí mismo, y resulta la 2ª, que contiene los productos por 2 de los nueve primeros números.

Añadiendo cada número de la 1ª línea a su correspondiente de la 2ª, se forma la 3ª, que contiene los productos por 3 de los nueve primeros números.

Añadiendo sucesivamente los números de la 1ª y 3ª... los de la 1ª y 8ª, etc., se forman las líneas siguientes, que contienen los productos de los nueve primeros números por 4..., 9.

Para determinar por medio de esta tabla los productos de dos números dígitos cualesquiera, se busca uno de ellos en la primera fila horizontal y el otro en la 1ª hilera vertical; en la casilla en que se encuentran ambas, se halla el producto pedido.

Para encontrar el producto de 6 por 8, por ejemplo, se busca el número 6 en la primera fila horizontal y se baja verticalmente la hilera correspondiente a dicho número, hasta la octava fila; 48 es el producto buscado.

NOTA.—Se habría obtenido el mismo resultado buscando primero el 8 en la primera fila horizontal, y bajando en seguida verticalmente hasta la sexta. Por donde se ve que el producto de 6 por 8 es el mismo que el de 8 por 6.

62. *NUMERO DE CIFRAS DE UN PRODUCTO*.—El número de cifras de un producto de dos factores es igual al número total de las cifras de los factores, o a este número menos 1.

Sea el producto $3\ 527 \times 382$; digo que tendrá $4 + 3 = 7$ o 6 cifras.

En efecto, $3\ 527 <^{(1)} 10\ 000$, y $382 < 1\ 000$.

Multipiquemos ordenadamente.

$$3\ 527 \times 382 < 10\ 000 \times 1\ 000, \text{ ó } 10\ 000\ 000.$$

Ahora bien, $10\ 000\ 000$ es el menor número de 8 cifras; luego el producto $3\ 527 \times 382$, que es menor que $10\ 000\ 000$ no tendrá 8 cifras; no podrá tener sino 7, a lo más.

Tenemos también $3\ 527 > 1\ 000$, y $382 > 100$.

Luego $3\ 527 \times 382 > 1\ 000 \times 100$ ó $100\ 000$.

Pero $100\ 000$ es el menor número de 6 cifras; el producto $3\ 527 \times 382$ tendrá por lo tanto á lo menos 6 cifras.

(1) $<$ menor que; $>$ mayor que.

Estos signos se emplean para indicar una desigualdad

§ II. — Teoremas relativos a la multiplicación

63. **TEOREMA.** — Para multiplicar una suma por un número, basta multiplicar cada parte de ella por este número y sumar los resultados.

Sea multiplicar $(3+4)$ por 2; digo que tendremos:
 $(3+4) \cdot 2 = 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2.$

En efecto, multiplicar $(3+4)$ por 2 es (55) hacer la suma de dos números iguales a $(3+4)$:

$$\begin{array}{r} 3+4 \\ 3+4 \\ \hline 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 \end{array}$$

Sumando verticalmente, tenemos:
 por lo tanto $(3+4) \cdot 2 = 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2.$

64. **TEOREMA.** — Para multiplicar la diferencia de dos números por un tercero, basta multiplicar cada uno de ellos por el tercero y buscar la diferencia de los productos.

Sea multiplicar $(5-3)$ por 2; digo que tendremos:
 $(5-3) \cdot 2 = 5 \cdot 2 - 3 \cdot 2.$

En efecto, para repetir 2 veces $(5-3)$, basta hacer la suma de dos números iguales a $5-3$:

$$\begin{array}{r} 5-3 \\ 5-3 \\ \hline 5 \cdot 2 - 3 \cdot 2 \end{array}$$

Sumando verticalmente, tenemos:
 por lo tanto $(5-3) \cdot 2 = 5 \cdot 2 - 3 \cdot 2.$

65. **TEOREMA.** — Para multiplicar una suma por otra, basta multiplicar sucesivamente todas las partes de la primera por cada una de las partes de la segunda, y sumar los resultados.

Multiplíquese $(13+7)$ por $(5+8)$.

Debemos tener:

$$(13+7) \times (5+8) = 13 \cdot 5 + 7 \cdot 5 + 13 \cdot 8 + 7 \cdot 8.$$

En efecto, para repetir la suma $(13+7)$, $(5+8)$ veces, basta repetirla 5 y 8 veces, y sumar los resultados; luego

$$(13+7) \times 5 = 13 \cdot 5 + 7 \cdot 5 \quad (63)$$

$$(13+7) \times 8 = 13 \cdot 8 + 7 \cdot 8 \quad (63)$$

(1) *Teorema es una verdad que necesita ser demostrada.*

Sumando ordenadamente estas dos igualdades, tendremos:

$$\begin{array}{l} (13+7) \times 5 + (13+7) \times 8 \\ \text{o} \quad (13+7) \times (5+8) = 13 \cdot 5 + 7 \cdot 5 + 13 \cdot 8 + 7 \cdot 8. \end{array}$$

Nota. — De este teorema se infiere que, si se aumentan de cierta cantidad los dos factores de un producto, éste queda aumentado:

1º Del producto del multiplicando por el número añadido al multiplicador;

2º Del producto del multiplicador por el número añadido al multiplicando;

3º Del producto de los dos números añadidos.

66. Teorema. — *No se altera un producto cuando se invierte el orden de los factores.*

Consideraremos los siguientes casos:

I.—**PRODUCTO DE DOS FACTORES.**—Demostremos que

$$3 \times 4 = 4 \times 3.$$

Para ello, escribamos en fila horizontal las 3 unidades del multiplicando, y repitamos esta fila 4 veces:

$$\begin{array}{l} 1+1+1 \\ 1+1+1 \\ 1+1+1 \\ 1+1+1 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 1+1+1 \\ 1+1+1 \\ 1+1+1 \\ 1+1+1 \end{array}} \right\} 3 \times 4$$

$$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{4 \times 3}$$

Contando todas estas unidades por líneas horizontales resulta 3×4 , y por líneas verticales, 4×3 . Como en ambos casos hemos contado todas las unidades del cuadro, resulta que

$$3 \times 4 = 4 \times 3.$$

II.— No se altera el producto de varios factores cuando se invierte el orden de los dos últimos.

1º El producto tiene tres factores. Sea el producto 6. 4. 5; digo que tendremos:

$$6.4.5=6.5.4.$$

Para demostrarlo, escribamos el número 6, 4 veces en una misma línea horizontal, y repetimos esta línea 5 veces:

$$\left. \begin{array}{l} 6+6+6+6 \\ 6+6+6+6 \\ 6+6+6+6 \\ 6+6+6+6 \\ 6+6+6+6 \end{array} \right\} 6.4.5$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{6.5.4}$$

Cada línea horizontal contiene al 6 repetido 4 veces, esto es, 6.4; y como hay 5 líneas, tenemos 6.4.5.

Cada línea vertical contiene al 6 repetido 5 veces, esto es, 6.5; y como hay cuatro columnas, tenemos 6.5.4.

Siendo en ambos casos uno mismo el número de unidades, se infiere que

$$6.4.5=6.5.4$$

2º El producto tiene un número cualquiera de factores. Sea el producto 3. 4. 5. 6. 7.

Por definición (60) tenemos:

$$3.4.5.6.7=12.5.6.7=60.6.7.$$

Ahora bien, $60.6.7=60.7.6$ (1º)
luego tendremos también:

$$3.4.5.6.7=3.4.5.7.6$$

III.—No se altera el producto de varios factores cuando se invierte el orden de dos factores consecutivos.

1º Los factores son los dos primeros

Sea el producto 3.4.5.6; digo que es igual a 4.3.5.6.

En efecto, $3.4=4.3$ (I); estos productos iguales multiplicados por una misma cantidad 5.6, darán resultados iguales; luego:

$$3.4.5.6=4.3.5.6$$

2º Los dos factores ocupan cualquier lugar.

Sea el producto 3.4.5.6.7; digo que es igual a 3.4.6.5.7.

En efecto, $3.4.5.6=3.4.6.5$; (II)
luego $3.4.5.6.7=3.4.6.5.7$.

IV.—No se altera el producto de varios factores cuando se coloca un factor cualquiera en un lugar cualquiera.

Sea el producto 2.3.4.5.6.7.

Tenemos sucesivamente (III):

$$\begin{aligned} 2.3.4.5.6.7 &= 2.3.4.5.7.6 \\ &= 2.3.4.7.5.6 = 2.3.7.4.5.6 \\ &= 2.7.3.4.5.6 = 7.2.3.4.5.6 \end{aligned}$$

Por donde se ve que el factor 7 se ha colocado en todos los lugares. Del propio modo se demostraría que cualquier otro factor puede también colocarse sucesivamente en todos ellos.

Luego no se altera un producto cuando se invierte el orden de los factores.

Consecuencias.—De este teorema se deducen las dos consecuencias siguientes, y también los teoremas que van a continuación.

67. 1.—Para multiplicar un número por la suma de varios otros, basta multiplicar este número por cada parte de la suma, y sumar los resultados.

Multiplíquese 7 por la suma $(4+5)$; digo que tendremos:

$$7.(4+5)=7.4+7.5.$$

En efecto, según el caso III, invirtiendo el orden de los factores, resulta:

$$7.(4+5)=(4+5).7$$

y así volvemos al teorema N° 63;

$$\begin{aligned} \text{luego: } & 7.(4+5) = (4+5).7 = 4.7 + 5.7 \\ \text{o} & 7.(4+5) = 7.4 + 7.5. \end{aligned}$$

68. II.—Para multiplicar un número por la diferencia de otros dos, basta multiplicar este número por cada uno de los términos de la diferencia y restar los productos obtenidos.

Sea multiplicar 7 por la diferencia (8-5); digo que tendremos: $7.(8-5) = 7.8 - 7.5.$

$$\begin{aligned} \text{En efecto, } & 7.(8-5) = (8-5).7 & (66) \\ \text{ahora bien, } & (8-5).7 = 8.7 - 5.7 & (64) \\ \text{luego } & 7.(8-5) = (8-5).7 = 7.8 - 7.5 \end{aligned}$$

69. TEOREMA.—No se altera un producto cuando se reemplazan varios factores por su producto efectuado.

Sea el producto 3.4.5.6; digo que tendremos:
 $3.4.5.6 = 3.24.5.$

$$\begin{aligned} \text{En efecto } & 3.4.5.6 = 4.6.3.5 & (66) \\ \text{o} & 3.4.5.6 = 24.3.5 & (60) \\ \text{y por último } & 3.4.5.6 = 3.24.5 & (66) \end{aligned}$$

Nota.—Para multiplicar un número por varios factores, se lo puede multiplicar por el producto de ellos.

70. TEOREMA.—Para multiplicar un producto de varios factores por un número basta multiplicar uno de los factores por este número.

Sea multiplicar 8.3 por 7; digo que basta multiplicar por 7 el factor 3.

$$\begin{aligned} \text{En efecto, el producto } & 8.3.7 = 3.7.8 & (66) \\ \text{o} & 8.3.7 = 21.8 = 8.21 & (69) \end{aligned}$$

71. De donde se infiere que cuando se multiplica un factor de un producto por un número, el producto queda multiplicado por este número.

72. NOTA.—Para multiplicar dos o más números que rematan en ceros, basta multiplicar las cifras significativas sin hacer caso de los ceros, los cuales se escriben a la derecha del producto.

Multiplíquese 3 400 por 250; tenemos:

$$\begin{aligned} 3\ 400 &= 34.100 \\ 250 &= 25.10 \end{aligned}$$

Multipliquemos ordenadamente:

$$\begin{aligned} & 3\ 400.250 = 34.100.25.10 \\ \text{o} & 3\ 400.250 = 34.25.100.10 \\ \text{y por último } & 3\ 400.250 = 34.25.1\ 000 \end{aligned}$$

por donde se ve que, después de haber multiplicado 34 por 25, basta añadir tres ceros a la derecha del producto.

§ III. — Práctica de la multiplicación

Distinguiremos los tres casos siguientes:

73. Caso I.—Multiplicar un número dígito por otro. Puede obtenerse el producto de los dos números por medio de adiciones.

$$\text{Así } \quad 6.3 = 6 + 6 + 6 = 18.$$

Pero en la práctica la tabla de Pitágoras proporciona el producto.

74. Caso II.—Multiplicar un número cualquiera por un número dígito.

Multiplíquese 847 por 5.

El multiplicando 847 se compone de 7 unidades, 4 decenas y 8 centenas; para multiplicarlo por 5, basta (63) multiplicar por 5 todas sus partes, y sumar los resultados.

Disposición de la operación

$$\begin{array}{l} \text{factores del producto} \left\{ \begin{array}{l} 847 \text{ multiplicando} \\ \times 5 \text{ multiplicador} \end{array} \right. \\ \hline 4\ 235 \text{ producto} \end{array}$$

Se dice: 5 veces 7 unidades son 35 unidades, escri-

bo 5 y llevo 3 decenas; 5 veces 4 decenas son 20 decenas y 3 que llevo son 23 decenas; escribo 3 decenas y llevo 2 centenas; 5 veces 8 centenas son 40 centenas y 2 que llevo son 42 centenas que escribo.

El producto es 4 235.

75. REGLA.—Para multiplicar un número cualquiera por un número dígito, se escribe el multiplicador debajo del multiplicando y se tira una raya.

En seguida, empezando por la derecha, se multiplica sucesivamente cada cifra del multiplicando por el multiplicador. Si el producto no pasa de 9, se lo escribe; si es mayor, se escriben solamente las unidades de cada producto parcial, y se llevan las decenas para sumarlas con el producto siguiente.

Se continúa la operación hasta el último producto, que se escribe íntegro.

76. NOTA.—Si el multiplicador es un número formado por una cifra significativa seguida de ceros, se multiplica el número por la cifra significativa, y se escriben los ceros a la derecha del producto.

Ejemplo.—Multiplíquese 1 425 por 400.
Como 400 es igual a 4×100 , basta multiplicar 1 425 por 4 y el resultado por 100, (69) esto es, basta multiplicar por 4 y escribir dos ceros a la derecha del producto (72).

77. Caso III.—El multiplicando y el multiplicador tienen varias cifras.

Multiplíquese 3 827 por 584.

Tenemos: $584 = 500 + 80 + 4$.

Para repetir 584 veces el multiplicando, hay que multiplicarlo por 4, por 80 y por 500, y sumar los resultados, lo que ya sabemos hacer.

Disposición de la operación.

3 827	}	<i>multiplicando</i>
584	}	<i>multiplicador</i>

15 308	}	<i>productos parciales</i>
306 160		
1 913 500		

2 234 968		<i>producto total</i>

En la práctica no se escriben los ceros que terminan los productos parciales.
Entonces se tiene:

3 827
584

15 308
306 16
1 913 5

2 234 968

78. REGLA.—Para multiplicar entre sí dos números cualesquiera, se escribe el multiplicador debajo del multiplicando, de modo que las unidades de una misma especie se correspondan.

En seguida, empezando por la derecha, se multiplica sucesivamente todo el multiplicando por cada cifra del multiplicador, cuidando de escribir la primera cifra de cada producto parcial debajo de la cifra por la cual se multiplicó.

Se suman los productos parciales, y el total da el producto pedido.

Nota.—Si tuviéramos que multiplicar, por ejemplo, 847 por 2 003, tendríamos según la regla precedente:

847
2 003

2 541
1 694

1 696 541

79. Prueba de la multiplicación.—Para hacer la prueba de la multiplicación, se repite la operación, invirtiendo el orden de los factores, y debe resultar el mismo producto. (66).

Más adelante veremos otros procedimientos.

§ IV. — Nociones sobre las potencias

80. Llámase potencia de un número el producto de varios factores iguales a él.

Así, $2 \times 2 \times 2$ es una potencia de 2, y 25×25 , una potencia de 25.

81. Por grado de una potencia se entiende el número de veces que entra en ella un mismo factor.

Primera potencia de un número es el mismo número, el cual se llama base de la potencia.

Segunda potencia o cuadrado de un número es el producto de dicho número multiplicado por sí mismo.

Así, 4 es el cuadrado o segunda potencia de 2, pues $4=2 \times 2$

Tercera potencia o cubo de un número es el producto de dicho número tomado tres veces como factor.

Por ejemplo, 8 es el cubo de 2, pues $8=2 \times 2 \times 2$.

Cuarta potencia de un número es el producto de dicho número tomado cuatro veces como factor.

Así, 16 es la cuarta potencia de 2, pues $16=2 \times 2 \times 2 \times 2$.

82. Las potencias de los números se indican por medio de una cifra que se escribe a la derecha, y en la parte superior de ellos; esta cifra se llama *exponente*.

Así, 13^4 indica la cuarta potencia de 13, o el producto de 4 factores iguales a 13; luego:

$$13^4=13.13.13.13$$

El exponente 1 se subentiende siempre.

Así, $7^1=7$.

83. Para obtener una potencia de 10, basta escribir la cifra 1 seguida de tantos ceros como unidades tiene el grado de la potencia.

En efecto, $10^2=10 \times 10=100$
 $10^3=10 \times 10 \times 10=1000$
 etc.

84. TEOREMA.—Para multiplicar entre sí varias potencias de un mismo número, basta dar a éste un exponente igual a la suma de los exponentes de dichas potencias.

Sea multiplicar 2^4 por 2^2 ; digo que el producto será 2^6 .

En efecto, tenemos sucesivamente:

$$2^4 \times 2^2 = (2.2.2.2) \times (2.2) = 2.2.2.2.2.2 = 2^6 \text{ o } 2^{4+2}$$

$$\text{Asimismo } 3^2 \cdot 3^4 \cdot 3^5 = 3^{2+4+5} = 3^{11}$$

85. TEOREMA.—Para elevar la potencia de un número a otra potencia, basta elevar este número a una potencia cuyo exponente sea el producto de los exponentes.

$$\text{Así, } (7^2)^3 = 7^2 \cdot 7^2 \cdot 7^2$$

$$\text{Luego (84): } (7^2)^3 = 7^{2+2+2} = 7^{2 \cdot 3} = 7^6$$

86. TEOREMA.—Para elevar un producto a cualquier potencia, basta elevar cada uno de sus factores a esta potencia.

Para elevar al cuadrado el producto $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, tendremos sucesivamente:

$$(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5)^2 = (2^3 \cdot 3^2 \cdot 5) \times (2^3 \cdot 3^2 \cdot 5) \quad (80)$$

$$= 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$

$$= 2^3 \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 5 \quad (66)$$

$$= (2^3)^2 \cdot (3^2)^2 \cdot 5^2$$

y según el teorema anterior:

$$(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5)^2 = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^2$$

§ V. — Cálculo mental en la multiplicación

87. Multiplicación de un número por 2.—Se añade este número a sí mismo.

$$\text{Así, } 45 \times 2 = 45 + 45 = 90,$$

$$450 \times 2 = 450 + 450 = 900;$$

$$\text{o también } 45 \times 2 = 40 \times 2 + 5 \times 2 = 90; \quad (63)$$

$$\text{en fin } 45 \times 2 = 50 \times 2 - 5 \times 2 = 90.$$

88. Multiplicación por 9, por 99, por 999, etc.—Para multiplicar un número por 9, se lo multiplica por 10, y del producto se resta el número.

$$\text{Así, } 48 \times 9 = 48 \cdot (10 - 1) = 48 \cdot 10 - 48 \quad (64)$$

Para multiplicar un número por 99, se lo multiplica por 100, y se resta el número, pues $99=100-1$.

$$\text{Por ejemplo: } 225 \times 99 = 22\,500 - 225 = 22\,275$$

Para multiplicar por 999, se multiplica por 1000 y se resta el multiplicando, ya que $999=1000-1$.

89. Multiplicación por 11.—Si el número que se ha de multiplicar tiene sólo una cifra, se la repite dos veces.

$$\text{Así, } 8 \times 11 = 88.$$

Si el número tiene dos cifras, se hace la suma de estas cifras y se la escribe entre ellas.

Para multiplicar 52 por 11, se dice: $5+2=7$, que se coloca entre 5 y 2. El producto es 572.

Cuando esta suma tiene más de una cifra, se escribe sólo la de las unidades, y se añade la de las decenas a las del número.

Así, para multiplicar 75 por 11, diremos: $7+5=12$; se coloca el 2 entre 7 y 5, y se añade 1 a 7. El producto es 825.

El procedimiento general consiste en multiplicar el número por 10, y añadir al producto el mismo número.

$$\text{Así, } 45 \times 11 = 45.(10+1) = 45.10 + 45 \quad (63)$$

Asimismo, para multiplicar un número por 101, se lo multiplica por 100, y al producto se añade el multiplicando, pues $101=100+1$.

90. Multiplicación por 12.—Se puede multiplicar el número por 3 y por 4, ya que $12=3.4$.

Se lo puede también multiplicar por 10, y al producto añadir dos veces el número.

$$\text{Así, } \begin{array}{l} 428 \times 12 = 428.3.4. \\ 428 \times 12 = 428.(10+2) = 428.10 + 428.2. \end{array}$$

91. Multiplicación por 15.—Se multiplica el número por 3 y por 5, pues $15=3.5$.

Se puede también multiplicar por 10, y añadir al producto 5 veces el número, o la mitad del mismo producto.

Si el número es *par*, se le puede añadir su mitad, y multiplicar por 10 la suma obtenida.

Si el número es *impar*, se le añade su mitad por defecto, y se escribe 5 a la derecha de la suma obtenida.

Sea 17×15 ; tenemos $17+8=25$; a la derecha escribamos 5. El número 255 es el producto buscado.

92. Multiplicación por 20, 30, 40, etc.—Para multiplicar un número por 20 se lo multiplica por 2 y por 10, pues $20=2 \times 10$.

Para multiplicarlo por 30, se lo multiplica por 3 y por 10, etc.

93. Multiplicación por 19, 29, 39, etc.—Se multi-

plica por 20, por 30, por 40, etc., y del producto se resta el multiplicando.

$$\text{Así, } 45 \times 19 = 45.(20-1) = 45.20 - 45$$

94. Multiplicación por 21, 31, 41, etc.—Se multiplica por 20, 30, 40, etc., y al producto se añade el número.

$$\text{Así, } 45 \times 21 = 45.(20+1) = 45.20 + 45.$$

95. Producto de dos números comprendidos entre 10 y 20.—Para obtener este producto, se añade a uno de los números la cifra de las unidades del otro, se multiplica la suma por 10, y se añade el producto de las cifras de las unidades.

$$\begin{array}{l} \text{Sea } 15 \times 14 = (10+5).(10+4) \\ 15 \times 14 = 10.10 + 5.10 + 10.4 + 5.4 \\ = (10+5+4).10 + 5.4 \\ = (15+4).10 + 5.4. \end{array}$$

EJERCICIOS ORALES Y DE CALCULO MENTAL

64. ¿Qué pasa a ser el producto cuando se duplica, triplica o cuadruplica uno de los factores?

65. Si se toma la mitad, la tercera o la cuarta parte de un factor, ¿a qué se reduce el producto?

66. La diferencia de dos números es 15; ¿cuál será ésta si ambos números se multiplican por 3?

67. ¿Cuál es la sexta potencia de 2; la cuarta de 3, de 5?

68. Un número debe ser multiplicado sucesivamente por 3, 5, 8; ¿qué cantidad puede reemplazar a estos factores sucesivos?

69. Un número debe ser multiplicado por 24; ¿podrá encontrarse el producto por medio de multiplicaciones sucesivas? ¿Cuáles serían éstas?

70. ¿Cuánto suman los productos siguientes: 18×25 más 42×25 ? ¿Cómo puede encontrarse la misma suma con una sola multiplicación?

71. Búsquese la diferencia de los productos siguientes: $1^\circ 48 \times 16$ y 23×16 ; $2^\circ 54 \times 12$ y 42×12 .

72. ¿Qué alteración sufre un producto cuando se añade un mismo número, 5 por ejemplo, a ambos factores?
73. ¿Cómo se hace la prueba de la multiplicación por la multiplicación, y en qué principio se funda este procedimiento?
74. Búsquese el producto de 25 por 9, sin ejecutar directamente la multiplicación.
75. Búsquese el producto de 18 por 11, sin ejecutar directamente la multiplicación.
76. Búsquese del propio modo el producto de 49: 1º por 99 y 2º por 101.
77. ¿Cuál es el producto de 51 por 1 010, sin ejecutar directamente la multiplicación?
78. Efectuar mentalmente los productos siguientes:
- | | | |
|-----------------------|----------------------|-------------------------|
| 1º 10×10 ; | 3º 48×10 ; | 5º $138 \times 1 000$; |
| 2º 100×100 ; | 4º 56×100 ; | 6º 150×100 . |
79. Efectuar los productos:
- | | |
|---------------------|----------------------|
| 1º 65×2 ; | 3º 35×20 ; |
| 2º 214×3 ; | 4º 238×30 . |
80. Efectuar los productos:
- | | |
|---------------------|---------------------|
| 1º 25×12 ; | 3º 210×8 ; |
| 2º 41×12 ; | 4º 324×8 . |
81. Efectuar los productos:
- | | |
|--------------------|----------------------|
| 1º 28×9 ; | 3º 124×99 ; |
| 2º 98×9 ; | 4º 525×99 . |
82. Efectuar los productos siguientes:
- | | |
|---------------------|----------------------|
| 1º 42×11 ; | 3º 56×21 ; |
| 2º 48×11 ; | 4º 614×21 . |
83. Efectuar los productos:
- | | |
|---------------------|---------------------|
| 1º 15×9 ; | 3º 46×29 ; |
| 2º 24×19 ; | 4º 58×39 . |
84. Efectuar los productos:
- | | |
|---------------------|---------------------|
| 1º 52×5 ; | 3º 37×15 ; |
| 2º 62×15 ; | 4º 78×25 . |
85. Efectuar los productos:
- | | |
|---------------------|---------------------|
| 1º 17×14 ; | 3º 15×17 ; |
| 2º 12×18 ; | 4º 19×13 . |

PROBLEMAS

86. ¿Qué número de duraznos hay en 14 canastas, si cada una tiene 17 docenas?

87. Esteban compra 148 hectolitros de cebada, a \$ 2 hectolitro, por lo cual da en pago 67 metros de paño a \$ 4 metro, y el resto en especias; ¿a cuánto asciende el valor de éstas?
88. Heliodoro y Venancio salen de una misma ciudad en dirección contraria; el 1º camina 35 millas por día, y el 2º sólo 29; ¿a qué distancia estarán los dos al cabo de 16 días?
89. Braulio compra 14 vacas a \$ 40 cada una, 7 caballos a \$ 96 cada uno, 34 bueyes a \$ 57 cabeza, y 300 ovejas a \$ 4 cada una; revende todos estos animales por \$ 4 842; ¿cuánto gana en el negocio?
90. Fabricio tiene 367 carneros, Servando tiene 3 veces más que él, menos 409, y Hermenegildo tiene tanto como ambos juntos; ¿Cuántos carneros tienen los dos últimos, y cuántos los tres juntos?
91. Geroncio tiene \$ 145, Ezequías 7 veces tanto como él, más \$ 299, y Sulpicio tiene 3 veces tanto como los dos juntos, menos \$ 1 999. ¿Qué suma poseen los dos últimos, y todos tres juntos?
92. Se han tejido 216 docenas de pañuelos a \$ 5 docena. Si 2 pañuelos se venden por \$ 1, dígase el beneficio realizado.
93. En un castillo hay 18 ventanas en el 1er. piso; otras tantas en el 2º, y 12 buhardillas en el 3º; las ventanas del 1er. piso constan de 16 cristales cada una, las del 2º tienen 12, y las buhardillas 8; ¿cuántos cristales hay en este castillo, si en el piso bajo hay 198?
94. Se compraron 40 docenas de huevos en \$ 5 el ciento, y se han revendido a \$ 2 docena; ¿cuánto se ha ganado?
95. Un obrero que teje 5 m. de paño por día ha gastado 13 días para tejer una pieza. ¿Cuánto debe recibir, si le pagan a razón de \$ 2 por metro de paño tejido?
96. Un comerciante en vinos compra 4 pipas de vino de Burdeos de 240 litros cada una. Pagó por la compra \$ 160, \$ 35 por el transporte, \$ 110 de derechos y \$ 15 de comisión. Si hay 5 litros de heces en cada pipa, ¿a cómo tendrá que vender el litro de vino para ganar \$ 1 560?
97. Un hombre respira 18 veces por minuto, término medio. A cada inspiración introduce en sus pulmones 136 cm³ de oxígeno, poco más o menos; a cada expiración, arroja 106 cm³; ¿qué cantidad de oxígeno consume por hora?
98. Un mercader compra 8 barriles de vino de 220 litros cada uno, a \$ 115 el barril. Con este vino mezcla 345 litros de otro que vale \$ 1 el litro, y vende la mezcla a \$ 2 el litro. ¿Cuál es su beneficio?
99. Un librero compra 5 docenas de libros a \$ 3 el volumen; le dan 13 por 12 y le hacen sobre el precio de la factura una rebaja de \$ 54. ¿Qué beneficio realizará el librero al vender cada volumen a \$ 4?

100. Una arrendataria lleva al mercado 52 kg. de mantequilla; al principio se le ofrece tomar toda la mantequilla a razón de \$ 2 el medio kilogramo, pero prefiere aguardar. Más tarde le compran toda la mantequilla por \$ 210. ¿Cuánto ha ganado o perdido en la venta?

CAPITULO V

DIVISION DE ENTEROS

§ I. — Noción de la división

96. **Definición.**—*División* es una operación por la cual conociendo el producto de dos factores y uno de ellos, se busca el otro.

Así, dividir 40 por 5 es buscar un factor que, multiplicado por 5, da 40 por producto.

Se dice también que *división* es una operación cuyo objeto es partir un número en tantas partes iguales como unidades tiene otro.

97. **Dividendo, divisor, cociente.**—Llámase *dividendo* el número que debe dividirse o partirse en tantas partes iguales como unidades tiene el divisor. *Divisor* es el número por el cual se ha de partir el dividendo, para saber cuántas veces cabe en él.

Cociente es el número que resulta de la división del dividendo por el divisor.

98. **División exacta y aproximada.**—La división es exacta cuando el dividendo contiene al divisor un número exacto de veces. Entonces se dice que el dividendo es un *múltiplo* del divisor; inversamente, el divisor es un *submúltiplo* del dividendo.

Por ejemplo, 42 es un *múltiplo* de 7, e inversamente, 7 es un *submúltiplo* o *divisor* de 42.

72 es un *múltiplo* de 9, y 9 un *divisor* de 72.

Múltiplo de un número es el producto de este número por otro.

La división es *aproximada*, cuando el dividendo no es un múltiplo cabal del divisor. En este caso la división tiene un *residuo*.

99. **Residuo.**—Llámase *residuo de una división aproximada*, el excedente del dividendo sobre el producto del divisor por el cociente. El residuo ha de ser necesariamente menor que el divisor.

Así, en la división de 45 por 7, el *cociente* es 6, y el *residuo* 3

Entonces se dice que se tiene el cociente *en menos de una unidad*.

Nota.—Cuando la división es *exacta*, el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente; cuando es *aproximada*, el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente, más el residuo.

100. **Indicación de la división.**—Para indicar que un número se ha de dividir por otro, se escribe el dividendo, y a continuación el divisor, separándolos por medio de dos puntos; y también poniendo el dividendo encima del divisor, separados con una raya horizontal.

Para expresar, por ejemplo que 42 se ha de dividir por 7, se

escribe: $42 : 7$ o $\frac{42}{7}$

101. **NUMERO DE CIFRAS DEL COCIENTE.**—El número de cifras del cociente es igual al número de ceros que se deban escribir a la derecha del divisor para formar un número que contenga al dividendo a lo menos una vez, y menos de 10 veces.

Sean por ejemplo, los números 79 792 y 651. Digo que el cociente tendrá 3 cifras.

En efecto el producto del divisor por el cociente debe reproducir el dividendo. Tenemos:

$$651 \times 100 < 79\ 792 < 651 \times 1\ 000.$$

Estando el dividendo comprendido entre el producto del divisor por 100 y por 1 000, el cociente estará comprendido entre 100 y 1 000. Ahora bien, todos los números comprendidos entre 100 y 1 000 constan de 3 cifras. Luego el cociente tiene 3 cifras, esto es, tantas como ceros se han escrito a la derecha de 651 para hacerlo mayor que 79 792.

§ II. — Teoremas relativos a la división

102. TEOREMA.—Para dividir una suma por un número, basta dividir todas las partes de la suma por dicho número, y sumar los resultados.

Divídase $(15+6)$ por 3.

La suma $15+6$ es el producto del divisor 3 por el cociente, que ha de ser evidentemente una suma. Ahora bien, para formar el dividendo, ha debido multiplicarse cada parte del cociente por el divisor (63). Luego, para dividir $15+6$ por 3, bastará dividir 15 por 3, y 6 por 3.

$$(15+6) : 3 = (15 : 3) + (6 : 3) = 5+2.$$

103. TEOREMA.—Para dividir por un número un producto de varios factores, basta dividir uno de ellos por este número.

Para dividir por 4 el producto $5.8.7$, digo que basta dividir por 4 el factor 8; el cociente será $5.2.7$.

En efecto, poniendo 2.4 en vez de 8, e invirtiendo el orden de los factores, resulta:

$$5.8.7 = 5.2.4.7 = 5.2.7.4$$

esto es $5.8.7 = (5.2.7)4$

Lo que manifiesta que $5.2.7$ es el cociente, ya que al multiplicarlo por el divisor 4, resulta el dividendo $5.8.7$.

104. COROLARIO.—Para dividir un producto por uno de sus factores, basta suprimir este factor.

Por ejemplo $(4.12.5) : 5 = 4.12.$

105. TEOREMA.—Cuando se multiplica el dividendo y el divisor por un mismo número, no se altera el cociente; pero el residuo, si lo hay, queda multiplicado por dicho número.

Si, por ejemplo, 51 es el dividendo, 9 el divisor, debemos tener:

$$51 = 9.5 + 6.$$

Multipliquemos ambos miembros por 7:

$$51.7 = (9.5).7 + 6.7$$

$$51.7 = (9.7).5 + 6.7.$$

El residuo 6 es menor que el divisor 9; por lo tanto 6.7 será menor que el nuevo divisor 9.7; por consiguiente 6.7 es el residuo de la división de 51.7 por 9.7.

Así, se ve que el dividendo y el divisor quedan multiplicados por 7, que no se ha alterado el cociente 5, y que el residuo está multiplicado por 7.

106. TEOREMA.—Cuando se divide el dividendo y el divisor por un mismo número, no se altera el cociente; pero el residuo, si lo hay, queda dividido por dicho número.

Si 69 es el dividendo, 9 el divisor, 7 el cociente y 6 el residuo, tendremos:

$$69 = 9.7 + 6$$

Dividamos ambos miembros por 3:

$$\begin{array}{r} 69 \quad 9.7 \quad 6 \\ \hline 3 \quad 3 \quad 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 69 \quad 9 \quad 6 \\ \hline 3 \quad 3 \quad 3 \end{array}$$

Esta igualdad manifiesta que habiendo dividido por 3 el dividendo y el divisor, no se ha alterado el cociente 7 y el residuo 6 queda dividido por 3.

107. TEOREMA.—Para dividir un número por el producto de varios factores, basta dividirlo por uno de ellos; en seguida, el cociente encontrado, por otro factor, y así sucesivamente.

Dividase 180 por el producto ($2 \times 3 \times 5$) o 30.

Dividiendo 180 sucesivamente por 2, 3 y 5, resulta:

$$\begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ \hline 0 & 90 & 3 \\ 0 & 30 & 5 \\ 0 & 6 & \end{array}$$

6 es el cociente buscado; en efecto:

$$\begin{array}{l} 180 = 2 \times 90 \quad (1) \\ 90 = 3 \times 30 \quad (2) \\ 30 = 5 \times 6 \quad (3) \end{array}$$

Multipliquemos ordenadamente las 3 igualdades:

$$180 \times 90 \times 30 = 2 \times 90 \times 3 \times 30 \times 5 \times 6.$$

Suprimiendo los factores comunes a ambos miembros, resulta:

$$180 = (2 \cdot 3 \cdot 5) \times 6.$$

Por donde se ve que al multiplicar por 6 el producto 2.3.5, resulta 180; luego 6 es el cociente de 180 por 2.3.5 ó 30.

108. TEOREMA.—El cociente de dos potencias de un mismo número se obtiene restando el exponente del divisor del exponente de dividendo.

Así, por ejemplo: $2^5 : 2^3 = 2^{5-3} = 2^2$.

Para comprobar este resultado, basta multiplicar el divisor por el cociente, y debe resultar el dividendo.

Tenemos en efecto: $2^3 \times 2^2 = 2^5$. (84)

§ III. — Práctica de la división

Distinguiremos tres casos en la división de enteros.

109. Caso I.—El divisor y el cociente son números dígitos.

Dividase 49 por 9.

Por medio de la tabla de Pitágoras, se ve desde luego que 49 está comprendido entre 45 y 54:

$$45 < 49 < 54$$

$$9.5 < 49 < 9.6.$$

ó Estando el cociente comprendido entre 5 y 6, 5 será en menos de una unidad, el cociente buscado, y tendremos:

$$49 = 9.5 + 4$$

110. Nota.—Se puede también encontrar el cociente por medio de sustracciones sucesivas.

Así, por ejemplo, para dividir 28 por 7 se puede restar 7 cuatro veces sucesivamente.

El número de sustracciones representa el cociente, y la última resta, si la hay, es el residuo de la división. En el presente caso, el cociente es 4, y el residuo nulo.

Este ejemplo manifiesta que la división no es más que una sustracción abreviada, y que es una operación inversa de la multiplicación.

111. Caso II.—El dividendo y el divisor son números compuestos, y el cociente, número dígito.

Dividase 5847 por 849.

Como tenemos: $849 \times 1 < 5847 < 849 \times 10$ el cociente estará comprendido entre 1 y 10, y tendrá por tanto una sola cifra.

Para determinar cuál es ésta, se observa que el producto del divisor por

el cociente es la suma de los productos de las 8 centenas, 4 decenas y 9 unidades del divisor por el cociente.

Disposición de la operación.

$$\begin{array}{r|l} \text{Dividendo } 5847 & 849 \text{ Divisor} \\ \hline 5094 & 6 \text{ Cociente} \\ \hline \text{Residuo } 753 & \end{array}$$

Ahora bien, el producto de las 8 centenas por la cifra del cociente, da centenas, y este producto no puede encontrarse sino en las 58 centenas del dividendo. El cociente de 58 por 8 (**Caso I**) que es 7, será la cifra buscada o una mayor.

Para averiguar que 7 es la cifra verdadera, se multiplica 849 por 7:

$$849 \times 7 = 5943.$$

Como el producto 5943 es mayor que 5847, el guarismo 7 excede al verdadero. Probemos con 6.

$$849 \times 6 = 5094.$$

Ya que 5094 es menor que 5847, se deduce que 6 es el guarismo del cociente. El residuo 753 indica que la división es aproximada.

$$\begin{array}{r|l} 5847 & 849 \\ \hline 753 & 6 \end{array}$$

Nota.—En la práctica no se escribe el producto del divisor por la cifra del cociente, y se dice: 58 entre 8 a 6; $6 \times 9 = 54$, de 57 quedan 3, y llevo 5; $6 \times 4 = 24$ y 5 que llevo son 29, de 34 quedan 5, y llevo 3; $6 \times 8 = 48$ y 3 que llevo son 51, de 58 quedan 7. El cociente es 6, y el residuo 753.

112. REGLA.—Para dividir un número de varias cifras por otro también de varias cifras, cuando el cociente tiene sólo una cifra, se escribe el mayor y a continuación el menor, se los separa por una raya vertical, y se subraya el segundo (las dos rayas se llaman galera.)

Quando el dividendo y el divisor tienen el mismo número de cifras, se divide la primera del dividendo por la primera del divisor; cuando el dividendo tiene una cifra más, se divide el número formado por las dos primeras cifras a izquierda del dividendo por la primera del divisor, y resulta la cifra del cociente o una cifra mayor.

Para comprobarla, se multiplica el divisor por esta cifra, y si el producto es menor que el dividendo o igual a él, el cociente hallado es el verdadero; si no se lo disminuye en una unidad, hasta que el producto pueda restarse del dividendo.

113. Caso III. El dividendo y el divisor son cualesquiera y el cociente tiene varias cifras.

Divídase 84935 por 243.

Como tenemos $243 \times 100 < 84935 < 243 \times 1000$, el cociente estará comprendido entre 100 y 1000, y por lo tanto constará de 3 cifras, esto es, centenas, decenas y unidades. Las centenas del cociente multiplicadas por el divisor darán centenas, y este producto no puede encontrarse sino en las 849 centenas del dividendo; digo que dividiendo 849 por 243 (como en el **Caso II**) se encontrará la cifra de las centenas del cociente; tenemos, en efecto:

$$3 \times 243 \leq 849 < 4 \times 243.$$

Estando colocados estos números por orden de valor, sus productos por 100 lo estarán también; luego

$$300 \times 243 \leq 84900 < 400 \times 243.$$

Ahora bien, 849 y 4×243 difieren a lo menos en una unidad, luego 84900 y 400×243 difieren a lo menos en una centena; por lo tanto se puede añadir 35 al número 84900 sin alterar la segunda desigualdad, y la primera se verificará a *fortiori*:

$$300 \times 243 < 84935 < 400 \times 243.$$

Estando el dividendo comprendido entre 300 y 400 veces el divisor, el cociente estará comprendido entre 300 y 400; luego 3 es la cifra de las centenas.

Disposición de la operación

$$\begin{array}{r|l} 84935 & 243 \\ \hline 12035 & 349 \quad 0 \\ 2315 & 2315 \\ 128 & 128 \end{array}$$

Si del dividendo se resta el producto del divisor por las centenas del cociente, el residuo 12035 contendrá todavía el producto del divisor por las decenas y las unidades del cociente, más el residuo, si lo hay. Pero

el producto del divisor por las decenas del cociente da decenas, que no podrán encontrarse sino en las 1203 decenas del residuo. Dividiendo 1203 por 243, resulta 4 por cociente.

Por medio de un raciocinio análogo al precedente, se demostraría que el dividendo está comprendido entre 340 y 350 veces el divisor; luego 4 es la cifra de las decenas del cociente.

Por último, si se resta de 12035 el producto del divisor por 4, el residuo 2315, dividido por el divisor, dará la cifra 9 de las unidades del cociente.

Así pues, el cociente de 84935 por 243 es 349.

114. REGLA.—Para dividir entre sí dos números cualesquiera, se escribe el divisor a la derecha del dividendo, separándolos por la galera; se separa de la izquierda del dividendo un número que contenga al divisor, al menos 1 vez y menos de 10 veces.

Se parte este dividendo parcial por el divisor, y se encuentra así la primera cifra del cociente; se multiplica todo el divisor por esta cifra, y el producto se resta del dividendo parcial.

A la derecha de la diferencia que resulta, se baja la siguiente cifra del dividendo; se divide este segundo dividendo parcial, por el divisor, y se encuentra la segunda cifra del cociente; se multiplica el divisor por esta cifra, y el producto se resta del segundo dividendo parcial.

Se continúa la operación hasta que se hayan bajado todos los guarismos del dividendo.

El conjunto de las cifras encontradas forma el cociente.

Nota.—Cuando después de bajar un guarismo del dividendo para formar otro dividendo parcial, éste es menor que el divisor, se escribe un cero en el cociente, se baja la cifra siguiente del dividendo, y se continúa la operación.

115. Caso particular.—El dividendo es un número compuesto y el divisor tiene sólo una cifra. Divídase 3976 por 8.

Aplicando la regla precedente, tendremos:

$$\begin{array}{r|l} 3976 & 8 \\ 77 & 497 \\ 56 & \\ 0 & \end{array}$$

En la práctica se escribe el cociente debajo del dividendo, y se opera mentalmente diciendo: 39 por 8 van 4, 77 por 8 van 9, 56 por 8 van 7.

116. CASO EN QUE EL DIVIDENDO Y EL DIVISOR REMATAN EN CEROS.—Cuando el dividendo y el divisor rematan en ceros, se puede, sin alterar el cociente, suprimir en ambos números igual número de ceros.

Para encontrar el residuo, se añade al residuo obtenido el número de ceros que se han suprimido en el dividendo (100).

Ejemplo. — Divídase 75000 por 4500.

Se suprimen dos ceros, y resultarán los números 750 y 45. Se efectuará la división según el procedimiento ordinario, y al residuo añadiremos dos ceros.

$$\begin{array}{r|l} 750 & 45 \\ 300 & 16 \\ 3000 & \end{array}$$

117. Prueba de la división.—1º *Por la multiplicación.*—Para hacer la prueba de la división, se multiplica el divisor por el cociente, al producto se añade el residuo, si lo hay, y debe resultar el dividendo (99)

Ejemplo. — Divídase 8467 por 8.

Operación	Prueba
$\begin{array}{r l} 8467 & 8 \\ 46 & 1058 \\ 67 & \\ 3 & \end{array}$	$\begin{array}{r} 1058 \\ \times 8 \\ \hline 8464 \\ + 3 \text{ residuo} \\ \hline 8467 \end{array}$

2º *Por la división.*—Para hacer la prueba de la división por la misma división, se divide el dividendo por el cociente, y debe resultar el divisor, y el mismo residuo, cuando lo hay.

118. Prueba de la multiplicación por la división.—Para ejecutar la prueba de la multiplicación, se puede dividir el producto por uno de los factores, y debe resultar el otro por cociente; la división no debe tener residuo.

§ IV. — Cálculo mental en la multiplicación y la división combinadas

Para este cálculo, muy provechoso sería tomar de memoria el duplo y la mitad, así como el triplo de los 100 primeros números.

119. Multiplicación de un número por 5.—Se multiplica el número por 10 y se divide el producto

$$\text{por } 2, \text{ ya que } 5 = \frac{10}{2}.$$

$$\text{Así } 224 \times 5 = \frac{2240}{2} = 1120.$$

120. Multiplicación por 25.—Se multiplica el número por 100, y se divide el producto por 4, pues

$$25 = \frac{100}{4}.$$

$$\text{Por ejemplo, } 845 \times 25 = \frac{84500}{4} = 21125.$$

121. Multiplicación por 15.—Se multiplica el número por 10, y al resultado se añade la mitad del producto.

$$\text{Así, } 220 \times 15 = 2200 + 1100 = 3300.$$

122. Multiplicación por 125.—Se multiplica el número por 1000, y se divide el producto por 8.

$$\text{Ejemplo: } 340 \times 125 = \frac{340000}{8} = 42500.$$

Se puede también multiplicar el número por 100, y añadir a este producto su cuarta parte.

$$340 \times 125 = 34000 + \frac{34000}{4} = 42500.$$

123. División por 5.—Se duplica el número, y se divide el resultado por 10.

$$\text{Así, } 70:5 = \frac{70 \times 2}{10} = 14.$$

124. División por 25.—Se multiplica el número por 4, y se divide el resultado por 100.

$$\text{Por ejemplo, } 350:25 = \frac{350 \times 4}{100} = 14.$$

125. División por 20, 30, 40, etc.—Se divide el número por 10, y se toma la mitad, el tercio, el cuarto del resultado.

Estos procedimientos se usan aun cuando los números no son divisibles por 5, 25, etc., pero entonces el cociente es un número decimal.

126. Como aplicación del teorema (107), con facilidad puede encontrarse el cociente cuando el divisor es el producto de factores simples, sobre todo de 2, 3 y 5.

Ejemplos:

Para dividir un número por 6 se divide por 2 y por 3					
—	—	12	—	3	— 4
—	—	15	—	3	— 5
—	—	18	—	2	— 9
—	—	45	—	5	— 9
—	—	54	—	6	— 9
—	—	75	—	3	— 25

etc.

EJERCICIOS ORALES

101. En una división exacta, ¿cómo se encuentra el dividendo, siendo conocidos el divisor y el cociente?

102. ¿Cómo se encuentra el dividendo si se conoce el divisor, el cociente y el residuo?

103. En una división exacta, ¿cómo se encuentra el divisor, siendo conocidos el dividendo y el cociente?

104. ¿Qué sucede en el cociente si se duplica, triplica, etc. el dividendo?

105. Si se toma la mitad, tercera parte, etc., del dividendo, ¿qué sucede en el cociente?

106. Si se duplica, triplica, etc., el divisor, ¿qué viene a ser el cociente?
107. Si se toma la mitad, tercera parte, etc., del divisor, ¿qué pasa a ser el cociente?
108. ¿Qué alteración ocurre en el producto, cuando se multiplica uno de sus factores por un número?
109. ¿Qué cambio hay en el producto, cuando se divide uno de sus factores por un número?
110. ¿Qué sucede al producto, si se multiplican dos de sus factores por un número?
111. Si se dividen dos factores de un producto por un mismo número, ¿qué cambio se verifica en el producto?
112. ¿Se altera un producto si se multiplica uno de sus factores por un número, y se divide otro factor por el mismo número?
113. ¿Cuál es el divisor si el dividendo es: 1º doble; 2º triple; 3º cuádruple del cociente?
114. ¿Cuál es el divisor cuando el cociente es: 1º doble; 2º cuádruple; 3º quíntuplo del dividendo?
115. ¿Qué se hace el cociente de una división: 1º si se aumenta el dividendo; 2º si se disminuye el dividendo; 3º si se disminuye el divisor; 4º si se aumenta el divisor?
116. ¿Cuál será el cociente de una división: 1º si se añade el divisor al dividendo; 2º si se resta el divisor del dividendo?
117. Dada la suma de dos números y su cociente, ¿qué debe hacerse para encontrar el número menor? — Aplicación: suma 64, cociente 7.
118. Dada la diferencia de dos números y su cociente, ¿cómo se encontrará el menor?—Aplicación: diferencia 144, cociente 13.
119. Habiendo partido el dividendo por un número, 7 por ejemplo, si se multiplica el divisor por este mismo número; ¿cuál será el cociente?
120. Un número debe dividirse por el producto $3 \times 5 \times 7 \times 9$; ¿qué alteración habría en el cociente si se suprimiera en el divisor: 1º el factor 5; 2º los factores 7 y 9?
121. En lugar de dividir un número sucesivamente por los factores 2, 5 y 8, ¿por qué cantidad sería menester dividirlo para ejecutar un sola división?
122. ¿Cómo podría dividirse un número por 21, haciendo dos divisiones sucesivas?

123. ¿Cuándo acontece que el número que se añade al dividendo, aumenta sólo el residuo sin hacer variar el cociente?
124. ¿Cuándo altera el cociente un número que se añade al dividendo?
125. Si una división da residuo, ¿cuál es el menor número que se debe quitar del dividendo para que resulte un cociente exacto?
126. Si la división da residuo, ¿cuál es el menor número que se debe añadir al dividendo para que salga un cociente exacto?
127. ¿Cómo se hace la prueba de la multiplicación por la división?
128. ¿Cómo se hace la prueba de la división por la multiplicación?
129. ¿Cómo se hace la prueba de la división por la división?

CALCULO MENTAL

130. Dividir por 2 los números siguientes:
14 ; 20 ; 54 ; 90 ; 122 ; 678.
131. Dividir por 5 los números siguientes:
75 ; 125 ; 160 ; 700 ; 905 ; 1000.
132. Dividir por 50 los números siguientes:
300 ; 350 ; 450 ; 700.
133. Dividir por 25 los números siguientes:
75 ; 125 ; 300 ; 475.
134. Dividir por 15 los números siguientes:
60 ; 75 ; 120 ; 600.
135. Efectuar las divisiones siguientes:
1º 460:20; 3º 520:40; 5º 880:80
2º 480:20; 4º 640:40; 6º 720:80
136. Dividir por 12 los números siguientes:
60 ; 120 ; 180 ; 288 ; 420 ; 456.

PROBLEMAS

137. ¿Por qué número debe dividirse 106 938 para que resulte 457?
138. ¿Cuántos días necesitará un escribiente para copiar un

libro de 720 páginas, si copia 3 en 1 hora, y si trabaja 12 horas por día?

139. Un general reparte 110 000 cartuchos a 5 batallones compuestos de 550 hombres cada uno; ¿cuántos cartuchos tocan a cada soldado?

140. Un ejército de 6 000 hombres tiene víveres para 5 meses, si se despiden 4 500 soldados, ¿cuánto tiempo podrán durar los mismos víveres para los restantes?

141. Compró 150 hectáreas de terreno por \$ 9 750, y vendo una parte de él por \$ 7 140, a \$ 85 la hectárea; deseo saber cuántas me quedan y cuánto he ganado en cada una de las que he vendido.

142. Raimundo compra igual número de vacas y caballos por \$ 9 600; cada vaca le sale a \$ 23, y cada caballo a \$ 97; pregúntase cuántas vacas y caballos ha comprado.

143. Un hacendado compra cierto número de animales por \$ 8 050, vende una parte de ellos por \$ 6 237, a \$ 63 cada uno, y gana en todos éstos \$ 1 683; pregúntase cuántos compró, y qué suma ganó en cada uno de los vendidos.

144. Vicente compra cierta cantidad de barriles de harina por \$ 1 424 y los vende todos por \$ 2 492, ganando así \$ 3 por barril, ¿cuántos barriles compró, y cuánto le costó cada uno?

145. Vendiendo 25 metros de paño por \$ 275, se ha ganado \$ 2 por metro. ¿Cuánto mide la pieza de paño que se compró por \$ 576?

PROBLEMAS

SOBRE LAS CUATRO OPERACIONES FUNDAMENTALES

146. Marcelino nació cuando tenía 27 años su padre y contaba 33 cuando este murió; ¿cuánto tiempo vivió el padre?

147. Antonio compra caballos por \$ 4 100; al revenderlos por \$ 4 400, gana \$ 20 en cada uno; pregúntase cuántos caballos ha comprado.

148. Tres toneles de aguardiente han costado juntos \$ 675 de compra, \$ 175 de derechos, y \$ 50 de transporte y otros gastos; ¿a cómo debe venderse el litro para ganar en todo \$ 180, sabiendo que un tonel contiene 120 litros?

149. Dos obreros que trabajan juntos durante 30 días, han ganado \$ 150; la ganancia diaria del uno es de \$ 3 ¿cuál es la del otro?

150. En una familia el padre gana \$ 5 por día, y la madre \$ 2; si el gasto diario es de \$ 3, ¿cuánto habrán economizado al cabo de un mes de 30 días, de los cuales sólo 26 son de trabajo?

151. Feliciano va al mercado con duraznos; ha perdido 35, da 8 a los pobres, vende 7 docenas en el camino y llega con 476, ¿cuántos tenía al salir de su casa?

152. Si me diesen \$ 150, podría pagar una deuda de \$ 290, y me quedarían \$ 83. ¿Cuánto tengo?

153. Si hubiese vendido \$ 20 menos una mercancía que me costaba \$ 400, no habría ganado sino \$ 18. ¿En cuánto la vendí?

154. El comerciante Simplicio manda fabricar 16 pares de botas por \$ 206; vende la mitad a \$ 14 el par; ¿en cuánto debe vender cada uno de los pares restantes para ganar en todo \$ 26?

155. Dos socios se han repartido cierta cantidad: al primero le han cabido \$ 445; al segundo, tres veces tanto como al primero, menos \$ 246; ¿cuál es la suma repartida?

156. Dos individuos se hallan a 50 millas de distancia uno de otro, y van al encuentro, andando el uno 2 millas por hora, y el otro 3; ¿a qué distancia se hallarán después de 5 horas de marcha?

157. El mayor de dos números es 73 veces 109, y la diferencia de ambos es igual a 17 veces 28, ¿cuál es el número menor?

158. La suma de dos números es 360, y el menor 114 ¿cuál es el producto del mayor por el menor?

159. La suma de dos números es 5 764 y su diferencia 4 892 ¿Cuáles son estos números?

160. El producto de dos números es 6 840; si se quita 5 al multiplicador, el producto se disminuye de 760. ¿Cuáles son estos dos números?

161. La suma de dos números es 6 210, su cociente es 17, ¿cuáles son estos números?

162. La suma de dos números es 6 000; su cociente es 14 y el residuo de su división 45. ¿Cuáles son estos números?

163. ¿Cuál es el número que, dividido por 453, da por cociente 307 y por residuo 109?

164. Norberto paga \$ 294 por igual número de metros de paño de tres precios diferentes: el 1º de a \$ 5, el 2º de a \$ 7, y el 3º de a \$ 9 metro; ¿cuántos metros ha comprado de cada precio?

165. Enrique paga \$ 18 810 por cierto número de caballos, y vende una parte de ellos por \$ 7 990, a \$ 85 cada uno, perdiendo en este negocio \$ 10 por caballo; ¿en cuánto debe vender los restantes para ganar \$ 2 180 en todos los caballos?

166. ¿Cuál es el número que si se divide por 45, y se aumenta 50 al cociente, y a la suma que resulta se le quita la diferencia de 16 a 28, y el resultado se multiplica por 6, y el producto de esta multiplicación se parte por 24, da 12 en el cociente?

167. Dos relojes eléctricos, A y B, colocados en los extremos de una calle de 1804 m. de longitud, dan la hora a 3 segundos de intervalo. ¿Cuál es el punto de la calle de donde se oyen los dos relojes dar la hora al mismo tiempo, sabiendo que el sonido recorre 340 m. por segundo, y que el reloj A da primero?

168. Un chalan compra caballos por \$ 800; al venderlos en \$ 880, gana \$ 10 en cada uno. Dígase el número de caballos comprados y el precio de compra de cada uno.

169. Dos jugadores A y B convienen en que, después de cada mano, el que pierda dará al otro \$ 2; después de 15 manos, el jugador A ha ganado \$ 14; ¿cuántas manos ha ganado cada uno?

170. Un escolar dice a uno de sus discípulos: para comprar 10 libros me faltarían \$ 15, pero si no comprase más que 4 me sobrarían \$ 3. Se pregunta 1º el precio de un libro; 2º cuánto tenía dicho escolar.

171. Tomás quiere dividir \$ 4 590 en tres partes, de modo que la 2ª tenga \$ 150 menos que la 1ª, la cual debe ser de \$ 1 850; ¿cuál será la 3ª?

172. Se han multiplicado entre sí dos números enteros, siendo el multiplicando 63 y el producto 3 339; pero ha habido un error tomando 3 en vez de 5 en las unidades del multiplicador; ¿cuál debe ser el verdadero producto?

173. Teodosio ha comprado 15 docenas de naranjas en dos sacos; pero hay en el uno 30 naranjas más que en el otro; ¿cuántas corresponden a cada saco?

174. Una fuente tiene 1 980 litros de capacidad; ¿qué cantidad de agua debe echar por minuto una llave que la llena en 3 horas?

175. Dos caños arrojan por minuto, el uno 12 litros y el otro 16, y llenan juntos un aljibe en 3 horas 15 minutos; ¿cuántos litros de capacidad tiene el aljibe?

176. Una pila tiene 4 775 litros de capacidad; ¿en cuántas

horas la llenarán dos caños que arrojan por minuto, el uno 10 litros y el otro 15 litros?

177. Un reloj adelanta 3 minutos cada 4 horas, ¿cuánto habrá adelantado al fin de una semana?

178. Hace ya 45 horas que un reloj adelanta 3 minutos cada 5 horas; ¿qué hora señala el reloj cuando son las 8 y 50 minutos?

179. Ya hace 33 horas que un reloj atrasa 2 minutos cada tres horas; ¿qué hora señala cuando son las 3 y 8 minutos?

180. Hace 45 horas que un reloj está atrasado; ¿de cuánto es el atraso por hora, sabiendo que señala las 2 y 48 minutos cuando son las 3 y 18 minutos?

181. Un aljibe vacío recibe agua por 2 grifos que dan, término medio, 42 litros por minuto el uno y 50 el otro. Dígase la capacidad del aljibe que no obstante de perder por una grieta 15 litros de agua por minuto, se llena en 35 horas.

182. Un librero compra 650 volúmenes a \$ 15 docena, recibiendo 13 libros por 12. ¿A cómo tiene que vender el volumen para ganar \$ 210, si los gastos son de \$ 15?

183. Si entran 3 kg. de harina en 4 kg. de pan, calcúlese el beneficio de un panadero que ha comprado 56 costales de harina a \$ 25 el costal, sabiendo que el peso neto de cada costal es de 157 kg. y que vende el kilogramo de pan a \$ 0,18.

184. Dos correos salen a un mismo tiempo de dos ciudades distantes 360 millas una de otra; el 1º camina 6 millas por hora, y el 2º 9; ¿al cabo de cuánto tiempo se encontrarán, si andan 11 horas por día, y a qué distancia de ambas ciudades?

185. Por 48 días de trabajo 19 obreros han recibido \$ 2 976; a cada uno de los 12 primeros le toca el duplo de cada uno de los otros 7; pregúntase lo que gana cada obrero por día.

186. Un peón que camina 5 leguas por día de 10 horas de marcha sale de Ambato con dirección a Guayaquil; dos días después, un jinete que camina 22 leguas por día sale de Quito también con dirección a Guayaquil. Como hay 24 leguas de Quito a Ambato, ¿en cuántos días alcanzará el jinete al peón?

CAPITULO VI

PROPIEDADES DE LOS NUMEROS

DIVISIBILIDAD

§ I. — Definiciones y teoremas preliminares

127. Un número es divisible por otro cuando lo contiene un número exacto de veces.

Por ejemplo, 18 es *divisible* por 6, porque al partir 18 por 6 resulta por cociente el número entero 3, y cero por residuo.

128. Llámase *submúltiplo*, *factor* o *divisor* de un número entero, otro número entero contenido un número exacto de veces en el primero, llamado *múltiplo* (98).

Así, por ejemplo, los números 2, 3, etc. que están contenidos un número exacto de veces en 18, son *submúltiplos* de 18.

18 es un *múltiplo* de cada uno de estos números. 18 podrá designarse por m 2, m 3, que se lee: *múltiplo de 2*, *múltiplo de 3*, etc.

A los submúltiplos de un número, también se les da el nombre de partes *alicuotas*.

129. Un número es *par* cuando remata en cifra par o en cero; todo número par es un múltiplo de 2.

Así, los números 746, 850, 1128 son *pares*, por que rematan en cifra par o en cero.

130. Un número es *impar* cuando remata en cifra impar.

Por ejemplo, los números 17, 121, 235 son *impares*.

131. TEOREMA.—Todo número que es divisor de otros es divisor de la suma de ellos.

Sea 7 que divide a 35, a 42 y a 56; digo que dividirá a la suma $35+42+56$ o 133.

$$\begin{aligned} \text{En efecto} \quad & 35 = 5 \times 7 \\ & 42 = 6 \times 7 \\ & 56 = 8 \times 7 \end{aligned}$$

Sumando ordenadamente, resulta:

$$35 + 42 + 56 \text{ o } 133 = (5 + 6 + 8) \times 7$$

Luego 7 divide a la suma 133 ya que está contenido en ella $5+6+8$ o 19 veces exactamente.

132. TEOREMA.—Todo número que es divisor de otro es también divisor de los múltiplos de ese otro.

Sea 5 que divide a 15; digo que dividirá a 4 veces 15 ó 60, que es un múltiplo de 15.

En efecto, 60 es la suma de 4 números iguales a 15:

$$60 = 15 + 15 + 15 + 15.$$

Luego 5 que divide a 15 dividirá a 60 (131)

133. TEOREMA.—Todo número que es divisor de otros dos es divisor de su diferencia.

Sea 11 que divide a 77 y a 44; digo que dividirá a su diferencia 33.

$$\begin{aligned} \text{En efecto, tenemos:} \quad & 77 = 7 \times 11; \\ & 44 = 4 \times 11. \end{aligned}$$

Restando ordenadamente, resulta:

$$\begin{aligned} & 77 - 44 = 7 \times 11 - 4 \times 11 \\ \text{o} \quad & 33 = (7 - 4) \times 11. \end{aligned}$$

Así 11 divide a la diferencia 33, pues está contenido en ella $7-4$ o 3 veces.

134. COROLARIO.—Como 77 y 44 son múltiplos de 11, se infiere que la diferencia de dos múltiplos de un número es también múltiplo de dicho número.

135. TEOREMA.—Todo número que divide al dividendo y al divisor, divide al residuo de la división.

Sea, por ejemplo, 3 que divide al dividendo 66 y al

divisor 12; digo que dividirá al residuo de la división.

En efecto, tenemos: $66 = 12 \times 5 + 6$,
o bien $66 - 12 \times 5 = 6$;

3 dividiendo a 12, divide también a su múltiplo 12×5 ; dividiendo a 66 y a 12×5 , debe dividir a su diferencia 6. (133)

136. TEOREMA.—Todo número que divide al divisor y al residuo, divide al dividendo.

Sea por ejemplo 3 que divide al divisor 12 y al residuo 6, digo que dividirá al dividendo 66.

En efecto, $66 = 12 \times 5 + 6$;

3 dividiendo a 12, divide también a su múltiplo 12×5 ; dividiendo a 12×5 y a 6, dividirá a su suma 66. (131)

137. COROLARIO.—Todo número que divide a la suma de otros dos y a uno de ellos, divide al otro.

138. TEOREMA.—Todo número que divide a todas las partes de una suma, menos una, no divide a la suma, y el residuo de la división de la suma por dicho número es el mismo que el de la parte no divisible.

Sea 7 que divide a 56 y a 14, pero que no divide a 32; digo que no dividirá a la suma $56 + 14 + 32$ o 102, y que el residuo de la división de 102 por 7 es igual al de 32 por 7.

En efecto, tenemos: $56 = 8 \times 7$
 $14 = 2 \times 7$
 $32 = 4 \times 7 + 4$

Sumando ordenadamente, resulta:

$$56 + 14 + 32 \text{ ó } 102 = 7 \times (8 + 2 + 4) + 4.$$

Lo que manifiesta que 102 no es divisible por 7, y el residuo de la división de 102 por 7 es igual al de la división de 32 por 7.

§ II. — Caracteres de divisibilidad

139. DIVISIBILIDAD POR 2.—Un número es divisible por 2 cuando la cifra de sus unidades simples es cero o par.

1º Sea el número 140.

Tenemos: $140 = 14 \times 10$.

Ahora bien, 2 divide a 10, ya que $10 = 2 \times 5$; luego divide a 14×10 que es un múltiplo de 10. (132)

2º Sea el número 148.

Tenemos: $148 = 140 + 8$.

2 divide a 140 pues remata en cero; 2 divide también a 8 que es una cifra par (129). Dividiendo a 140 y a 8, 2 divide a su suma 148 (131)

140. NOTA.—El residuo de la división de un número por 2 es igual al residuo de la división por 2 de la cifra de sus unidades simples, pues las decenas son siempre divisibles por 2; este residuo, cuando lo hay, es forzosamente 1.

141. DIVISIBILIDAD POR 5.—Un número es divisible por 5 cuando la cifra de sus unidades simples es cero o 5.

1º Sea el número 230.

Tenemos: $230 = 23 \times 10$

5 divide a 10, pues $10 = 5 \times 2$. Dividiendo a 10, tendrá que dividir a su múltiplo 23×10 ó 230. (132)

2º Sea el número 425.

Tenemos: $425 = 420 + 5$.

5 divide a 420 que remata en cero, y se divide también a sí mismo; luego divide a la suma $420 + 5$ o 425. (131)

142. NOTA.—El residuo de la división de un número por 5 es igual al residuo de la división por 5 de la cifra de sus unidades, ya que las decenas son siempre divisibles por 5.

143. DIVISIBILIDAD POR 4 O POR 25.—Un número es divisible por 4 o por 25 cuando sus dos primeras cifras de la derecha son ceros, o forman un número divisible por 4 o por 25.

En efecto, observemos que $100=4 \times 25$; ahora bien, un número cualquiera, 1335 por ejemplo, puede descomponerse en dos partes, una de las cuales es el número formado por las centenas, esto es, un múltiplo de 100, y por consiguiente divisible por 4 y por 25; la otra es el número formado por las dos últimas cifras de la derecha.

$$\begin{aligned} \text{Así,} \quad 1335 &= 1300 + 35 \\ &= m4 + 35 \\ &= m25 + 35 \end{aligned}$$

De donde se infiere que el residuo de la división de un número por 4 o por 25 es igual al residuo de la división por 4 o por 25 del número formado por sus dos primeras cifras de la derecha.

144. NOTA.—Del mismo modo se demostraría que un número es divisible por 8 o por 125 cuando sus tres primeras cifras de la derecha son ceros, o forman un número divisible por 8 o por 125; etc.

145. DIVISIBILIDAD POR 9 Y POR 3.—Un número es divisible por 9 o por 3 cuando la suma de los valores absolutos de sus cifras es divisible por 9 o por 3.

Para demostrarlo, observemos que:

1º Toda potencia de 10 es igual a un múltiplo de 9 más 1.

En efecto, tenemos sucesivamente:

$$\begin{aligned} 10 &= 9 + 1 = m9 + 1 \\ 100 &= 99 + 1 = m9 + 1 \\ 1000 &= 999 + 1 = m9 + 1 \end{aligned}$$

y así en adelante.

2º Todo número formado por una cifra significativa seguida de ceros es un múltiplo de 9, más el valor absoluto de dicha cifra.

En efecto, multipliquemos por una cifra cualquiera los dos miembros de las igualdades precedentes, y resultará:

$$\begin{aligned} 10 \times 3 \text{ o } 30 &= (m9 + 1) \cdot 3 = m9 + 3 \\ 100 \times 4 \text{ o } 400 &= (m9 + 1) \cdot 4 = m9 + 4 \\ 1000 \times 8 \text{ u } 8000 &= (m9 + 1) \cdot 8 = m9 + 8 \end{aligned}$$

3º Todo número es igual a un múltiplo de 9, más la suma de los valores absolutos de sus cifras.

Sea el número 12345; digo que este número es igual a un múltiplo de 9 más $(1 + 2 + 3 + 4 + 5)$.

En efecto, tenemos:

$$12345 = \begin{cases} 10000 = m9 + 1 \\ 2000 = m9 + 2 \\ 300 = m9 + 3 \\ 40 = m9 + 4 \\ 5 = +5 \end{cases}$$

Sumemos ordenadamente:

$$12345 = m9 + (1 + 2 + 3 + 4 + 5)$$

Ahora bien, 9 que divide al múltiplo de 9 dividirá a 12345 si divide al paréntesis que es la suma de los valores absolutos de las cifras (131).

La demostración es idéntica por 3. En efecto, 3 divide a 9, y por consiguiente a un múltiplo de 9. Por lo tanto 3 dividirá al número si divide a la suma de los valores absolutos de sus cifras.

La demostración de divisibilidad por 9 y por 3 puede hacerse del modo siguiente, que se puede comprobar a priori.

$$\begin{aligned} 12345 &= 10000 + 2000 + 300 + 40 + 5 \\ &= (9999 + 2 \times 999 + 3 \times 99 + 4 \times 9) + (1 + 2 + 3 + 4 + 5) \\ &= m9 + (1 + 2 + 3 + 4 + 5) \end{aligned}$$

146. NOTA.—El residuo de la división de un número por 9 o por 3 se encuentra dividiendo por 9 o por 3 la suma de las cifras que lo componen.

Así, el residuo de la división de 56785 por 9 es el de la división por 9 de $(5 + 6 + 7 + 8 + 5)$, o sea 4.

El residuo de la división de este mismo número por 3 es 1.

En la práctica, para encontrar el residuo por 9, se suman sucesivamente las cifras del número, diferentes de 9, cuidando de restar 9 de cada suma parcial mayor que esta cifra. La última resta es el residuo buscado.

El residuo por 3 se encuentra dejando los múltiplos de 3, y restando de las sumas parciales el mayor múltiplo de 3 contenido en ellas.

Así, para encontrar rápidamente el residuo de 56785 por 9, se dice:

$$5+6=11, 11-9=2; 2+7=9; 8+5=13, 13-9=4$$

o de otro modo: siendo 31 la suma de los valores absolutos de las cifras del número 56785, se dice: $3+1=4$, residuo igual al precedente.

Para encontrar el residuo por 3:

$$5+7=12; 8+5=13, 13-12=1;$$

o razonando con 31, se dice: $3+1=4; 4-3=1$.

147. DIVISIBILIDAD POR 11.—Un número es divisible por 11 cuando la diferencia entre la suma de los valores absolutos de sus cifras de lugar impar y los valores de las de lugar par, contando de derecha a izquierda, es cero o un múltiplo de 11.

Para demostrarlo, observemos que:

1º Toda potencia impar de 10 es igual a un múltiplo de 11 menos 1, y toda potencia par de 10 es igual a un múltiplo de 11 más 1.

En efecto, tenemos sucesivamente:

$$\begin{aligned} 10 &= 11-1 = m \cdot 11-1 \\ 100 &= 10 \times 10 = (m \cdot 11-1) \times (m \cdot 11-1) = m \cdot 11+1 \\ 1000 &= 100 \times 10 = (m \cdot 11+1) \times (m \cdot 11-1) = m \cdot 11-1 \\ 10000 &= 1000 \times 10 = (m \cdot 11-1) \times (m \cdot 11-1) = m \cdot 11+1 \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

2º Todo número formado por una cifra significativa seguida de ceros se compone de un múltiplo de 11, más o menos el valor absoluto de esta cifra, según que el número de ceros sea par o impar.

En efecto, multipliquemos por una cifra cualquiera las igualdades que preceden; tendremos:

$$\begin{aligned} 10 \times 5 \text{ o } 50 &= (m \cdot 11-1) \cdot 5 = m \cdot 11-5 \\ 100 \times 7 \text{ o } 700 &= (m \cdot 11+1) \cdot 7 = m \cdot 11+7 \\ 1000 \times 3 \text{ o } 3000 &= (m \cdot 11-1) \cdot 3 = m \cdot 11-3 \\ 10000 \times 8 \text{ o } 80000 &= (m \cdot 11+1) \cdot 8 = m \cdot 11+8 \end{aligned}$$

3º Un número cualquiera es igual a un múltiplo de 11, más el exceso de la suma de las cifras de orden impar sobre la de las cifras de orden par, contando de derecha a izquierda.

Sea el número 43529; tendremos:

$$43529 = \begin{cases} 40000 = m \cdot 11 + 4 \\ 3000 = m \cdot 11 - 3 \\ 500 = m \cdot 11 + 5 \\ 20 = m \cdot 11 - 2 \\ 9 = \quad \quad + 9 \end{cases}$$

Sumando ordenadamente, resulta:

$$\begin{aligned} 43529 &= m \cdot 11 + (4 + 5 + 9) - (3 + 2) \\ \text{o } 43529 &= m \cdot 11 + 13 \end{aligned}$$

Pero 11 divide a un múltiplo de 11; si divide a 13, dividirá también a la suma 43529 (131).

Luego el residuo de la división de 43529 por 11 es igual al de la división por 11 del exceso 13 de la suma de las cifras de lugar impar sobre la de las cifras de lugar par.

148. Nota.—Si la suma de las cifras de lugar impar fuese menor que la de las cifras de lugar par, se aumentaría la primera suma de un múltiplo de 11 suficiente para que fuera posible la sustracción.

Sea, por ejemplo, el número 18291; tendremos:

$$\begin{aligned} 18291 &= m \cdot 11 + (1+2+1) - (9+8) \\ 18291 &= m \cdot 11 + (4-17) \end{aligned}$$

o bien $18291 = m \cdot 11 + 22 + 4 - 17 = m \cdot 11 + 9$ pues un múltiplo de 11 puede descomponerse en otro múltiplo de 11 más 22; por lo tanto el residuo de la división de 18291 por 11 es 9.

§ III. — Pruebas de la multiplicación y de la división

Estas pruebas se fundan en el teorema siguiente:

149. TEOREMA.—El residuo de la división de un producto de dos factores por un divisor cualquiera, es igual a' residuo que se obtie-

na dividiendo por este divisor el producto de los dos residuos obtenidos al dividir cada factor por el mismo divisor.

Sean A y B los dos factores, R y R' los residuos de su división por un divisor d; tenemos:

$$\begin{aligned} A &= m \text{ de } d + R \\ B &= m \text{ de } d + R' \end{aligned}$$

Multipliquemos ordenadamente:

$$A \times B = (m \text{ de } d + R)(m \text{ de } d + R') = m \text{ de } d + R \times R'$$

Este resultado manifiesta que el residuo de la división de $A \times B$ por d es igual al de $R \times R'$ por d .

Ejemplo: Sean los números 345 y 29, y el divisor 9. Tenemos: (145)

$$\begin{aligned} 345 &= m \ 9 + 3 \\ 29 &= m \ 9 + 2 \end{aligned}$$

Multiplicando ordenadamente, resulta:

$$\begin{aligned} 345 \times 29 &= (m \ 9 + 3) \times (m \ 9 + 2) \\ 345 \times 29 &= m \ 9 + 3 \times 2 \end{aligned}$$

El residuo de la división por 9 de 345×29 es igual al residuo de la división por 9 de 3×2 .

150. PRUEBA POR 9 DE LA MULTIPLICACION.—Para hacer la prueba por 9 de la multiplicación, se buscan los residuos por 9 del multiplicando, del multiplicador y del producto. Se multiplican entre sí los dos primeros residuos, y su producto dividido por 9 debe dar un residuo igual al del producto total.

Ejemplo: Hágase la prueba por 9 del producto 347×526 .

Operación

$$\begin{array}{r} 347 \\ 526 \\ \hline 2082 \\ 694 \\ \hline 1735 \\ 182522 \end{array}$$



En la práctica se escriben los residuos de los factores en dos ángulos opuestos por el vértice; se hace el producto de ellos, y se escribe en un tercer ángulo el residuo de este producto. En el cuarto ángulo se escribe el residuo del producto que se quiere comprobar. Los dos últimos residuos han de ser iguales.

151. Prueba por 9 de la división.—La prueba por 9 de la división se deduce de la prueba por 9 de la multiplicación:

1º Si la división no tiene residuo, se hace la prueba considerando el dividendo como el producto del divisor por el cociente, y así se vuelve al caso de la multiplicación.

2º Cuando la división tiene residuo, se lo resta del dividendo, y se vuelve al caso precedente.

152. Prueba por 11.—La prueba por 11 se ejecuta como la prueba por 9, tomando los residuos por 11 en vez de 9.

Ejemplo: Hágase la prueba por 11 del producto 347×526 .

Operación

$$\begin{array}{r} 347 \\ 526 \\ \hline 2082 \\ 694 \\ \hline 1735 \\ 182522 \end{array}$$

Prueba

$$\begin{array}{r} 8 \\ 10 \times 10 \\ 9 \end{array}$$

153. Notas.—I. No siempre que se verifique la prueba, será cierta la operación; claro está, en efecto, que en la prueba por 9, por ejemplo, cambiando de lugar las cifras de los factores o del producto, la prueba quedará satisfecha aunque la operación resulte equivocada.

La prueba por 11 da mayor probabilidad de la exactitud de la operación, pues el residuo de la división de un número por 11 depende no sólo del valor absoluto de las cifras, sino también de su lugar en los números.

II. Puede también hacerse la prueba por 13, por 17, etc., pero no se usan estos números por ser más difícil encontrar los residuos.

CAPITULO VII

MAXIMO COMUN DIVISOR

154. Definiciones.—Llábase común divisor de varios números un número que los divide a todos sin residuo.

Así, 2, 3 y 6 son *divisores comunes* de 42 y 60.

155.—Máximo común divisor de varios números es el mayor número que los divide exactamente a todos.

En el ejemplo precedente, 6 es el mayor común divisor de 42 y 60.

Cuando varios números no tienen más que 1 por común divisor, claro está que su máximo común divisor es también 1. En este caso, se dice que los números son primos entre sí.

El máximo común divisor se designa por medio de las iniciales *m. c. d.*

Máximo común divisor de varios números.

La investigación del *m. c. d.* se funda en los dos teoremas siguientes:

156. TEOREMA.—Dados dos números, si el menor divide al mayor, aquél es el *m. c. d.* de ambos.

Sean los números 48 y 12, siendo 12 factor de 48.

12 divide a 48 y a sí mismo: luego es divisor *común*; y no puede haber un divisor *mayor* que divida a 48 y a 12; por consiguiente 12 es el *m. c. d.* de los números propuestos.

157. TEOREMA.—El *m. c. d.* de dos números, que no son divisibles uno por otro, es el mismo que el del menor de ellos y del residuo de su división.

Sean los números 1784 y 216, cuyo cociente es 8, y el residuo de su división 56. Tenemos:

$$1784 = 216 \times 8 + 56.$$

Digo que el *m. c. d.* de 1784 y 216 es el mismo que el de 216 y 56. En efecto:

1º Todo número que divide a 1784 y 216, divide a 56, residuo de su división (**135**).

2º Todo común divisor de 216 y 56 divide también a 1784 (**136**).

Luego los números 1784, 216 y 56 admiten los mismos divisores comunes, y por lo tanto el mismo *m. c. d.*

158. Problema.—Búsquese el *m. c. d.* de dos números.

Sean los números 615 y 195.

El *m. c. d.* de 615 y 195 no puede ser mayor que 195, ya que debe dividir a este número. Si 195 divide a 615, el número 195 será el *m. c. d.* de los dos números propuestos (**156**).

Dividamos pues 615 por 195.

$$\begin{array}{r} 615 \overline{) 195} \\ \underline{ 195} \\ 0 \end{array}$$

$$30 \overline{) 3}$$

Lo que manifiesta que 195 no es el *m. c. d.*; pero el *m. c. d.* de 615 y 195 es el mismo que el de 195 y 30 (**157**).

Dividamos 195 por 30.

$$\begin{array}{r} 195 \overline{) 30} \\ \underline{ 30} \\ 0 \end{array}$$

$$15 \overline{) 6}$$

Por donde se ve que 30 no es el *m. c. d.* buscado; dividamos 30 por 15.

$$\begin{array}{r} 30 \overline{) 15} \\ \underline{ 15} \\ 0 \end{array}$$

$$0 \overline{) 2}$$

Luego 15 es el *m. c. d.* de 30 y 15, y también de 195 y 30 y por lo tanto de 615 y 195.

Disposición de la operación.

	3	6	2	<i>Cocientes.</i>
615	195	30	15	<i>Divisores.</i>
30	15	0		<i>Residuos.</i>

De esta demostración se deduce la siguiente regla.

159. REGLA.—Para encontrar el *m. c. d.* de dos números, se divide el mayor por el menor. Si no hay residuo, el número menor es el *m. c. d.*; si queda residuo, se divide el divisor por este residuo; en seguida, el primer residuo por el segundo, el segundo por el tercero, y así sucesivamente, hasta que no quede residuo. El último divisor empleado es el *m. c. d.* buscado.

A continuación (186) indicaremos otro procedimiento.

160. Notas.—I. Si el último divisor fuese 1, los dos números serían *primos entre sí*.

Ejemplo. — Búsqese el *m. c. d.* de los números 4 807 y 119

	40	2	1	1	7	3
4 807	119	47	25	22	3	1
47	25	22	3	1	0	

161. II.—Todo común divisor de dos números es divisor de su *m. c. d.*

En efecto (158), todo número que divide, por ejemplo, a 615 y 195, divide al residuo de su división, 30. El mismo número, dividiendo a 225 y a 30 divide a 15, residuo de su división.

162. III.—Cuando se multiplican o dividen varios números por otro, el *m. c. d.* de ellos queda multiplicado o dividido por dicho número.

Lo que es una consecuencia de los teoremas (105 y 106).

163. PROBLEMA.—Búsqese el *m. c. d.* de los números 615, 195 y 80.

El *m. c. d.* de 615 y 195 es 15. El *m. c. d.* buscado es pues igual al *m. c. d.* de 80 y 15.

615	195	80
15		80
		5

Luego, 5 es el *m. c. d.* de los números 615, 195 y 80.

Si tuviéramos 4, 5... números, se buscaría el *m. c. d.* de los 3 primeros, luego el del cuarto y de este *m. c. d.*, etc.

164. REGLA.—Para encontrar el *m. c. d.* de varios números, se busca el de los dos primeros; en seguida el *m. c. d.* de este último y del tercer número, y así en adelante. El último *m. c. d.* encontrado es el de los números propuestos.

CAPITULO VIII

NUMEROS PRIMOS

§ 1. — Propiedades

165. Definición.—Llámase *número primo* el que sólo es divisible por sí mismo y por la unidad.

Así, por ejemplo, 3, 5, 11, 17 son números *primos*.

De esta definición se infiere que un número primo no puede dividir a otro número primo.

166. Números primos entre sí.—Dos o más números son *primos entre sí* cuando no tienen otro divisor común que la unidad, aunque cada uno separadamente no sea primo.

Por ejemplo, 16 y 27 son *primos entre sí*, así como 12, 25 y 91.

Dos números *consecutivos* son primos entre sí.

Todo número primo que no divide a otro número dado es primo con él.

167. Formación de una tabla de números primos.—Busquemos, por ejemplo, todos los números primos menores que 100.

Primero se escribe la serie natural de los números:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

En seguida, contando desde el 2, se rayan o tachan de 2 en 2 los números de esta tabla, y quedan así tachados todos los múltiplos de 2.

Contando desde el 3, que se conserva, se tachan los números de 3 en 3, y quedan suprimidos todos los múltiplos de 3.

Se pasa al 5, y se hace lo mismo, de 5 en 5; luego, de 7 en 7, con lo cual queda terminada la operación.

Este método se conoce con el nombre de criba de Eratóstenes, y se funda en la propiedad siguiente, a saber: que todos los números de la serie natural que van de dos en dos, son los múltiplos de 2; los que van de tres en tres, son los múltiplos de 3; los que van de cinco en cinco, son los múltiplos de 5, y así sucesivamente.

Por la tabla anterior se ve que hay 25 números primos menores que 100:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

168. Nota. — No debe contarse el número 1 en-

tre los primos, puesto que todos los números, primos o no, son divisibles por 1.

II. Después de testados todos los múltiplos de 2, 3, 5, 7, el primer número no testado, 11, es número primo, porque si no lo fuera, sería múltiplo de uno de los números 2, 3, 5, 7, y como tal habría sido testado; por consiguiente, este método va indicando sucesivamente los números primos cuyos múltiplos deben rayarse.

III. Para tachar los múltiplos de cada número primo, basta empezar desde el cuadrado, de cada uno; así, para el número 7, por ejemplo, se empezará desde 49; porque como los múltiplos precedentes son productos de 7 por los números menores que él, ya están tachados como múltiplos de 2, 3 o 5.

IV.—La tabla queda concluída después de tachados los múltiplos de un número primo cuyo cuadrado es superior al límite que uno se ha propuesto; en el ejemplo anterior, en que el límite es 100, como $7^2=49$, y $11^2=121$, se suspende después de haber suprimido los múltiplos de 7.

169. REGLA PARA CONOCER SI UN NUMERO ES PRIMO.—Un número es primo cuando no puede dividirse por ninguno de los números primos cuyos cuadrados son menores que él.

Sea 113 un número que no es divisible por ninguno de los números primos 2, 3, 5 y 7, cuyos cuadrados son menores que 113; digo pues que este número es primo.

En efecto, si no lo fuera, no podría admitir por factor primo más que a 11 o a un número mayor que 11; pero esto no es posible, porque siendo 113 menor que 11×11 , si admitiera un divisor igual o superior a 11, el cociente sería menor que 11, y 113 sería divisible por 2, 3, 5 o 7, lo que va contra la hipótesis. Luego 113 que no admite ninguno de estos divisores es número primo.

Cuando se quiere averiguar si un número es primo, se puede parar la operación cuando se llega a probar un divisor tal que su cuadrado es mayor que el número propuesto, o cuando el cociente de la división es menor que el divisor probado.

Se dirá, por ejemplo, que 139 es número primo, cuando no se haya cerciorado de que 139 no es divisible por los números primos 2, 3, 5, 7 y 11; pues $13 \times 13 = 169$, número mayor que 139.

170. TEOREMA.—Todo número que no es primo admite a lo menos un factor primo.

En efecto, 21 por ejemplo, que no es primo, admite por definición a lo menos un divisor diferente de 21 y 1.

Sea 3 el menor de sus divisores: 3 es *primo*, porque si no lo fuera, admitiría a su vez un divisor menor que dividiría a su múltiplo 21, y éste tendría un divisor menor que su menor divisor, lo que es imposible.

171. TEOREMA.—Cualquier número primo que no divide a otro número es primo con él.

Sea 7, que no divide a 18; digo que estos dos números son primos entre sí.

En efecto, los divisores de 7 son 7 y 1; ahora bien, 7 no divide a 18; luego 7 y 18 no tienen más divisor común que 1, y por lo tanto son primos entre sí.

172. TEOREMA.—Cualquier número que divide a un producto de dos factores, y es primo con uno de ellos, debe dividir al otro.

Sea 6 que divide a 35×12 , y
 $\begin{array}{ccc} 6 & 35 \\ & \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\ & 1 \end{array}$
 que es primo con 35; demostremos que dividirá a 12.

En efecto, siendo 6 y 35 primos entre sí, su *m. c. d.* es 1.

Multipliquemos 6 y 35 por 12; su *m. c. d.* será 1×12 o 12. (162)

Ahora bien, 6 dividiéndose a sí mismo, dividirá a su múltiplo 6×12 . Por hipótesis, 6 divide también a 35×12 .

Dividiendo a 6×12 y a 35×12 , dividirá también a su *m. c. d.* 12 (161)

173. TEOREMA.—Cualquier número primo que divide un producto de factores, divide necesariamente a un factor.

Sea el número primo 5, que divide al producto $4 \times 12 \times 15$; digo que divide al menos a uno de estos factores.

En efecto, escribamos el producto bajo la forma $4 \times (12 \times 15)$; 5 es primo con 4, luego divide al producto 12×15 . (172)

Como 5 no divide a 12, debe dividir a 15. En efecto, $15 = 5 \times 3$.

174. COROLARIO.—Cualquier número primo que divide a un producto de factores primos es necesariamente igual a uno de ellos.

175. TEOREMA.—Cuando un número es divisible por otros números, que son primos entre sí de dos en dos, también es divisible por el producto de ellos.

Sea el número 360 divisible por 4, 5 y 9, que son primos entre sí. Demostremos que es divisible por $4 \times 5 \times 9$.

En efecto, dividiendo 360 por 4, resulta:

$$360 = 4 \times 90.$$

Ahora bien, por hipótesis, 5 divide a 360; por consiguiente divide a 4×90 . Pero como 5 es primo con 4, divide a 90 (172). En efecto,

$$90 = 5 \times 18.$$

De igual modo, 9 divide a 360, y por consiguiente divide a 4×90 . Pero siendo primo con 4, divide a 90.

Por lo mismo, 9 que divide a 90, dividirá a 5×18 . Pero como es primo con 5, divide a 18.

$$18 = 9 \times 2.$$

Multiplicando ordenadamente estas igualdades, resulta:

$$360 \times 90 \times 18 = 4 \times 90 \times 5 \times 18 \times 9 \times 2$$

Dividiendo ambos miembros por 90 y por 18, tenemos:

$$360 = (4 \times 5 \times 9) \cdot 2$$

Luego 360 es divisible por $(4 \times 5 \times 9)$, ya que el cociente es 2.

176. Consecuencias.—De este teorema se infiere que un número es divisible:

por 6 cuando lo es por 2 y por 3			
— 18 —	— 2 —	— 9	
— 15 —	— 3 —	— 5	
— 36 —	— 4 —	— 9	

etc.

§ II. — Descomposición de un número en sus factores primos

177. Definición.—Descomponer un número en sus factores primos es transformarlo en un producto indicado de factores primos.

178. TEOREMA.—Todo número que no es primo es igual a un producto de factores primos.

Sea 30 un número que no es primo.

El divisor menor de este número es un factor primo (170); así pues,

$$30 = 2 \times 15 \quad (1)$$

Si 15 fuera primo, la proposición quedaría demostrada. Pero si 15 no es primo, admite un divisor primo (170). Sea 3 este divisor:

$$15 = 3 \times 5 \quad (2)$$

Multipliquemos ordenadamente las igualdades (1) y (2):

$$\begin{aligned} 30 \times 15 &= 2 \times 15 \times 3 \times 5 \\ 30 &= 2 \times 3 \times 5 \end{aligned}$$

Además, se ve que los cocientes 15, 5, etc., van disminuyendo; se llegará pues necesariamente a un cociente que sea primo.

179. TEOREMA.—Un número no puede descomponerse sino en un solo sistema de factores primos.

Para demostrarlo, basta hacer constar que si dos productos iguales se forman de factores primos, estos factores son los mismos.

Sean los productos iguales 2.3.5.7 y $a. b. c. d$, formados de factores primos; digo que estos factores son los mismos en ambos productos.

En efecto, el factor primo 2, dividiendo al producto 2.3.5.7, dividirá al producto igual $a. b. c. d$; dividiendo $a. b. c. d$, debe forzosamente dividir a uno de sus factores (173); pero estos factores son primos, luego en el producto $a. b. c. d$ hay un factor igual a 2. (174)

Podríamos hacer un raciocinio análogo acerca de los factores 3, 5 y 7. Por consiguiente, cualquiera que sea el modo de descomposición, siempre se encuentra el mismo resultado.

180. REGLA.—Para descomponer un número en sus factores primos, se divide primero el número por el menor de sus divisores primos; se hace lo mismo con el cociente, luego con el segundo cociente, y así en adelante, hasta que resulte un cociente igual a 1. Los divisores son los factores primos del número propuesto.

Ejemplo.—Descompóngase 252 en sus factores primos.

252 es divisible por 2.....	252=2×126
126 — 2.....	126=2×63
63 — 3.....	63=3×21
21 — 3.....	21=3×7
7 es número primo.....	7=7×1

Así, $252=2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7$ o $2^2 \times 3^2 \times 7$

En la práctica se escriben los dividendos a la izquierda, y los divisores a la derecha de una misma línea vertical.

252		2
126		2
63		3
21		3
7		7
1		1

181. CONDICION DE DIVISIBILIDAD DE DOS NUMEROS.—La condición necesaria y suficiente para que el cociente de la división de dos números resulte entero es que el divisor no encierre otros factores que los del dividendo, y que estos factores no tengan en el divisor mayor exponente que en el dividendo.

1ª Condición necesaria.—El dividendo, por ser el producto del divisor por el cociente, se compone del producto de todos los factores del divisor y del cociente; por lo tanto contiene todos los factores del divisor con exponentes a lo menos iguales a los que tienen en el mismo divisor.

2ª Condición suficiente.—Porque si la suponemos cumplida, se podrá partir el dividendo en dos series de factores, constando la una de los factores del divisor, y la otra, de los factores del cociente. El producto de estos últimos factores dará el cociente que, por consiguiente, será entero.

Sean los números 37 800 y 756.

Descomponiéndolos en sus factores primos, resulta:

$$37\ 800 = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$$

$$756 = 2^3 \cdot 3^5 \cdot 7$$

Podemos escribir:

$$37\ 800 = (2^5 \cdot 3^3 \cdot 7) \times (2 \cdot 5^2)$$

$$\text{Luego } 37\ 800 = 756 \times (2 \cdot 5^2)$$

$$37\ 800 = 756 \times 50$$

De donde $37\ 800 : 756 = 50$

El cociente 50 es exacto.

§ III. — Aplicación de la teoría de los números primos

182. I.—Hallar todos los divisores de un número.—Búsquense todos los divisores de 180.

Descompongamos 180 en sus factores primos.

$$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \quad (180)$$

El número 180 es divisible por:

$$(A) \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 2^2 \\ 1 & 3 & 3^2 \\ 1 & 5 & \end{array} \right\} \text{ o bien } \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & \end{array} \right\}$$

Los números de la primera línea horizontal dividen a 180, y son primos con los de la segunda que divi-

den también a 180; sus productos de dos en dos dividirán a 180 (175).

Estos productos son:

$$(B) \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 12 \\ 9 & 18 & 36 \end{array} \right.$$

Del propio modo, los productos del cuadro (B) dividen a 180, lo mismo que los números de la tercera línea del cuadro (A). Como los unos son primos con los otros, los productos de ellos, combinados de dos en dos, dividirán a 180 (175). Estos productos son:

$$(C) \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 12 \\ 9 & 18 & 36 \\ 5 & 10 & 20 \\ 15 & 30 & 60 \\ 45 & 90 & 180 \end{array} \right.$$

183. REGLA.—Para encontrar todos los divisores de un número, se lo descompone en sus factores primos, después de lo cual se escriben en una línea horizontal el número 1 y las diferentes potencias de un mismo factor del número propuesto (se suele empezar por el factor menor).

Se multiplican los números de la primera línea por cada potencia del segundo factor; en seguida se multiplican todos los divisores ya encontrados por cada potencia del tercer factor, y así sucesivamente.

Cuando se ha concluido la operación, resultan en un mismo cuadro todos los divisores pedidos.

184. Nota.—También podría procederse del modo siguiente:

Descompongamos el número en sus factores primos:

$$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5.$$

Todos los productos de los factores de 180, que son primos entre sí, combinados de dos en dos, de tres en tres, etc. dividen a 180 (175).

Para encontrar estos productos, dispongamos en línea vertical, y por orden de valor, los factores primos.

180	2									
90	2	4								
45	3	6	12							
15	3	9	18	36						
5	5	10	20	15	30	60	45	90	180	
1										

Multiplicando 2 por 2, se escribe el producto 4 a la derecha del segundo 2; multiplicando en seguida por 3 las dos primeras líneas, compuestas de los números 2 y 4, se escriben los productos a la derecha del 3; multiplicando por 3 las tres primeras líneas, compuestas de los números 2, 4, 3, 6 y 12, se escriben los productos a la derecha del segundo 3; por último se multiplican por 5 las cuatro primeras líneas, y resulta la quinta.

Todos los números del cuadro dividen a 180 (175).

185. NUMERO DE DIVISORES DE UN NUMERO.—Para saber cuántos divisores tiene un número, basta añadir una unidad a los exponentes de sus factores primos, y buscar el producto de los números obtenidos.

Sea, por ejemplo, $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$.

Para encontrar todos los divisores de 360, descompuesto en sus factores primos, acabamos de ver (184) que se puede formar el cuadro siguiente:

1	2	4	8
1	3	9	
1	5		

Ahora bien, fácil es observar que cada línea horizontal tiene tantos divisores más uno, cuantos lo indica el exponente de número primo que ha servido para formarla.

Y como para encontrar estos divisores, se multiplican todos los términos de la 1ª línea por cada término de la 2ª, en seguida todos los productos obtenidos, por cada término de la 3ª, y así sucesivamente, tendremos en este ejemplo:

$$(3+1)(2+1)(1+1) = 24 \text{ divisores.}$$

186. II.—Hallar el máximo común divisor de varios números.

Sean los números 540 y 360

$$\begin{aligned} \text{Tenemos (180)} \quad 540 &= 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \\ 360 &= 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \end{aligned}$$

El *m. c. d.* ha de ser:

1º *divisor común*; luego todos sus factores primos deben estar contenidos en cada uno de los números (181), esto es, son comunes a los números propuestos;

2º *el mayor posible*; luego se deben tomar los factores primos con la mayor potencia común a los números propuestos, potencia que corresponde al menor exponente de los factores comunes a todos ellos.

El *m. c. d.* de los números 540 y 360 será:

$$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180.$$

187. REGLA.—Para encontrar el *m. c. d.* de varios números descompuestos en sus factores primos, basta multiplicar entre sí los factores primos comunes a estos números, tomados con su menor exponente.

III.—Hallar el mínimo común múltiplo de varios números.

188. Llámase común múltiplo de varios números, un número que es exactamente divisible por cada uno de ellos.

Así, 30 que es divisible por 2, 3, 5, es *común múltiplo* de estos números.

189. Mínimo común múltiplo de varios números es el menor número divisible por cada uno de ellos. Se lo designa con las iniciales *m. c. m.*

Problema.—Hállese el *m. c. m.* de los números 60, 70 y 72.

Descomponiendo estos números en sus factores primos, resulta:

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$$

$$72 = 2^3 \cdot 3^2$$

Para que el número buscado sea *múltiplo* de 60, 70 y 72, es preciso que entre sus factores haya todos los factores de 60, 70 y 72.

Para que sea el *mínimo común múltiplo*, lo formare-

mos tomando sólo los factores *absolutamente indispensables*.

Luego el *m. c. m.* de los números 60, 70 y 72 es igual a

$$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2\ 520.$$

190. REGLA.—Para encontrar el *m. c. m.* de varios números, se los descompone en sus factores primos, y se forma el producto de todos los factores primos, comunes o no, tomados con su mayor exponente.

191. Notas.—I. El *m. c. m.* de dos números es igual al producto de éstos, dividido por su *m. c. d.*

En efecto, sean los números:

$$N = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7^2$$

$$N' = 2^2 \times 3 \times 5^3 \times 11$$

Su producto $NN' = 2^4 \times 2^2 \times 3^2 \times 3 \times 5 \times 5^3 \times 7^2 \times 11$

Su *m. c. d.* es $2^2 \times 3 \times 5;$

El cociente de NN' por el *m. c. d.* será:

$$2^3 \times 3^2 \times 5^3 \times 7^2 \times 11$$

que es el *m. c. m.* de los números.

II.—El *m. c. m.* de dos números primos entre sí es el producto de estos números.

III.—El producto del *m. c. m.* de dos números por su *m. c. d.* es igual al producto de estos números.

Lo que es una consecuencia de la nota I.

IV.—Los cocientes de dos números por su *m. c. d.* son primos entre sí.

V. g.: Los números 48 y 18 tienen 6 por *m. c. d.*; los cocientes respectivos son 8 y 3, números primos entre sí.

EJERCICIOS ORALES

187. ¿Qué es múltiplo de un número?
 188. ¿Cómo se forma un múltiplo de un número?
 189. ¿Cuántos múltiplos puede tener un número?
 190. ¿Qué se llama divisor de un número?

191. ¿Qué otros nombres tiene el divisor?
 192. ¿Cuál es el mayor divisor de un número?
 193. ¿Cuál es el menor divisor de un número?
 194. ¿Cuántos divisores tiene un número primo?
 195. Cuando se divide un número por uno de sus divisores, ¿a qué es igual: 1º el cociente; 2º el residuo?
 196. ¿Qué número par es primo?
 197. ¿De qué número son múltiplos todos los números pares?
 198. ¿Cuál es el menor número que se debe añadir o quitar a un número par, para hacerlo impar?
 199. ¿Cuál es el menor número que se debe añadir o quitar a un número impar, para hacerlo par?
 200. ¿Cuáles son las cifras que se pueden añadir a 35, para formar un número impar de 3 cifras?
 201. ¿Cuántas cifras diferentes se pueden añadir a 24, para formar un número par de 3 cifras?
 202. ¿Un número es múltiplo o submúltiplo de sus divisores?
 203. ¿Qué es cualquier número con relación a sus múltiplos?
 204. ¿Qué viene a ser respecto de un número la suma de varios de sus múltiplos?
 205. ¿Qué es respecto de un número la diferencia de dos de sus múltiplos?
 206. Un número que divide al divisor, divide también al producto de éste por el cociente. ¿Por qué?
 207. Todo número que divide al dividendo y al divisor, divide al residuo de su división. ¿Por qué?
 208. Todo número que divide al divisor y al residuo, divide al dividendo. ¿Por qué?
 209. Un número que divide al dividendo y al residuo, divide al divisor. ¿Por qué?
 210. ¿Qué clase de número resulta al sumar: 1º dos números pares; 2º dos números impares; 3º un número par con otro impar?
 211. ¿Qué clase de número resulta si se resta: 1º un número par de otro; 2º un número impar de otro impar; 3º un número par de un número impar, y *viceversa*?
 212. ¿Qué parte de cualquier número compuesto es siempre divisible por 2?

213. ¿Por qué depende de la cifra de las unidades la divisibilidad de un número por 2?
214. ¿Cuál es el mayor múltiplo de 2 contenido en un número cualquiera?
215. ¿Qué parte de un número compuesto es siempre divisible por 5?
216. Si se divide un número por 5 ¿cuándo sale en el residuo el guarismo de las unidades de este número?
217. ¿Cuándo es un número divisible por 4?
218. ¿Por qué depende de las dos últimas cifras de la derecha la divisibilidad de un número por 4?
219. Cuando se busca el residuo de la división de un número por 4, ¿qué parte de este número hay que dividir: 1º si la cifra de las decenas es par; 2º si la cifra de las decenas es impar?
220. ¿Cuáles son los números de dos cifras que se pueden escribir a la derecha de cualquier número impar para que resulte un número divisible por 4?
221. ¿Cuándo es un número divisible por 25?
222. ¿Por qué depende del número formado por las dos últimas cifras de la derecha la divisibilidad de un número por 25?
223. Cuando se busca el residuo de la división de un número por 25, ¿qué parte de este número basta dividir?
224. ¿Qué números diferentes pueden ponerse en las dos últimas cifras de la derecha en los números divisibles por 25?
225. ¿Cuál es el residuo de la división de 34 284 por 25; — de 1 339 por 4?
226. ¿Cuándo es divisible un número: 1º por 8; 2º por 125?
227. En un número igual a lo menos a 1 000, ¿cuál es la parte siempre divisible por 8 y por 125?
228. ¿Cuándo es un número divisible por 3?
229. ¿Qué se debe restar de un número para que resulte el mayor múltiplo de 3 contenido en él?
230. Dígase el menor número que debe añadirse a 452 para que sea divisible por 3.
231. ¿Qué cifras pueden escribirse a la derecha de 451, para formar un número de 4 cifras divisible por 3?

232. ¿Es preciso dividir 451 por 3 para obtener el residuo de la división?
233. ¿Cuándo es un número divisible por 9?
234. ¿Qué cifras pueden escribirse a la derecha del número 216 para que resulte un número de 4 cifras divisible por 9?
235. Dígase, sin efectuar la división, el residuo de la división de 428; 1º por 3; 2º por 9.
236. Cuando al hacer la prueba por 9 de la multiplicación, un factor da 0 por residuo, ¿qué residuo debe dar el producto?
237. ¿Cómo se haría la prueba por 3: 1º de la multiplicación; 2º de la división?
238. ¿Cuándo es un número divisible: 1º por 6; 2º por 15; 3º por 18?
239. ¿Por qué depende la divisibilidad de un número por 6 de su divisibilidad por 2 y por 3?
240. ¿Puede un número impar ser divisible por 6?
241. ¿Es par un número divisible por 18? por qué?
242. ¿Cuándo es un número divisible por 12?
243. Un número divisible por 12, ¿es par? ¿por qué?
244. ¿Qué especie de número resulta multiplicando entre sí: 1º dos números pares; 2º dos impares; 3º un par por un impar y *viceversa*?
245. ¿Cuál es el menor número que da 5 de residuo al dividirlo por 6 o por 8?
246. ¿Cuál es el menor número que da 7 de residuo al dividirlo por 8, por 12 o por 15?
247. ¿Dos números pares son primos entre sí?
248. ¿Cuál es el m. c. d. entre un múltiplo y su submúltiplo?
249. ¿Cómo se llama el número que tiene por factores todos los divisores primos comunes a dos números?
250. ¿Cuál es el m. c. d. de dos números si 1 es el residuo de la división del mayor por el menor?

PROBLEMAS

251. ¿Cuáles son los múltiplos menores que 100 de cada uno de los números siguientes: 13, 17, 20, 25?

252. ¿Cuáles son los múltiplos pares menores que 1 000 de cada uno de los números siguientes: 97, 102, 125, 150?

253. ¿Qué números menores que 100 son a la vez divisibles por 2, por 3 y por 4?

254. ¿Qué números menores que 1 000 son divisibles a un tiempo por 4, por 5, por 6 y por 8?

255. Escribanse los números de 4 cifras divisibles a la vez por 2, por 3, por 4, por 5, por 6 y por 7.

256. ¿Por cuál de los números siguientes: 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 11, 25 y 125 es divisible cada uno de los números 1 166, 1 288 y 1 938?

257. Igual pregunta acerca de los números 2 464, 2 475 y 3 510.

258. Igual pregunta acerca de los números 29 935, 53 625 y 82 875.

259. Búsquense los factores primos de los números siguientes:

1º	280	4º	14 700	7º	147 231
2º	2 646	5º	16 335	8º	839 160
3º	2 970	6º	15 147	9º	873 425

260. Búsquense todos los divisores de los números siguientes:

1º	100	4º	1 755	7º	5 145
2º	360	5º	2 646	8º	8 398
3º	1 728	6º	3 819	9º	15 435

261. ¿Cuáles son los divisores comunes a los números siguientes:

1º	420	y	720		
2º	900	y	375		
3º	12 285	y	4 375		
4º	42 432	y	945 945		
5º	172 172	y	1 126 125		
6º	1 890	y	3 528		
7º	672		8 624	y	502 656
8º	183 456		458 640	y	642 096
9º	810 810		729 729	y	4 459 455
10º	388 800		472 500	y	2 337 500

262. Búsquese el m. c. d. de los números siguientes, 1º por el método ordinario; 2º por sus factores primos:

1º	128	y	192	6º	72	216	y	128
2º	240	y	160	7º	24	80	y	160
3º	180	y	224	8º	90	180	y	945
4º	900	y	7 290	9º	60	320	y	360
5º	571 428	y	999 999	10º	100	550	y	10 500

263. Búsquese el m. c. m. de los números siguientes:

1º	60	81	y	90	5º	15	24	28	y	44	
2º	70	130	y	190	6º	72	135	216	y	648	
3º	506	759	y	1 771	7º	12	18	24	36	y	48
4º	3 168	6 048	y	4 896	8º	7	12	21	24	y	42

264. El m. c. d. de dos números es 312, su m. c. m. 6 552; ¿cuál es el producto de ambos?

265. El m. c. d. de dos números es 12, su m. c. m. 420; ¿cuáles son estos números, sabiendo que su diferencia es menor que 30?

266. Búsquense, por medio de los divisores, dos números consecutivos, cuyo producto sea 1 260.

267. Búsquense, por medio de los divisores, dos números cuya diferencia sea 3, y el producto 1 120.

268. Alonso da a su hijo menor 35 cent. y al mayor 50 para que los repartan a cierto número de pobres, de modo que a cada uno le toque igual suma; ¿cuál es el mayor número de centavos que le tocará a cada uno, y cuántos los pobres socorridos por cada hijo?

269. ¿Cuál es la menor suma de dinero con la cual se puede comprar un número exacto de libros a \$ 5, a \$ 3, a \$ 4 o a \$ 6 cada uno?

270. Tres vapores se emplean en un mismo servicio, el 1º cada 6 días, el 2º cada 8 días y el 3º cada 10 días. Si los tres salen juntos un día, ¿en qué otro día volverán a salir juntos y cuántas veces habrá servido cada uno?

271. Fabricio manda comprar pollos, patos y gallipavos, empleando la menor suma posible, pero una misma para cada especie de aves, so pena de tener que pagarle el criado 5 cent. por cada ave que compre de más. Encontró el criado pollos de a 12 cent., patos de a 30 y gallipavos de a 75 y de a 90, tomó los más baratos de estos últimos, y tuvo que pagar una suma a su señor; se pregunta cuál fue está.

Parte II

NUMEROS QUEBRADOS RAICES

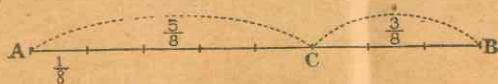
CAPITULO I

QUEBRADOS COMUNES

§ I.—Nociones preliminares

192. Definición.—Llámase *quebrado o fracción*, una o varias partes de la unidad dividida en cualquier número de partes iguales.

Supongamos la *unidad* representada por la recta AB, y dividamos esta recta en 8 partes iguales.



Cada división representa *un octavo* de la unidad; el segmento CB representa los *tres octavos*, y el segmento AC, los *cinco octavos*.

Asimismo, si se divide una manzana en dos partes iguales, cada parte representará una fracción de la manzana, y se llamará

un medio o una mitad; si se divide en tres partes iguales, una de ellas representará *un tercio*, y dos, *dos tercios*; si se divide en diez partes, cada una representará *un décimo*, etc.

193. Términos del quebrado.—Un quebrado consta de dos *términos*, llamados numerador y denominador.

El *denominador* indica en cuantas partes iguales se ha dividido la unidad.

El *numerador* denota el número de estas partes que se toman para formar el quebrado.

Si se dice, por ejemplo, que el segmento AC es los *cinco octavos* de la unidad, *cinco* representa el *numerador*, y *ocho* el *denominador*.

194. Escritura de un quebrado.—Los dos números con que se representa un quebrado común se escriben uno encima de otro y separados entre sí por una raya horizontal u oblicua.

Un tercio	se escribe	$\frac{1}{3}$ o $1/3$.
Tres cuartos	"	$\frac{3}{4}$ " $3/4$.
Siete octavos	"	$\frac{7}{8}$ " $7/8$.
Once doceavos	"	$\frac{11}{12}$ u $11/12$.

195. Lectura de un quebrado.—Para leer un quebrado común se enuncia primero el numerador, y después el denominador, agregando a éste la terminación *avo* cuando es 8, y siempre que es mayor que 10.

V. g.: $\frac{3}{8}$, tres *octavos*; $\frac{7}{12}$, siete *doceavos*; $\frac{8}{22}$, ocho *veintidosavos*; $\frac{14}{130}$, catorce *ciento treintaavos*; $\frac{25}{300}$, veinticinco *trescientosavos*.

Si el denominador es uno de los números 2, 3, 4, 5, 6, 7, o 9, no se le agrega la terminación *avo*, porque cada uno de estos números tiene la suya propia, a saber: *medio*, *tercio*, *cuarto*, *quinto*, *sexto*, *séptimo*, *noveno*.

Así, $\frac{2}{3}$ se lee *dos tercios*.
 $\frac{3}{5}$ " *tres quintos*.
 $\frac{5}{7}$ " *cinco séptimos*.

Cuando el denominador es la unidad seguida de uno o más ceros, como 10, 100, 1000, etc., se dice *décimo*, *centésimo*, *milésimo*, etc.

$\frac{3}{10}$ se lee *tres décimos*.
 $\frac{7}{100}$ " *siete centésimos*.

196. Comparación de un quebrado con la unidad.—Pueden ocurrir tres casos:

1º Que el numerador sea menor que el denominador; entonces el quebrado es *menor que la unidad*, y se llama *quebrado propio*.

Por ejemplo, $\frac{4}{7}$ y $\frac{11}{15}$.

2º Que los términos sean iguales entre sí; entonces el quebrado es *igual a la unidad*.

Así $\frac{8}{8}=1$.

3º Que el numerador sea mayor que el denominador; entonces el quebrado es *mayor que la unidad*.

Por ejemplo, $\frac{12}{7}$ y $\frac{15}{11}$.

En este caso el quebrado se llama *impropio* o *expresión fraccionaria*.

II.—Principales propiedades de los quebrados.

197. TEOREMA.—Si dos quebrados tienen un mismo denominador, el mayor es el que tiene mayor numerador.

Sean los quebrados $\frac{5}{7}$ y $\frac{3}{7}$ que tienen un mismo denominador; digo que $\frac{5}{7} > \frac{3}{7}$.

En efecto, estos quebrados representan partes iguales de la unidad, a saber, séptimos; pero el primero tiene 5 de estas partes, mientras que el segundo no tiene más que 3; luego $\frac{5}{7} > \frac{3}{7}$.

198. TEOREMA.—Si dos quebrados tienen un mismo numerador, el mayor es el que tiene menor denominador.

Sean los quebrados $\frac{3}{8}$ y $\frac{3}{11}$ que tienen un mismo numerador; digo que $\frac{3}{8} > \frac{3}{11}$.

En efecto, cada uno de estos quebrados representa 3 partes de la unidad; pero las partes del primero, que son octavos, son mayores que las del segundo, que

son onceavos luego $\frac{3}{8} > \frac{3}{11}$.

199. TEOREMA.—Si se multiplica el numerador de un quebrado por un número, el quebrado queda multiplicado por este número; y si se multiplica el denominador, el quebrado queda dividido.

1º Sea el quebrado $\frac{4}{7}$; multiplico el numerador por

3, y resulta $\frac{12}{7}$; digo que $\frac{12}{7}$ es 3 veces mayor que $\frac{4}{7}$.

En efecto, ambos quebrados representan partes iguales de la unidad, esto es, séptimos; pero $\frac{12}{7}$ contiene

3 veces más de estas partes; luego $\frac{12}{7}$ es 3 veces ma-

yor que $\frac{4}{7}$.

2º Sea el quebrado $\frac{4}{7}$; multiplico el denominador

por 3, y resulta $\frac{4}{21}$; digo que $\frac{4}{21}$ es 3 veces menor

que $\frac{4}{7}$.

En efecto, ambos quebrados representan igual número de partes de la unidad, esto es, 4; pero las par-

tes de $\frac{4}{21}$ son 3 veces menores que las de $\frac{4}{7}$; luego

$\frac{4}{21}$ es 3 veces menor que $\frac{4}{7}$.

200. TEOREMA.—Si se divide el numerador de un quebrado por un número, el quebrado queda dividido por este número; y si se divide el denominador, el quebrado queda multiplicado.

1º Sea el quebrado $\frac{6}{9}$; divido el numerador por 3,

y resulta $\frac{2}{9}$; digo que $\frac{2}{9}$ es 3 veces menor que $\frac{6}{9}$.

En efecto, en ambos quebrados las partes de la unidad son iguales, pues son novenos; pero $\frac{2}{9}$ contiene

3 veces menos de estas partes; luego $\frac{2}{9}$ es 3 veces me-

nor que $\frac{6}{9}$.

2º Sea el quebrado $\frac{5}{24}$; divido el denominador por

3, y resulta $\frac{5}{8}$; digo que este quebrado es 3 veces

mayor que $\frac{5}{24}$.

En efecto, ambos quebrados representan un mismo número de partes de la unidad, esto es, 5; pero es-

tas partes son 3 veces mayores en $\frac{5}{8}$; luego este que-

brado es 3 veces mayor que $\frac{5}{24}$.

201. Consecuencias.—1ª Para multiplicar un quebrado por un número, se multiplica el numerador por este número, lo que siempre es posible; o se divide el denominador por este número, cuando puede efectuarse la operación.

2ª Para dividir un quebrado por un número, se multiplica el denominador por este número, lo que siempre es posible; o se divide el numerador por este número cuando puede efectuarse la operación.

202. TEOREMA.—No se altera el valor de un quebrado cuando se multiplican o se dividen sus dos términos por un mismo número.

1º Sea el quebrado $\frac{4}{5}$; multiplico sus dos términos por 3, y resulta $\frac{12}{15}$; digo que este quebrado es igual

$$\text{a } \frac{4}{5}.$$

En efecto, al multiplicar el numerador por 3, el quebrado queda multiplicado por 3 (**199**), 1º); al multiplicar el denominador por 3, el quebrado queda dividido por 3 (**199**, 2º).

Por lo tanto, estando el quebrado multiplicado y dividido por un mismo número, no se ha alterado su valor.

2º Sea el quebrado $\frac{24}{40}$; divido ambos términos por 8, y resulta $\frac{3}{5}$; digo que este quebrado es igual a $\frac{24}{40}$.

En efecto, al dividir el numerador por 8, el quebrado queda dividido por 8 (**200**, 1º); al dividir el denominador por 8, el quebrado queda multiplicado por 8. (**200**, 2º)

Luego, estando el quebrado dividido y multiplicado por un mismo número, no se ha alterado su valor.

203. TEOREMA.—Si a los dos términos de un quebrado propio se añade un mismo número, el quebrado que resulta es mayor que el propuesto.

Sea el quebrado $\frac{5}{7}$; añado 4 a sus dos términos, y resulta $\frac{9}{11}$; digo que $\frac{9}{11} > \frac{5}{7}$.

En efecto, a $\frac{5}{7}$ le faltan $\frac{2}{7}$ para igualar la unidad, y a $\frac{9}{11}$ le faltan $\frac{2}{11}$. Como tenemos $\frac{2}{11} < \frac{2}{7}$ (**198**), se infiere que al quebrado $\frac{5}{7}$ le falta más para igualar la unidad, luego $\frac{9}{11} > \frac{5}{7}$.

204. TEOREMA.—Si a los dos términos de un quebrado impropio se añade un mismo número, el quebrado que resulta es menor que el propuesto.

Sea el quebrado impropio $\frac{9}{7}$; añado 6 a sus dos términos, y resulta $\frac{15}{13}$; digo que $\frac{15}{13} < \frac{9}{7}$.

En efecto, al quebrado $\frac{9}{7}$ le sobran $\frac{2}{7}$ para valer

la unidad, y al quebrado $\frac{9}{7}$ le sobran $\frac{2}{7}$. Como te-

nemos (198) $\frac{2}{13} < \frac{2}{7}$ se infiere que $\frac{15}{13}$ excede a

la unidad en menos que $\frac{9}{7}$; luego $\frac{15}{13} < \frac{9}{7}$.

Del mismo modo se demostraría que, si los términos de un quebrado se disminuyen en un mismo número, el quebrado que resulta es menor o mayor que el propuesto, según que éste sea propio o impropio.

205. TEOREMA.—Un quebrado representa el cociente de su numerador por su denominador.

Sea el quebrado $\frac{7}{15}$; digo que representa el cociente de su numerador por su denominador.

En efecto, si 7 dividido por 15 da $\frac{7}{15}$ por cociente, al multiplicar el cociente $\frac{7}{15}$ por el divisor 15, debe resultar el dividendo. 7.

Pero, para multiplicar $\frac{7}{15}$ por 15, basta dividir por 15 el denominador de este quebrado (201). Hagamos la operación:

$$\frac{7}{15 : 15} = \frac{7}{1} = 7;$$

lo que queríamos demostrar.

206. Nota.—Este teorema proporciona un medio

de encontrar el cociente exacto de una división aproximada. Para ello, basta añadir al cociente un quebrado que tenga por numerador el residuo de la división, y por denominador, el divisor.

Así, el cociente exacto de $\frac{27}{4}$ es $6 + \frac{3}{4}$ o $6 \frac{3}{4}$.

El mismo teorema manifiesta que el valor de un quebrado no depende de la magnitud de sus términos, sino de su *relación*, esto es, del cociente del numerador por el denominador.

Así, el quebrado $\frac{3}{8}$ es mayor que $\frac{3}{11}$, porque representa 3 partes de una unidad dividida en 8; el segundo representa también 3 partes, pero como la unidad está dividida en 11, estas son menores.

§ III.—Reducciones o transformaciones de quebrados.

207. Definición.—Llámanse *reducciones* de quebrados los varios cambios que se hacen en sus términos sin alterar el valor de estos quebrados. Hay cuatro reducciones principales de quebrados.

Primera reducción.

208. Reducir un número entero o un número mixto a quebrado impropio.

1º Reducir 6 enteros a séptimos

Un entero vale 7 séptimos o $\frac{7}{7}$,

6 enteros valdrán $\frac{7 \times 6}{7} = \frac{42}{7}$.

209. REGLA.—Para reducir un entero a quebrado impropio, se multiplica el denominador dado por el entero, y al producto se le pone el mismo denominador.

2º Reducir $6\frac{3}{4}$ a quebrado impropio.

Los 6 enteros valen $\frac{24}{4}$, según el caso anterior;

$$\frac{24}{4} + \frac{3}{4} \text{ valdrán } 27 \text{ cuartos o } \frac{27}{4}.$$

210. REGLA.—Para reducir un número mixto a quebrado impropio, se multiplica el entero por el denominador del quebrado, al producto se le añade el numerador, y al total se le da por denominador el mismo del quebrado.

Segunda reducción.

211. Sacar los enteros contenidos en un quebrado impropio.

Sáquense los enteros contenidos en $\frac{72}{7}$.

Como cada unidad vale 7 séptimos, tantas veces como 7 esté contenido en 72, tantos enteros contendrá el quebrado impropio.

212. REGLA.—Para sacar los enteros contenidos en un quebrado impropio, se divide el numerador por el denominador, el cociente representa los enteros; si queda residuo, se lo pone por numerador de un quebrado, cuyo denominador es el del quebrado impropio.

Tercera reducción.

Simplificar los quebrados y reducirlos a su más simple expresión.

213. Definición.—Simplificar un quebrado es transformarlo en otro equivalente cuyos términos sean menores, y por tanto más simples.

Ejemplo, $\frac{16}{24} = \frac{8}{12} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Los quebrados $\frac{8}{12}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{2}{3}$ son simplificaciones de $\frac{16}{24}$.

214. Reducir un quebrado a su más simple expresión, es representarlo con los menores términos posibles.

Así, cada uno de los quebrados $\frac{8}{12}$, $\frac{4}{6}$ y $\frac{2}{3}$ es una expresión más simple que $\frac{16}{24}$; pero sólo $\frac{2}{3}$ es la más simple de todas.

Cuando el quebrado no se puede simplificar, se llama *irreducible*; entonces sus términos son *primos entre sí*.

Propongámonos simplificar el quebrado $\frac{120}{180}$.

$$\frac{120}{180} = \frac{\cancel{10} \times 2 \times 2 \times 2 \times 3}{\cancel{10} \times 2 \times 3 \times 3} = \frac{2}{3}$$

El quebrado $\frac{2}{3}$ es *irreducible*, ya que sus términos no tienen más que 1 por divisor común.

215. REGLA.—Para simplificar un quebrado, se descomponen sus dos términos en sus factores primos, y se suprimen en ambos los factores que les sean comunes.

También puede reducirse a su más simple expresión dividiendo sus dos términos por su m. c. d.

Redúzcase, por ejemplo, el quebrado $\frac{117}{975}$ a su más simple expresión.

El m. c. d. de 975 y 117 es 39. Dividamos ambos términos por 39.

$$\frac{117 : 39}{975 : 39} = \frac{3}{25}$$

El quebrado $\frac{3}{25}$ es irreducible, pues sus términos son primos entre sí.

216. **NOTA.**—De que 117 es igual a 39 veces 3, y 975 a 39 veces 25, se infiere que cuando un quebrado es equivalente a otro cuyos términos son primos entre sí, los términos del primer quebrado son equimúltiplos de los del segundo.

Cuarta reducción.

Reducir quebrados a un común denominador.

217. **Definición.** Reducir quebrados a un común denominador es transformarlos en otros equivalentes, cuyos denominadores sean iguales.

1º Reducir dos quebrados a un común denominador.

Redúzcanse a un común denominador los quebrados

$$\frac{3}{5} \text{ y } \frac{7}{8}$$

Multiplico por 8 los dos términos del primer quebrado, y por 5 los dos términos del segundo, y re-

sultan los quebrados $\frac{24}{40}$ y $\frac{35}{40}$. Estos quebrados son

equivalentes a los primeros (202), y tienen el mismo denominador.

2º Reducir varios quebrados a un común denominador.—Redúzcanse a un común denominador los que-

$$\text{brados } \frac{3}{4}, \frac{5}{7}, \frac{8}{11} \text{ y } \frac{2}{9}.$$

Multiplico los dos términos del primer quebrado por $7 \times 11 \times 9$, los del segundo por $4 \times 11 \times 9$, los del tercero por $4 \times 7 \times 9$, y los del cuarto por $4 \times 7 \times 11$; así resulta:

$$\begin{array}{r} 3 \quad 3 \times 7 \times 11 \times 9 \quad 2079 \\ \hline 4 \quad 4 \times 7 \times 11 \times 9 \quad 2772 \\ 5 \quad 5 \times 4 \times 11 \times 9 \quad 1980 \\ \hline 7 \quad 7 \times 4 \times 11 \times 9 \quad 2772 \\ 8 \quad 8 \times 4 \times 7 \times 9 \quad 2016 \\ \hline 11 \quad 11 \times 4 \times 7 \times 9 \quad 2772 \\ \hline 2 \quad 2 \times 4 \times 7 \times 11 \quad 616 \\ \hline 9 \quad 9 \times 4 \times 7 \times 11 \quad 2772 \end{array}$$

Estos quebrados son equivalentes a los primeros (202) y tienen el mismo denominador.

218. **REGLA.**—1º Para reducir dos quebrados a un común denominador se multiplican los dos términos de cada uno por el denominador del otro.

2º Para reducir varios quebrados a un común denominador, se multiplican los dos términos de cada uno por el producto de los denominadores de los demás.

Nota.—Después de reducidos los quebrados a un común denominador es mucho más fácil compararlos, ya que basta comparar los numeradores.

Así, de los quebrados propuestos se ve inmediatamente que $\frac{3}{4}$ es mayor que $\frac{2}{9}$, y que $\frac{8}{11}$ es mayor que $\frac{5}{7}$.

219. **Reducción de quebrados a su mínimo común denominador.**—Ya sabemos que el denominador común es común múltiplo de los denominadores; por lo tanto el *mínimo común denominador* será el *mínimo común múltiplo de los denominadores*. Luego, podemos formular la regla siguiente:

REGLA.—Para reducir quebrados a su mínimo común denominador: 1º se reducen estos quebrados a su más simple expresión; 2º se busca el m. c. m. de los denominadores; 3º se divide el m. c. m.

por el denominador de cada quebrado, y se multiplican los dos términos del quebrado por el cociente correspondiente.

Ejemplo.—Redúzcanse a su mínimo común denominador los quebrados $\frac{7}{12}$, $\frac{5}{18}$, $\frac{11}{30}$ y $\frac{9}{40}$.

Siendo el *m. c. m.* de los denominadores $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ o 360, tendremos, aplicando la regla precedente:

$$\text{cocientes: } \frac{360}{12} = 30; \frac{360}{18} = 20; \frac{360}{30} = 12; \frac{360}{40} = 9$$

Disposición de las operaciones

$$\begin{array}{l} 12 = 2^2 \cdot 3 \\ 18 = 2 \cdot 3^2 \\ 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \\ 40 = 2^3 \cdot 5 \end{array} \quad \begin{array}{l} 7 \times 30 \\ 5 \times 20 \\ 11 \times 12 \\ 9 \times 9 \\ 40 \times 9 \end{array} \quad \begin{array}{l} 210 \\ 360 \\ 132 \\ 81 \\ 360 \end{array}$$

Estos quebrados son equivalentes a los primeros, pues se han multiplicado por un mismo número los dos términos de cada uno de los quebrados propuestos; el denominador es *igual*, ya que es el producto de los mismos factores; y es el *mínimo* denominador, por ser el *m. c. m.* de los primeros denominadores..

EJERCICIOS

Reducir a quebrado impropio:

272.	$\frac{1}{54}$	276.	$\frac{5}{150}$	280.	$\frac{3}{92}$
	$\frac{4}{2}$		$\frac{12}{7}$		$\frac{20}{1}$
273.	$\frac{2}{24}$	277.	$\frac{158}{15}$	281.	$\frac{36}{25}$
	$\frac{9}{3}$		$\frac{11}{243}$		$\frac{5}{235}$
274.	$\frac{45}{10}$	278.	$\frac{19}{19}$	282.	$\frac{8}{235}$
	$\frac{3}{109}$		$\frac{8}{145}$		$\frac{5}{235}$
275.	$\frac{11}{11}$	279.	$\frac{21}{145}$	282.	$\frac{8}{235}$

Extraer los enteros contenidos en las expresiones siguientes:

283.	$\frac{3489}{7}$	287.	$\frac{23589}{24}$	291.	$\frac{31416}{18}$
	$\frac{8543}{11}$		$\frac{13482}{28}$		$\frac{456429}{25}$
284.	$\frac{3981}{8}$	288.	$\frac{13265}{9}$	292.	$\frac{254392}{15}$
	$\frac{3502}{12}$		$\frac{431500}{24}$		$\frac{483562}{21}$
285.	$\frac{3502}{12}$	289.	$\frac{431500}{24}$	293.	$\frac{483562}{21}$
286.	$\frac{12}{12}$	290.	$\frac{24}{24}$	294.	$\frac{21}{21}$

Simplificar las expresiones siguientes:

295.	$\frac{32}{48}$	298.	$\frac{87}{192}$	301.	$\frac{1470}{2205}$
	$\frac{46}{54}$		$\frac{320}{750}$		$\frac{5544}{38808}$
296.	$\frac{54}{96}$	299.	$\frac{1080}{1350}$	302.	$\frac{5673}{1350}$
297.	$\frac{1}{1}$	300.	$\frac{1350}{1350}$	303.	$\frac{1350}{1350}$

304.	$\frac{2\ 646}{22\ 050}$	307.	$\frac{49\ 077}{105\ 165}$	310.	$\frac{20\ 366}{75\ 474}$
	$\frac{10\ 500}{15\ 435}$	308.	$\frac{105\ 535}{263\ 835}$	311.	$\frac{936\ 544}{5\ 258\ 214}$
305.	$\frac{85\ 995}{89\ 180}$	309.	$\frac{606\ 375}{1\ 378\ 125}$	312.	$\frac{1\ 679\ 616}{2\ 799\ 360}$
313.	$\frac{78 \times 84 \times 44}{98 \times 99 \times 520}$	315.	$\frac{4\ 715 \times 104 \times 792 \times 57}{280\ 071 \times 288 \times 52}$		
314.	$\frac{88 \times 133 \times 15 \times 211}{2\ 185 \times 462}$	316.	$\frac{9\ 936 \times 11\ 875 \times 3\ 773}{1\ 081 \times 893 \times 31\ 801}$		
317.	$\frac{9\ 594\ 000 \times 95 \times 105 \times 4\ 969 \times 7}{328 \times 575 \times 45 \times 76 \times 117 \times 210}$				
318.	$\frac{84 + 120 + 132}{252}$	319.	$\frac{4\ 935 - 735}{105 + 840 + 1\ 155}$		

Reducir a un mismo denominador
los quebrados siguientes:

320.	$\frac{1}{3} \frac{4}{5} \frac{5}{6}$	324.	$\frac{11}{12} \frac{13}{14} \frac{3}{14}$
321.	$\frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{3}{4} \frac{5}{6}$	325.	$\frac{7}{8} \frac{3}{11} \frac{3}{14}$
322.	$\frac{1}{2} \frac{2}{5} \frac{3}{7} \frac{4}{9}$	326.	$\frac{3}{4} \frac{5}{8} \frac{9}{16} \frac{11}{32}$
323.	$\frac{1}{5} \frac{2}{7} \frac{5}{9} \frac{1}{12}$	327.	$\frac{2}{3} \frac{4}{9} \frac{11}{12} \frac{15}{16}$

Reducir a su mínimo común denominador los
quebrados siguientes:

328.	$\frac{5}{6} \frac{11}{12} \frac{7}{15} \frac{5}{18}$	333.	$\frac{24}{99} \frac{25}{77} \frac{17}{693}$
329.	$\frac{2}{3} \frac{1}{7} \frac{4}{9} \frac{5}{12}$	334.	$\frac{5}{504} \frac{11}{1\ 260} \frac{5}{756}$
330.	$\frac{3}{4} \frac{2}{9} \frac{7}{12} \frac{5}{16} \frac{3}{21}$	335.	$\frac{13}{84} \frac{19}{252} \frac{29}{756}$
331.	$\frac{12}{21} \frac{7}{14} \frac{11}{42} \frac{8}{27}$	336.	$\frac{3}{14} \frac{2}{21} \frac{6}{25} \frac{5}{18}$
332.	$\frac{3}{5} \frac{5}{6} \frac{7}{12} \frac{8}{15} \frac{11}{20} \frac{29}{30}$	337.	$\frac{1}{84} \frac{1}{616} \frac{1}{1\ 125} \frac{1}{539}$

CAPITULO II

OPERACIONES

CON LOS QUEBRADOS COMUNES

§ I. ADICION

Los sumandos en la adición de quebrados deben ser, como en la de enteros, homogéneos; por consiguiente deben reducirse aquéllos a un común denominador, esto es, a una misma denominación, si ya no lo están.

220. Suma de quebrados de igual denominador.—

Súmense los quebrados $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}$ y $\frac{7}{8}$.

Claro está que 1 *octavo* + 3 *octavos* + 5 *octavos* + 7 *octavos*, son $1 + 3 + 5 + 7 = 16$ *octavos*.

$$\text{Luego } \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{5}{8} + \frac{7}{8} = \frac{16}{8} \text{ o } 2 \text{ unidades.}$$

REGLA.—Para sumar varios quebrados que tienen igual denominador, se suman los numeradores, y a la suma se le pone por denominador el denominador común; luego se extraen los enteros si los hay.

221. Suma de varios quebrados cualesquiera.

Súmense los quebrados $\frac{3}{5}$, $\frac{6}{7}$ y $\frac{2}{3}$.

Reduciendo estos quebrados a un común denominador, resulta:

$$\begin{array}{r} \frac{3}{5} = \frac{3 \times 7 \times 3}{105} \\ \frac{6}{7} = \frac{6 \times 5 \times 3}{105} \\ \frac{2}{3} = \frac{2 \times 5 \times 7}{105} \end{array}$$

Basta ahora aplicar la regla precedente; luego:

$$\frac{3}{5} + \frac{6}{7} + \frac{2}{3} = \frac{63}{105} + \frac{90}{105} + \frac{70}{105} = \frac{223}{105} \text{ o } 2 \frac{13}{105}$$

REGLA.—Para sumar varios quebrados que tienen distintos denominadores, se los reduce a un común denominador, y se opera como en el caso precedente.

222. Suma de números mixtos.—Súmense:

$$3 \frac{8}{5}, 7 \frac{6}{9} \text{ y } \frac{6}{7}$$

Sumemos los quebrados:

$$\frac{3}{5} + \frac{8}{9} + \frac{6}{7} = \frac{189}{315} + \frac{280}{315} + \frac{270}{315} = \frac{739}{315}$$

Saquemos los enteros: $\frac{739}{315} = 2 \frac{109}{315}$.

Añadamos estos 2 enteros a los dados:

$$5 + 7 + 2 = 14.$$

Suma total: $5 \frac{3}{5} + 7 \frac{8}{9} + \frac{6}{7} = 14 \frac{109}{315}$.

REGLA.—Para sumar números mixtos, se suman separadamente los quebrados y los enteros; la suma de estas dos sumas parciales da la suma total.

También pueden transformarse los números mixtos en expresión fraccionaria y la operación queda reducida a una suma de quebrados; pero no se suele hacer así, por resultar más largos los cálculos.

II. Sustracción

Para restar un quebrado de otro, es preciso que tengan igual denominador.

223. Resta de dos quebrados de igual denominador.—

De $\frac{8}{9}$ réstese $\frac{5}{9}$.

Si de 8 *novenos* se restan 5 *novenos*, claro está que la diferencia será $8 - 5 = 3$ *novenos*; luego:

$$\frac{8}{9} - \frac{5}{9} = \frac{3}{9} \text{ o } \frac{1}{3}$$

REGLA.—Para restar dos quebrados homogéneos, esto es, que tienen igual denominador, se restan sus numeradores y a la diferencia se le pone por denominador el denominador común.

224. Resta de dos quebrados cualesquiera.—

$$\text{De } \frac{3}{4} \text{ réstese } \frac{2}{5}.$$

Reduciendo estos quebrados a un común denominador, resulta: $\frac{15}{20}$ y $\frac{8}{20}$; así se vuelve al caso precedente; luego:

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{5} = \frac{15}{20} - \frac{8}{20} = \frac{7}{20}.$$

REGLA.—Para restar dos quebrados que tienen distinto denominador, se los reduce a un común denominador y se aplica la regla precedente.

225. Resta de números mixtos.—De $6\frac{7}{9}$ réstese $3\frac{5}{11}$.

$$6\frac{7}{9} - 3\frac{5}{11}.$$

Primero hay que reducir los quebrados a un común denominador; tenemos:

$$\frac{7}{9} = \frac{77}{99}; \quad \frac{5}{11} = \frac{45}{99}.$$

La resta que se ha de efectuar es:

$$6\frac{77}{99} - 3\frac{45}{99}.$$

Restemos respectivamente los quebrados y los enteros:

$$\frac{77}{99} - \frac{45}{99} = \frac{32}{99}$$

$$6 - 3 = 3$$

$$\text{Luego: } 6\frac{7}{9} - 3\frac{5}{11} = 3 + \frac{32}{99} \text{ o } 3\frac{32}{99}.$$

REGLA.—Para restar un número mixto de otro, se resta el primer quebrado del segundo, y el primer entero del segundo; luego se suman las restas.

También se pueden reducir los enteros a quebrados impropios, y se vuelve al caso precedente.

226. Nota.—Si el quebrado del sustraendo es mayor que el del minuendo, se añade una unidad a éste, para lo cual se suma el numerador con el denominador. Para que no se altere la diferencia, se añade una unidad a la parte entera del sustraendo.

EJEMPLO.—¿Qué diferencia hay entre $19\frac{1}{5}$ y $12\frac{3}{7}$?

Los quebrados reducidos a un común denominador, dan:

$$\frac{7}{35} \text{ y } \frac{15}{35}$$

Como 15 no puede restarse de 7, a 7 añadimos una unidad,

$$\text{o sea } \frac{35}{35} \text{ y resulta } \frac{7}{35} + \frac{35}{35} = \frac{42}{35}.$$

$$\text{Resta de los quebrados: } \frac{42}{35} - \frac{15}{35} = \frac{27}{35}.$$

Para que no se altere la diferencia, hay que añadir una unidad a 12, o restarla de 19:

$$19 - 13 = 6 \text{ o } 18 - 12 = 6.$$

$$\text{Luego } 19\frac{1}{5} - 12\frac{3}{7} = 6\frac{27}{35}.$$

227. Restar un quebrado de un número entero.—

$$\begin{array}{r} 3 \\ \text{tero.---De 7 réstese ---} \\ 8 \end{array}$$

De 7 tomo una unidad que vale $\frac{8}{8}$; el 7 queda

sólo en 6, y la operación se reduce a

$$\begin{array}{r} 8 \quad 3 \quad 5 \\ 6 \frac{\text{---}}{8} = 6 \frac{\text{---}}{8} \end{array}$$

REGLA.—Para restar un quebrado de un entero, se toma de éste una unidad que se divide en tantas partes cuantas indica el denominador del quebrado, y se restan los numeradores. La resta final se compone del número entero menos 1, más la diferencia de los quebrados.

§ III. — Multiplicación.

228.—La multiplicación de quebrados es, como la de enteros, una operación que tiene por objeto buscar un número que sea, respecto del multiplicando, lo que el multiplicador es respecto de la unidad.

Así, multiplicar 18 por $\frac{2}{3}$ es buscar un número que sea los $\frac{2}{3}$

de 18 (56), ya que el multiplicador es los $\frac{2}{3}$ de la unidad.

Del propio modo, multiplicar $\frac{2}{3}$ por $\frac{4}{5}$ es tomar los $\frac{4}{5}$

de $\frac{2}{3}$, etc.

229. Multiplicación de un quebrado por un

entero.—Multiplíquese $\frac{11}{14}$ por 7.

Ya sabemos (201, 1º) que hay dos procedimientos:

$$1^\circ \text{ procedimiento: } \frac{11}{14} \times 7 = \frac{11 \times 7}{14} = \frac{77}{14}$$

$$2^\circ \text{ procedimiento: } \frac{11}{14} \times 7 = \frac{11}{14 : 7} = \frac{11}{2}$$

REGLA.—Para multiplicar un quebrado por un entero, se multiplica el numerador por el entero, y al producto se le pone por denominador el denominador del quebrado; o se divide el denominador por el entero, cuando éste es factor del denominador, conservando por numerador el del quebrado.

230. Multiplicación de un entero por un quebrado.—

Multiplíquese 21 por $\frac{4}{7}$.

Multiplicar 21 por $\frac{4}{7}$ es tomar los $\frac{4}{7}$ de 21. (228)

Ahora bien, 1 séptimo de 21 vale $\frac{21}{7}$;

los 4 séptimos valdrán $\frac{21 \times 4}{7} = \frac{84}{7}$.

REGLA.—Para multiplicar un entero por un quebrado, se multiplica el entero por el numerador, y al producto se le pone por denominador el mismo del quebrado.

231. Multiplicación de un quebrado por otro.

Multiplíquese $\frac{5}{7}$ por $\frac{3}{4}$.

Multiplicar $\frac{5}{7}$ por $\frac{3}{4}$ es tomar los $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{7}$. (228)

Ahora bien, 1 cuarto de $\frac{5}{7}$ vale $\frac{5}{7 \times 4}$;

los 3 cuartos valdrán $\frac{5 \times 3}{7 \times 4} = \frac{15}{28}$.

REGLA.—Para multiplicar un quebrado por otro, se multiplican entre sí los numeradores, y al producto se le pone por denominador el producto de los denominadores.

232. Multiplicación de un número mixto por otro.—Para multiplicar entre sí dos números mixtos, se los suele reducir a quebrados impropios, y así se vuelve al caso precedente.

Multiplíquese $3 \frac{2}{5}$ por $4 \frac{6}{7}$.

$$3 \frac{2}{5} \times 4 \frac{6}{7} = \frac{17}{5} \times \frac{34}{7} = \frac{17 \times 34}{5 \times 7} = \frac{578}{35} = 16 \frac{18}{35}$$

233. Nota.—1º El producto de varios quebrados, llamado *quebrado de quebrados*, es siempre menor que cada uno de estos quebrados (228).

2º Siendo los numeradores y denominadores números enteros, se infiere que no se altera el producto de dos o más quebrados aunque se invierta el orden de los factores.

$$\text{Así, } \frac{3}{4} \times \frac{5}{7} = \frac{3 \times 5}{4 \times 7} = \frac{5 \times 3}{7 \times 4} = \frac{5}{7} \times \frac{3}{4};$$

$$\text{y } \frac{2}{3} \times \frac{5}{6} \times \frac{4}{7} = \frac{2 \times 5 \times 4}{3 \times 6 \times 7} = \frac{2 \times 4 \times 5}{3 \times 7 \times 6} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{7} \times \frac{5}{6}$$

§ IV. — División.

234. La *división* de quebrados es, como la de enteros, una operación en que, dados dos números, llamados *dividendo* y *divisor*, se busca otro llamado *co-ciente*, que multiplicado por el divisor dé el dividendo.

Así, dividir 12 por $\frac{3}{4}$, es buscar el factor que debe multiplicarse por $\frac{3}{4}$ para que resulte 12 en el producto.

Del mismo modo, dividir $\frac{2}{3}$ por $\frac{4}{5}$, es buscar el factor que debe multiplicarse por $\frac{4}{5}$ para que resulte $\frac{2}{3}$ en el producto.

235. División de un quebrado por un entero.

—Divídase $\frac{21}{25}$ por 3.

Ya sabemos (201, 2º) que hay dos procedimientos:

$$1^\circ \text{ procedimiento: } \frac{21}{25} : 3 = \frac{21}{25 \times 3} = \frac{21}{75}$$

$$2^\circ \text{ procedimiento: } \frac{21}{25} : 3 = \frac{21 : 3}{25} = \frac{7}{25}$$

REGLA.—Para dividir un quebrado por un entero, se multiplica el denominador por el entero, quedando por numerador el del quebrado; o se divide el numerador por el entero, cuando éste es factor del numerador, quedando por denominador el del quebrado.

236. División de un entero por un quebrado

—Divídase 15 por $\frac{3}{7}$.

Dividir 15 por $\frac{3}{7}$ es buscar un cociente c que, multiplicado por $\frac{3}{7}$, dé 15: (234)

$$c \times \frac{3}{7} = 15.$$

Por lo tanto, los $\frac{3}{7}$ del cociente = 15;

un séptimo del cociente valdrá $\frac{15}{3}$,

y los siete séptimos, o el cociente entero, valdrá $\frac{15 \times 7}{3}$

$$\text{Luego: } 15 : \frac{3}{7} = \frac{15 \times 7}{3} = 15 \times \frac{7}{3}.$$

REGLA.—Para dividir un entero por un quebrado, se multiplica el entero por el quebrado invertido.

237. División de un quebrado por otro.—Di

vidase $\frac{7}{8}$ por $\frac{2}{3}$.

Dividir $\frac{7}{8}$ por $\frac{2}{3}$ es buscar un cociente c que, multiplicado por $\frac{2}{3}$, dé $\frac{7}{8}$:

(234)

$$c \times \frac{2}{3} = \frac{7}{8}.$$

Por lo tanto, los $\frac{2}{3}$ del cociente = $\frac{7}{8}$;

un tercio valdrá $\frac{7}{8 \times 2}$

y los 3 tercios valdrán $\frac{7 \times 3}{8 \times 2}$

$$\text{Luego: } \frac{7}{8} : \frac{2}{3} = \frac{7 \times 3}{8 \times 2} = \frac{7}{8} \times \frac{3}{2}.$$

REGLA.—Para dividir un quebrado por otro, se multiplica el quebrado dividendo por el quebrado divisor invertido.

Se puede también dividir los numeradores entre sí, y los denominadores entre sí, cuando los términos del dividendo son múltiplos de sus correspondientes en el divisor.

Ejemplo. — Dividir $\frac{15}{64}$ por $\frac{3}{8}$.

$$\text{Tenemos: } \frac{15}{64} : \frac{3}{8} = \frac{15 : 3}{64 : 8} = \frac{5}{8}.$$

Nota.—Los dos casos precedentes pueden reducirse a éste, ya que $3 = \frac{3}{1}$ y $15 = \frac{15}{1}$.

238. División de un número mixto por otro.— Para dividir entre sí dos números mixtos, se los suele reducir a quebrados impropios, para volver así al caso precedente.

Ejemplo.—Dividase $5\frac{2}{3}$ por $3\frac{4}{5}$.

$$\text{Tenemos: } 5\frac{2}{3} : 3\frac{4}{5} = \frac{17}{3} : \frac{19}{5};$$

$$\frac{17}{3} : \frac{19}{5} = \frac{17}{3} \times \frac{5}{19} = \frac{85}{57}$$

239. Nota.—Dos números son inversos uno de otro cuando su producto es igual a la unidad.

Así, 4 y $\frac{1}{4}$ son inversos, pues $4 \times \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$.

$\frac{3}{4}$ y $\frac{4}{3}$ lo son también, ya que $\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = \frac{12}{12} = 1$.

Problemas razonados sobre los quebrados

I. Un pozo lleno de agua puede vaciarse con una bomba en 87 horas, y con otra en 57; si se hacen funcionar ambas a un mismo tiempo, ¿en cuántas horas quedará vacío el pozo?

ANÁLISIS.—En una hora la primera bomba vaciará $\frac{1}{87}$ del pozo, y la segunda, $\frac{1}{57}$.

Ambas juntas vaciarán $\frac{1}{87} + \frac{1}{57}$ o $\frac{144}{4959}$ del pozo.

para vaciar los $\frac{144}{4959}$ del pozo, necesitan las bombas una hora;

para vaciar $\frac{1}{4959}$ emplearán $\frac{1}{144}$ de hora.

para vaciar los $\frac{1}{4959}$, o todo el pozo, gastarán:

$$\frac{1 \times 4959}{144} = 34 \text{ horas } \frac{7}{16}$$

Respuesta: 34 horas $\frac{7}{16}$.

II. ¿Cuál es el número cuya mitad, duplo, tercera parte y triple dan 1435?

Análisis.—Sea 1 el número pedido; según los datos,

$$\frac{1}{2} + 2 + \frac{1}{3} + 3 = 5 \frac{5}{6} \text{ o } \frac{35}{6}$$

Los $\frac{35}{6}$ del número valen 1435.

1 sexto valdrá $\frac{1435}{35}$;

y los 6 sextos, o todo el número, valdrán

$$\frac{1435 \times 6}{35} = 246.$$

Respuesta: 246.

III. Durante 4 años la fortuna de un negociante se ha aumentado cada año de la cuarta parte de lo que era el año anterior; al cabo de este tiempo posee el negociante \$ 78 125; ¿cuánto tenía al principio y al fin de cada uno de los tres primeros años?

Análisis.—Según los datos del problema, la fortuna del nego-

ciante era al fin de cada año los $\frac{5}{4}$ de lo que era al fin del año anterior:

Luego 78 125 son los $\frac{5}{4}$ de lo que era la fortuna al fin del 3^{er} año.

Si los $\frac{5}{4}$ valen \$ 78 125, 1 cuarto valdrá $\frac{78\ 125}{5}$,

y los 4 cuartos valdrán $\frac{78\ 125 \times 4}{5} = \$ 26\ 500$.

Se ve pues que basta multiplicar por $\frac{4}{5}$ la fortuna al fin de un año, para encontrar lo que era al fin del año anterior.

Al final del 2^o año la fortuna era de $62\ 500 \times \frac{4}{5} = \$ 50\ 000$

Al fin del 1.^{er} " $50\,000 \times \frac{4}{5} = 40\,000$

Y al principio del 1.^{er} " $40\,000 \times \frac{4}{5} = 32\,000$

IV. Un niño que tenía una caja de lápices, gasta los $\frac{2}{7}$ de ella más 4 lápices $\frac{4}{7}$, y entonces no le quedan más que los $\frac{2}{3}$ de lo que tenía al principio. ¿Cuántos lápices tenía el niño?

Análisis.—Ya que después de haber gastado el niño algunos lápices, le quedan los $\frac{2}{3}$ de los que tenía antes, es claro que los gastados igualan a un tercio; luego los $\frac{2}{7}$ del número total más

4 lápices $\frac{4}{7}$ igualan a un tercio de la caja; por consiguiente, lo que falta a los $\frac{2}{7}$ del número para igualar a $\frac{1}{3}$ del mismo

son precisamente los 4 lápices $\frac{4}{7}$ o $\frac{32}{7}$ de lápiz.

Ahora bien $\frac{1}{3} - \frac{2}{7} = \frac{1}{21}$;

si $\frac{1}{21}$ del número iguala a $\frac{32}{7}$ de lápiz, los $\frac{21}{21}$ valdrán

$$\frac{32 \times 21}{7} = 96.$$

Resp. 96 lápices tenía el niño en su caja.

V. Raimundo compra $\frac{2}{3}$ de una pieza de tela, menos 15 metros:

Toribio compra la $\frac{1}{4}$ parte de la misma pieza, más 4 metros, con lo cual recibe 21 metros menos que el primero; ¿cuál es la longitud de la pieza?

Análisis. — Si Toribio hubiera comprado sólo la $\frac{1}{4}$ parte de la pieza, habría recibido 4 metros menos, y entonces Raimundo hubiera tenido 21+4, o 25 m. más que aquél.

Del propio modo, si Raimundo hubiese tomado los $\frac{2}{3}$ cabales de la pieza, habría comprado 15 m. más, y por consiguiente hubiera recibido 25+15, o 40 m. más que Toribio.

Luego la diferencia entre los $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{4}$ de la pieza es de 40 metros:

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{8-3}{12} = \frac{5}{12}$$

Ya que $\frac{5}{12}$ valen 40 m., $\frac{1}{12}$ valdrá $\frac{40}{5}$
y $\frac{12}{12}$ valdrán $\frac{40 \times 12}{5} = 96$.

Resp. 96 metros.

VI. Una vendedora de huevos vende los $\frac{2}{9}$ de un canasto, menos 55 huevos; si añadiera 37 a los que le quedan, el número primitivo quedaría aumentado de $\frac{1}{6}$. ¿Cuántos huevos había en el canasto?

Análisis. — Si la vendedora hubiese vendido 5 huevos más, habría vendido exactamente los $\frac{2}{9}$ de su canasto, y entonces habría sido menester añadir 37+5 o 42 huevos a lo que le que-

da, para aumentar de $\frac{1}{6}$ el número primitivo

Luego 42 huevos igualan a los $\frac{2}{9}$ que se han vendido, más $\frac{1}{6}$ del canasto:

$$\frac{2}{9} + \frac{1}{6} = \frac{12+9}{54} = \frac{21}{54} = \frac{7}{18}$$

Los $\frac{7}{18}$ del canasto valen 42 huevos, $\frac{1}{18}$ valdrá $\frac{42}{7}$,
y los $\frac{18}{18}$ valdrán $\frac{42 \times 18}{7} = 108$.

Resp. 108 huevos.

VII. Sebastián tiene 45 años, y su hijo 21. ¿Dentro de cuánto será la edad del hijo los $\frac{4}{7}$ de la de su padre?

Análisis. — El padre pasa a su hijo con $45 - 21$ o 24 años, y siempre habrá la misma diferencia entre ambas edades. Pero cuando el hijo tenga los $\frac{4}{7}$ de la del padre, estos 24 años serán

evidentemente los $\frac{3}{7}$ de la edad del padre; por lo tanto, si los $\frac{3}{7}$ de la edad del padre son 24 años, $\frac{1}{7}$ será los $\frac{24}{3}$, y los $\frac{7}{7}$

serán $\frac{24 \times 7}{3} = 56$.

Resp. El tiempo pedido es de $56 - 45 = 11$ años.

VIII. Dos acequias juntas llenan una cisterna en 10 horas; ¿cuánto tiempo necesitará la primera sola, si la segunda necesita 18 horas para llenarla?

Análisis. Ambas acequias en diez horas llenan una vez la cisterna; en 1 hora llenarán $\frac{1}{10}$ de la cisterna.

La 2ª sola en 18 horas llena una vez la cisterna, en 1 hora llenará $\frac{1}{18}$.

La 1ª acequia, por consiguiente, llenará en 1 hora:

$$\frac{1}{10} - \frac{1}{18} = \frac{18}{180} - \frac{10}{180} = \frac{8}{180} \text{ o } \frac{2}{45}$$

Para llenar los $\frac{2}{45}$ de la cisterna, la 1ª acequia emplea 1 hora; para llenar $\frac{1}{45}$, empleará $\frac{1}{2}$ de hora;

y para llenar los $\frac{45}{45}$, o toda la cisterna, empleará:

$$\frac{1 \times 45}{2} = 22 \text{ horas } \frac{1}{2}$$

Resp. La 1ª acequia sola necesitará 22 horas $\frac{1}{2}$ para llenar la cisterna.

IX. Una zorra que da 2 saltos $\frac{1}{3}$ por segundo, tiene ya dados 30 saltos $\frac{3}{4}$ cuando se suelta en pos de ella un galgo que da 4 saltos $\frac{1}{2}$ por segundo; ¿cuánto tardará éste en alcanzar a aquélla?

Análisis. — Averiguemos primero cuántos saltos más que la zorra da por segundo el galgo:

$$4 \frac{1}{2} - 2 \frac{1}{3} = \frac{9}{2} - \frac{7}{3} = \frac{27}{6} - \frac{14}{6} = \frac{13}{6}$$

Ahora bien, el galgo debe ganar 30 pasos $\frac{3}{4}$, o $\frac{123}{4}$ de paso para alcanzar a la zorra. Por lo tanto, necesita tantos segundos como lo que gana en 1 segundo, o $\frac{13}{6}$, esté contenido en lo que ya tiene caminado la zorra, o sea $\frac{123}{4}$.

Luego tendremos:

$$\frac{123}{4} : \frac{13}{6} = \frac{123 \times 6}{4 \times 13} = \frac{5}{26} \cdot 14 = \frac{70}{13}$$

Resp. El galgo tardará 14 segundos $\frac{5}{26}$ en alcanzar a la zorra

X. Dos compañías de segadores se presentan para cosechar un campo; la primera podría concluir el trabajo en 7 días y la segunda en 5. Si sólo se toma la $\frac{1}{3}$ parte de la primera compañía y los $\frac{1}{4}$ de la segunda, ¿en cuántos días se concluirá el trabajo?

Análisis.—La 1ª compañía puede concluir el trabajo en 7 días; pero si sólo se toma la $\frac{1}{3}$ parte de ella, necesitará $7 \times 3 = 21$ días.

La 2ª puede hacerlo en 5 días; si se tomara sólo $\frac{1}{4}$ parte, se tardaría $5 \times 4 = 20$ días; pero tomando los $\frac{3}{4}$, necesitará $\frac{20}{3}$ de día.

Ahora bien, si la fracción que se toma de la 1ª compañía se tardara 21 días en cosechar el campo, claro está que en 1 día no cosecharía más que $\frac{1}{21}$ de él.

Del propio modo la 2ª, en 1 día cosecharía $\frac{3}{20}$ del campo. Luego, las dos fracciones de las compañías en 1 día cosechan

$$\frac{1}{21} + \frac{3}{20} = \frac{20}{420} + \frac{63}{420} = \frac{83}{420} \text{ del campo.}$$

Para cosechar los $\frac{83}{420}$, tardan 1 día; para cosechar $\frac{1}{120}$ tardarán $\frac{1}{83}$ de día.

y para cosechar los $\frac{420}{420}$, tardarán 420 veces más, esto es,

$$\frac{1 \times 420}{83} = 5 \text{ días} + \frac{5}{83} \text{ de día.}$$

Resp. 5 días + $\frac{5}{83}$ de día.

XI. Venancio tiene cierto número de manzanas, y las reparte del modo siguiente: da a Silverio la $\frac{1}{4}$ parte del número, más 1 man-

zana $\frac{1}{4}$; a Remigio, la $\frac{1}{5}$ parte del número total, más $\frac{2}{5}$ de man-

zana; a Heliodoro, los $\frac{2}{7}$ del número total, más 2 manzanas $\frac{3}{7}$, y

le quedan 2 para él. Pregúntese cuántas manzanas tenía, y cuántas ha dado a cada uno de sus compañeros, sabiendo que no ha partido ninguna.

Análisis.—Sumemos primero las partes del número total:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{2}{7} = \frac{103}{140}$$

Sumemos además las manzanas y partes de manzana:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{2}{5} + 2 + \frac{3}{7} + 2 = 5 + \frac{151}{140} = \frac{851}{140} \text{ de manzana}$$

A los $\frac{103}{140}$ del número total faltan $\frac{37}{140}$ para completarlo; luego,

los $\frac{37}{140}$ del número valen los $\frac{851}{140}$ de manzana;

$$\frac{1}{140} \text{ valdrá } \frac{851}{140 \times 37}$$

y los $\frac{140}{140}$, o todo el número, valdrán $\frac{851 \times 140}{140 \times 37} = 23$ manzanas.

A Silverio le toca	$\frac{23}{4} + 1 \frac{1}{4}$	sean 7 manzanas.	
A Remigio "	$\frac{23}{5} + \frac{2}{5}$	" 5 "	
A Heliodoro "	$\frac{23 \times 2}{7} + 2 \frac{3}{7}$	" 9 "	
Le quedan	<u>2</u>	"	

Total = 23 manzanas.

XII. Un jugador ha perdido los $\frac{2}{3}$ de los $\frac{4}{5}$ de \$ 45; ¿a cuánto asciende su pérdida?

Análisis. — Busquemos los $\frac{4}{5}$ de Bs. 45.

Si los $\frac{5}{5} =$ Bs. 45, $\frac{1}{5}$ valdrá $\frac{45}{5}$, y los $\frac{4}{5}$ $\frac{45 \times 4}{5}$.

Esta última expresión equivale, según el sentido del problema,

$$a \frac{3}{3}; \frac{1}{3} \text{ valdrá } \frac{45 \times 4}{5 \times 3}, \text{ y los } \frac{2}{3} \\ \frac{45 \times 4 \times 2}{5 \times 3} = \text{Bs. 24.}$$

Rsp. La pérdida del jugador asciende a \$ 24.

EJERCICIOS ORALES

338. ¿Qué es quebrado?
 339. ¿Cuál es el mayor de dos quebrados que tienen el mismo denominador, y por qué?
 340. ¿Cuál de los dos quebrados $\frac{1}{6}$ y $\frac{1}{8}$ es mayor, y por qué?
 341. ¿Cuál es el mayor de dos quebrados que tienen el mismo numerador, y por qué?
 342. ¿Qué quebrado debe añadirse a $\frac{2}{9}$ para igualarlo a 1?

343. A qué quebrado le faltan $\frac{5}{9}$ para que sea igual a la unidad?

344. Si se añade 2 al numerador de un quebrado, por ejemplo $\frac{3}{7}$, ¿de cuánto se aumenta el quebrado? — Lo mismo a la expresión $\frac{6}{5}$.

345. Si se resta 5 del numerador de un quebrado, $\frac{7}{9}$ por ejemplo, ¿de cuánto se disminuye el quebrado? — Lo mismo de la expresión $\frac{11}{5}$.

346. Si se añade 3 al denominador de un quebrado, $\frac{1}{7}$ por ejemplo, ¿de cuánto se disminuye el quebrado?

347. Si se resta 5 del denominador de un quebrado, por ejemplo $\frac{1}{11}$, ¿de cuánto se aumenta el quebrado?

348. ¿Qué alteración ocurre en una expresión fraccionaria, tal como $\frac{15}{7}$: 1º si se añade 3 al denominador; 2º si se resta 3 del denominador?

349. ¿Qué viene a ser un quebrado cuando se añade un mismo número a sus dos términos? ¿Sucede lo mismo con un quebrado impropio?

350. ¿Qué viene a ser un quebrado, cuando se resta un mismo número de sus dos términos? ¿Sucede lo mismo con un quebrado impropio?

351. ¿Depende el valor de un quebrado del valor de sus términos?

352. ¿Qué viene a ser un quebrado cuando se multiplica el numerador por un número?

353. ¿Qué viene a ser un quebrado cuando se divide su numerador por un número?

354. ¿Qué viene a ser un quebrado común o un quebrado impropio: 1º si se multiplica su denominador por un número? 2º si se divide su denominador por un número?

355. ¿De cuántos modos puede multiplicarse un quebrado común o un quebrado impropio?

356. Multiplíquese por $\frac{2}{3}$ el quebrado $\frac{5}{18}$, operando con uno sólo de sus términos.

357. Divídase por $\frac{3}{4}$ el quebrado $\frac{12}{17}$, operando con uno solo de sus términos.

358. ¿Se puede dividir el quebrado $\frac{8}{15}$ por $\frac{2}{5}$ sin multi-

plicar el primero por el segundo invertido? ¿Cómo hay que proceder, y por qué?

359. ¿Cómo se encontrarán todos los quebrados iguales a otro dado, por ejemplo $1/3$?

EJERCICIOS ESCRITOS

Efectuar las sumas siguientes:

<p>360. $\begin{array}{r} 3 \ 5 \ 4 \\ + \quad + \quad + \\ \hline 5 \ 6 \ 9 \end{array}$</p> <p>361. $\begin{array}{r} 2 \ 1 \ 3 \\ + \quad + \quad + \\ \hline 3 \ 4 \ 8 \end{array}$</p> <p>362. $\begin{array}{r} 2 \ 3 \ 2 \\ + \quad + \quad + \\ \hline 3 \ 5 \ 7 \end{array}$</p> <p>363. $\begin{array}{r} 3 \ 5 \ 4 \ 2 \ 2 \\ + \quad + \quad + \quad + \quad + \\ \hline 5 \ 6 \ 7 \ 5 \ 3 \end{array}$</p> <p>364. $\begin{array}{r} 2 \ 4 \ 2 \ 2 \\ + \quad + \quad + \quad + \\ \hline 3 \ 5 \ 3 \ 9 \end{array}$</p> <p>365. $\begin{array}{r} 5 \ 2 \ 1 \ 2 \\ + \quad + \quad + \quad + \\ \hline 6 \ 5 \ 2 \ 3 \end{array}$</p>	<p>366. $\begin{array}{r} 1 \ 1 \ 7 \\ 12 \ + \ 3 \ + \ 14 \\ \hline 5 \ 5 \ 18 \end{array}$</p> <p>367. $\begin{array}{r} 5 \ 5 \ 3 \\ 2 \ + \ 9 \ + \ 10 \\ \hline 8 \ 9 \ 10 \end{array}$</p> <p>368. $\begin{array}{r} 3 \ 1 \ 1 \ 3 \\ 11 \ + \ 7 \ + \ 21 \ + \ 19 \\ \hline 4 \ 2 \ 5 \ 8 \end{array}$</p> <p>369. $\begin{array}{r} 2 \ 5 \ 2 \ 8 \\ 26 \ + \ 8 \ + \ 15 \ + \ 10 \\ \hline 5 \ 24 \ 15 \ 9 \end{array}$</p> <p>370. $\begin{array}{r} 1 \ 1 \ 5 \ 9 \\ 31 \ + \ 11 \ + \ 28 \ + \ 9 \\ \hline 2 \ 4 \ 12 \ 15 \end{array}$</p>
---	--

Efectuar las sustracciones siguientes:

<p>371. $\begin{array}{r} 7 \ 2 \\ - \quad - \\ \hline 9 \ 5 \end{array}$</p> <p>372. $\begin{array}{r} 11 \ 3 \\ - \quad - \\ \hline 12 \ 7 \end{array}$</p> <p>373. $\begin{array}{r} 17 \ 9 \\ - \quad - \\ \hline 18 \ 10 \end{array}$</p>	<p>374. $\begin{array}{r} 2 \ 4 \\ 1 \ - \quad - \\ \hline 3 \ 5 \end{array}$</p> <p>375. $\begin{array}{r} 4 \ 8 \\ 18 \ - \quad - \\ \hline 11 \ 9 \end{array}$</p> <p>376. $\begin{array}{r} 1 \ 2 \\ 7 \ - \quad - \\ \hline 5 \ 3 \end{array}$</p>	<p>377. $\begin{array}{r} 8 \ 3 \\ 11 \ - \quad - \\ \hline 9 \ 7 \end{array}$</p> <p>378. $\begin{array}{r} 2 \ 8 \\ 7 \ - \quad - \\ \hline 7 \ 11 \end{array}$</p> <p>379. $\begin{array}{r} 17 \ 19 \\ 3 \ - \quad - \\ \hline 21 \ 23 \end{array}$</p>
---	--	--

Efectuar las multiplicaciones siguientes:

<p>380. $\begin{array}{r} 5 \\ - \times 5 \\ \hline 6 \end{array}$</p> <p>381. $\begin{array}{r} 11 \\ - \times 26 \\ \hline 13 \end{array}$</p>	<p>382. $\begin{array}{r} 9 \\ - \times 7 \\ \hline 21 \end{array}$</p> <p>383. $\begin{array}{r} 2 \\ 49 \times - \\ \hline 7 \end{array}$</p>	<p>384. $\begin{array}{r} 5 \\ 54 \times - \\ \hline 9 \end{array}$</p> <p>385. $\begin{array}{r} 7 \\ 108 \times - \\ \hline 12 \end{array}$</p>
--	---	---

<p>386. $\begin{array}{r} 2 \ 6 \\ - \times - \\ \hline 7 \ 7 \end{array}$</p> <p>387. $\begin{array}{r} 3 \ 5 \\ - \times - \\ \hline 5 \ 24 \end{array}$</p> <p>388. $\begin{array}{r} 1 \ 2 \\ - \times - \\ \hline 8 \ 3 \end{array}$</p> <p>389. $\begin{array}{r} 7 \ 15 \\ - \times - \\ \hline 8 \ 16 \end{array}$</p>	<p>390. $\begin{array}{r} 5 \ 12 \\ - \times - \\ \hline 8 \ 25 \end{array}$</p> <p>391. $\begin{array}{r} 9 \ 1 \\ - \times - \\ \hline 14 \ 7 \end{array}$</p> <p>392. $\begin{array}{r} 2 \ 2 \\ 4 \times 3 - \\ \hline 7 \ 5 \end{array}$</p> <p>393. $\begin{array}{r} 9 \ 3 \\ 6 \times 7 - \\ \hline 10 \ 4 \end{array}$</p>	<p>394. $\begin{array}{r} 2 \ 1 \\ 1 \times 5 - \\ \hline 3 \ 8 \end{array}$</p> <p>395. $\begin{array}{r} 2 \ 5 \\ 7 \times 9 - \\ \hline 9 \ 17 \end{array}$</p> <p>396. $\begin{array}{r} 5 \ 2 \\ 14 \times 12 - \\ \hline 13 \ 7 \end{array}$</p> <p>397. $\begin{array}{r} 4 \ 2 \\ 2 \times 4 - \\ \hline 15 \ 7 \end{array}$</p>
--	---	--

Efectuar las divisiones siguientes:

<p>398. $\begin{array}{r} 5 \ 3 \\ - : - \\ \hline 8 \ 4 \end{array}$</p> <p>399. $\begin{array}{r} 7 \ 1 \\ - : - \\ \hline 9 \ 12 \end{array}$</p> <p>400. $\begin{array}{r} 14 \ 7 \\ - : - \\ \hline 15 \ 10 \end{array}$</p> <p>401. $\begin{array}{r} 15 \ 5 \\ - : - \\ \hline 17 \ 7 \end{array}$</p> <p>402. $\begin{array}{r} 9 \ 3 \\ - : - \\ \hline 14 \ 5 \end{array}$</p>	<p>403. $\begin{array}{r} 2 \\ 6 : - \\ \hline 5 \end{array}$</p> <p>404. $\begin{array}{r} 4 \\ 5 : - \\ \hline 9 \end{array}$</p> <p>405. $\begin{array}{r} 3 \\ 4 : - \\ \hline 11 \end{array}$</p> <p>406. $\begin{array}{r} 12 : - \\ \hline 23 \end{array}$</p> <p>407. $\begin{array}{r} 3 \\ 9 : - \\ \hline 2 \end{array}$</p>	<p>408. $\begin{array}{r} 1 \ 1 \\ 7 : 4 - \\ \hline 5 \ 4 \end{array}$</p> <p>409. $\begin{array}{r} 2 \ 1 \\ 11 : 9 - \\ \hline 3 \ 8 \end{array}$</p> <p>410. $\begin{array}{r} 5 \ 10 \\ 15 : 19 - \\ \hline 6 \ 11 \end{array}$</p> <p>411. $\begin{array}{r} 4 \ 3 \\ 18 : 1 - \\ \hline 11 \ 8 \end{array}$</p> <p>412. $\begin{array}{r} 1 \ 4 \\ 104 : 11 - \\ \hline 2 \ 9 \end{array}$</p>
---	--	--

PROBLEMAS

(Los problemas precedidos de un asterisco deben resolverse mentalmente.)

- * 413. ¿Cuál es el número cuyos $3/4$ igualan a 33?
- * 414. ¿Cuál es el número cuyos $7/5$ igualan a 42?
- * 415. ¿Cuál es el número que se disminuye de 12 al multiplicarlo por $3/5$?
- * 416. ¿Cuál es el número que se aumenta de 16 al multiplicarlo por $5/3$?
- * 417. ¿Cuál es el número que se aumenta de su $1/12$ añadiéndole 6?
- * 418. ¿Cuál es el número que disminuye de su $1/7$ restándole 6?
- * 419. ¿Cuál es el número que se disminuye de 35 dividiéndolo por 6?

- * 420. ¿Por qué quebrado hay que multiplicar 12 para obtener $6/7$?
- * 421. ¿Por qué número hay que dividir 12 para obtener $3/4$?
- * 422. ¿Por qué quebrado hay que dividir 9 para que resulte lo mismo que al añadir 3 a este número?
423. ¿Por qué número se multiplica $3/5$ cuando se añade 5 a cada uno de sus términos?
424. ¿Por qué fracción se multiplica $10/11$ cuando se resta 5 de cada uno de sus términos?
425. ¿Por qué fracción se divide $18/13$ cuando se resta 9 de cada uno de sus términos?
426. ¿Por qué fracción se divide $5/7$ cuando se añade 5 a cada uno de sus términos?
427. El lunes ha tejido una máquina la $1/4$ parte de una pieza de tela, y el martes los $2/7$; ¿qué parte de la pieza ha tejido en ambos días?
428. Leoncio ha realizado 2 ventas: la 1ª de 3 costales $2/5$ de harina, la 2ª de 2 y $3/4$; ¿cuánto ha vendido en todo?
429. Dos obreros han trabajado, el uno 18 días y $1/2$ y el otro 15 y $3/4$; ¿cuántos días han trabajado entrambos?
430. Maximiliano ha vendido en una ocasión 34 metros $4/5$ de merino, y 52 $3/4$ de tafetán; ¿cuántos metros de tela ha vendido en todo?
431. ¿Cuántas netas buenas tiene Venceslao, si un tercio y un cuarto de las que le han dado igualan a 28?
432. Los $2/7$ y $1/5$ de una pieza de paño miden juntos 34 metros ¿cuál es la longitud de la pieza?
433. Patricio da los $3/5$ del dinero que tenía en su caja; recibe en seguida \$ 2674, y así su caudal primitivo queda aumentado de un tercio; ¿qué suma tenía al principio?
434. ¿Cuánto tiempo necesitan dos canales para llenar de agua un pozo, si el primero necesita 4 horas, y 6 el segundo?
435. Un trasatlántico camina 37 km. $1/3$ en 1 hora $3/5$. ¿Cuánto tiempo empleará para ir del Havre a Nueva York, siendo la distancia de estas ciudades de 5800 km.?
436. He recibido \$ 42 después de haber gastado los $2/5$ de lo que tenía, y tengo ahora \$ 2 más que al principio. ¿Cuánto tenía entonces?

437. Preguntado un profesor por el número de sus alumnos, responde: Si el número de mis alumnos se aumentara de sus $2/3$ y de 15, tendría 165. Hállese el número de sus alumnos.
438. Preguntado el pastor Eulogio por el número de sus ovejas, responde: Si agregara $1/3$ a las que tengo y 12 más, llegarían a 132, decidme el número cabal de ellas.
439. Dos partidas de obreros se conciertan para construir un camino: la 1ª sola podría hacerlo en 8 días de 10 horas de trabajo, la 2ª, en 12 días de 9 horas; ¿cuánto tiempo emplearán ambas juntas, si trabajan sólo 8 horas diarias?
440. ¿Qué hora es cuando la parte transcurrida del día es igual a los $3/5$ de lo que falta para acabarse?
441. Tres albañiles se proponen construir una obra: el 1º puede acabarla en $1/5$ de día, el 2º en $1/4$, y el 3º en $1/3$; si se reúnen los tres, ¿en cuánto tiempo la concluirán, contándose de 10 horas el día de trabajo?
442. De un tonel de vino de 224 litros de capacidad se han sacado 180; ¿qué parte del tonel queda vaciada?
443. Los $2/5$ y $1/3$ de una estaca están plantados en tierra; ¿qué parte de la estaca se halla fuera?
444. ¿Cuánto debe agregarse a una longitud de 29 metros $2/5$ para que resulten 64 metros $3/4$?
445. Si de los $3/4$ de una suma se restan \$ 39, resultan los $3/7$ de la misma, más \$ 6. ¿Cuál es esta suma?
446. Para trabajar los $3/7$ de una puerta, un carpintero necesita 12 horas; ¿cuánto tiempo gastará para hacer lo demás?
447. Nazario compra una quinta y con \$8595 paga al contado los $3/7$ de su valor; ¿cuál es el precio de esa quinta?
448. Después de haber vendido los $5/9$ de una pieza de paño, queda $1/7$ de ella más 26 metros; ¿cuál era la longitud de la pieza?
449. El asta de una bandera está pintada de diversos colores, del modo siguiente: $1/3$ de negro, $1/4$ de blanco, $1/5$ de azul, y los 65 centímetros restantes de colorado; ¿cuál es la longitud del asta?
450. ¿Cuál es el número que tiene 14 de diferencia entre sus $3/4$ y sus $2/5$?
451. Aparicio hace 3 metros de una obra en 4 horas, y Virgilio 5 metros en 7 horas; ¿cuál de los dos trabaja más, y cuánto por hora?

452. A un pozo dan 3 canales; el 1º lo llena en 1 hora $\frac{2}{5}$; el 2º en 2 horas $\frac{3}{4}$ y el 3º en 4 horas $\frac{5}{8}$. Un desagüadero lo vacía en 1 hora $\frac{2}{3}$; ¿cuánto tardará el pozo en llenarse, si se abren a un tiempo los canales y el desagüadero?

453. A una cuba dan tres grifos: el primero la llenaría en 1 h. $\frac{1}{4}$; el segundo, en 2 h. $\frac{2}{3}$; el tercero, en 4 h. $\frac{4}{7}$. Un desagüadero la vaciaría en 2 h. $\frac{2}{5}$. ¿Cuánto tardará la cuba en llenarse, abriendo los grifos y el desagüadero, si está llena hasta los $\frac{7}{16}$?

454. Dos correos van a su encuentro; el primero camina $\frac{1}{5}$ más que el segundo que corre 8 km. por hora. ¿A qué hora se encontrarán si han salido a las 6 de la mañana de dos ciudades distantes 44 km.?

455. Preguntada Tomasa por su edad, responde: Los $\frac{5}{7}$ de mi edad menos 4 años dan lo que tenía yo hace 12 años; haced la cuenta, y lo sabréis.

456. Para hacer 1 vara de cierta obra, Maximino gasta 2 horas $\frac{3}{4}$; ¿cuánto tiempo necesitará para hacer 12 varas $\frac{2}{5}$?

457. ¿Cuál es la longitud de una pieza de tela, cuyas $\frac{3}{4}$ partes dan un corte de 72 metros?

458. Vicente, que cuenta 12 años $\frac{1}{2}$ tiene los $\frac{2}{5}$ de la edad de Cristóbal; ¿cuántos años tiene este último?

459. ¿Cuáles son los $\frac{2}{3}$ de los $\frac{3}{4}$ de \$ 20?

460. Cecilia encuentra 3 pobres huerfanitos y 5 pordioseros, y da a cada uno de los primeros $\frac{3}{5}$ de peso, y cada uno de los segundos $\frac{4}{5}$ de peso, y le quedan a ella \$ 4; ¿qué suma tenía al principio?

461. Una persona a quien se pregunta qué hora es, contesta: Son los $\frac{2}{3}$ de los $\frac{3}{4}$ de los $\frac{5}{6}$ de 24 horas. Hállese la respuesta.

462. Un reloj que señala la hora exacta el domingo a mediodía, adelanta $\frac{2}{3}$ de minuto por hora. ¿Qué hora será el martes cuando el reloj señale las 9 y 45 de la noche?

463. ¿Qué hora es cuando las dos manecillas de un reloj se hallan la una sobre la otra: 1º entre las 3 y las 4; 2º entre las 10 y las 11?

464. ¿Qué hora es cuando las dos manecillas se hallan en línea recta entre las 4 y las 5?

465. Un reloj atrasa 5 minutos $\frac{1}{3}$ en 3 días $\frac{3}{4}$; ¿cuánto atrasará en un día?

466. He comprado una mula por \$ 60, y la revendo por los $\frac{7}{5}$ de lo que me costó; ¿cuánto he ganado en el negocio?

467. Sería menester 1800 metros de paño para vestir a un batallón, si el paño tuviera $\frac{6}{4}$ de metro de ancho; pero sucede que siendo más angosto el paño, el vendedor da 2000 metros; ¿cuál fue el ancho de este último?

468. Un obrero hace 2 metros $\frac{3}{5}$ de una obra en 2 horas $\frac{1}{4}$; ¿cuántos hará en 5 horas $\frac{1}{2}$?

469. Una plaza que no tiene víveres más que para 8 días no puede ser socorrida sino al cabo de 12; ¿a cuánto debe reducirse la ración diaria de cada hombre?

470. Una diligencia recorre 15 kilómetros $\frac{1}{2}$ en 1 hora, mientras que un coche no recorre más que 7 kilómetros $\frac{1}{4}$; si salen ambos a un tiempo de un mismo lugar, con dirección a una ciudad distante 60 kilómetros $\frac{3}{4}$, pregúntase cuántas horas antes que el coche llegará la diligencia.

471. Una bola cae de una altura de 80 centímetros sobre una mesa de mármol; cada vez que toca a la mesa, rebota y se eleva a una altura igual a la tercera parte de aquella de que cayó. ¿A qué altura se elevará la bola al tercer bote?

472. La fortuna de un comerciante se ha aumentado de la manera siguiente: durante el primer año, de la mitad; durante el segundo año, de la tercera parte de lo que era a principios de este segundo año. Siendo entonces \$ 180 000, hállese la fortuna al principio del primer año.

473. Una suma se ha repartido entre 5 personas: la 1ª ha recibido $\frac{1}{4}$ de la suma; la 2ª, los $\frac{3}{8}$ de la parte de la 1ª; la 3ª, los $\frac{4}{9}$ de lo que quedaba después de servir las dos primeras; la 4ª ha recibido los $\frac{3}{10}$ de la suma de las tres primeras partes; la 5ª ha recibido los \$ 1 670 que quedaban. ¿Cuál fué la suma repartida?

474. Un escolar reparte entre 3 de sus discípulos cierto número de avellanas. El primero recibe los $\frac{4}{11}$ más 3 avellanas $\frac{8}{11}$; el segundo, los $\frac{5}{9}$ del resto, más $\frac{7}{9}$ de avellana; el tercero ha recibido las 25 avellanas que quedan. ¿Cuántas avellanas les tocaron a los dos primeros?

475. Dos porciones de terreno que miden juntas 8 200 m² de superficie se vendieron por \$ 7 410. Los $\frac{5}{6}$ de la primera igualan a los $\frac{7}{8}$ de la segunda, y 5 m² de la primera valen tanto como 7 m² de la segunda. Hállese la superficie de cada una de las porciones de dicho terreno, y el precio del área de cada una de ellas.

CAPITULO III

FRACCIONES Y NUMEROS
DECIMALESNumeración y propiedades de los números
decimales

240. Definición.—Llámase *quebrado o fracción decimal* una o varias partes de la unidad dividida en 10, 100, 1 000, etc. partes iguales; o de otro modo:

Fracciones decimales son las que tienen por denominador una potencia de 10, o sea la unidad seguida de uno o varios ceros.

Así, $\frac{1}{10}$, $\frac{57}{100}$, $\frac{349}{1000}$ son quebrados decimales.

241. Número decimal es un número entero seguido de una fracción decimal, o también una fracción decimal aislada.

Por ejemplo, 15,325 o $15 \frac{325}{1000}$

y 0,42 o $\frac{42}{100}$

242. Numeración de los números decimales.

—Las partes contenidas 10 veces en la unidad se llaman *décimas*.

Las *décimas partes de las décimas* se llaman *centésimas*, porque están contenidas *cient* veces en la unidad.

Las *décimas partes de las centésimas* se denominan *milésimas*, porque están contenidas *mil* veces en la *unidad*.

A las partes decimales de la unidad se aplica la

convención fundamental de la numeración escrita (24), a saber: *que toda cifra escrita a la derecha de otra representa unidades 10 veces menores que las que expresa ésta*. De donde resulta que la cifra escrita a la derecha de las unidades representa *décimas*, la cifra escrita a la derecha de las *décimas* representa *centésimas* etc.

243. ESCRITURA DE UN NUMERO DECIMAL.—Para representar un número decimal, se escribe primero la parte entera, si la hay, seguida de una coma. Cuando no hubiere parte entera, se la reemplaza con un cero, seguido de la coma. Después de la coma se escriben de izquierda a derecha las decimales, cuidando de colocar cada cifra en el lugar correspondiente al orden que representa, y si algún orden decimal carece de unidades se escribe un cero en el lugar correspondiente a estas unidades...

Así la expresión *catorce unidades novecientos catorce diezmilésimas*, se escribirá: 14,0914, poniendo un cero para reemplazar las *décimas* que faltan.

Así también la fracción $\frac{349}{1000}$ que es igual a $\frac{300}{1000} + \frac{40}{1000} + \frac{9}{1000}$ o $\frac{3}{10} + \frac{4}{100} + \frac{9}{1000}$, se escribirá poniendo un cero en el lugar de las unidades, y una coma: 0,349.

244. LECTURA DE UN NUMERO DECIMAL.—Para leer un número decimal, se enuncia su parte entera, y en seguida la parte decimal como si fuese entera, expresando el orden decimal que la última cifra de la derecha representa.

Así, 0,35, 6,465, 142,3 se leerán:
cero unidades 35 *centésimas*, o sólo 35 *centésimas*.
6 unidades 465 *milésimas*.
142 unidades 3 *décimas*.

Cuando hay un gran número de cifras decimales, es preferible dividir las en grupos de a tres, de izquierda a derecha, los cuales se leen separadamente.

Por ejemplo: 3,141 592 65 se lee: 3 unidades 141 *milésimas* 592 *millonésimas* 65 *cientillonésimas*.

245. Reducción de un número decimal a quebrado común.—Sean los números decimales 40,5 6,07, 0,375.

Estos números pueden escribirse:

$$40,5 = \frac{405}{10} = 40 + \frac{5}{10} \text{ o } 40 + \frac{5}{100} = 40 + \frac{50}{100} = 40 + \frac{500}{1000}$$

$$6,07 = \frac{607}{100} = 6 + \frac{7}{100} \text{ o } 6 + \frac{70}{1000} = 6 + \frac{700}{1000}$$

$$0,375 = \frac{375}{1000}$$

REGLA.—Para reducir un número decimal a quebrado común, se pone por numerador la cantidad dada, sin hacer caso de la coma, y por denominador la unidad seguida de tantos ceros cuantas son las cifras decimales.

246. PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS DECIMALES.—1º Un número decimal no se altera si se le agregan o quitan ceros a la derecha.

Por ejemplo, los números 6,45, 6,450, 6,4500 son iguales, pues cada uno se compone de 6 unidades, 4 décimas y 5 centésimas.

En los dos últimos, los ceros indican sólo que hay *ceros milésimas, cero diezmilésimas*.

De donde se infiere que, sin alterar el valor de los números decimales, se los puede siempre representar con el mismo número de decimales.

Así, 6,72, 25,7, 4,1911, se pueden escribir 6,7200, 25,7000, 4,1911, teniendo así el mismo número de cifras decimales.

247.—2º Para multiplicar un número decimal por 10, 100, 1000, etc. basta correr la coma uno, dos, tres, etc. lugares, hacia la derecha.....

Sea el número 2,573; corramos la coma, por ejemplo, dos lugares hacia la derecha, y demostremos que el número resultante 257,3 es 100 veces mayor que 2,573.

En efecto, los valores absolutos de las cifras son iguales en ambos números; pero el valor relativo de cada cifra se ha hecho *cien veces mayor*, luego el número entero se ha hecho también 100 veces mayor.

Del propio modo se demostraría que para dividir

un número decimal por 10, 100, 1000 etc., basta correr la coma uno, dos, tres, etc. lugares, hacia la izquierda.

Nota.—Si el número que se ha de multiplicar o de dividir no tuviere bastantes cifras, se agrega un número suficiente de ceros a la derecha o a la izquierda.

$$\text{Así, } 37,23 \times 1000 = 37230$$

$$2,37 : 1000 = \frac{237}{100} : 1000, \text{ o bien } \frac{237}{100000} = 0,00237.$$

II.—Operaciones con los números decimales.

Adición

248. REGLA.—Para sumar números decimales, se colocan los sumandos unos debajo de otros, de modo que las unidades vayan debajo de las unidades, las décimas debajo de las décimas, las centésimas debajo de las centésimas, etc., y luego se suman como los números enteros, teniendo cuidado de poner la coma en el total a la derecha de las unidades.

Ejemplo.—Súmense las cantidades siguientes:

$$\begin{array}{r} 4,037 \\ 1\ 709,34 \\ 40\ 004,003\ 079 \\ \hline \text{Total: } 41\ 717,380\ 079 \end{array}$$

Sustracción

249. REGLA.—Para restar números decimales, se escribe el sustraendo debajo del minuendo, de modo que las unidades vayan debajo de las unidades, las decenas debajo de las decenas, etc., las décimas debajo de las décimas, las centésimas debajo de las centésimas, etc.....

Si el minuendo no tuviere igual número de cifras decimales que el sustraendo, se le agregan a la derecha tantos ceros como fueren menester, y se ejecuta la operación como en los enteros.

En la diferencia se pone la coma debajo de la de los dos números.

Ejemplo.—De 3456,7 réstese 2986,354.

$$\begin{array}{r} 3\,456,700 \\ 2\,986,354 \\ \hline \end{array}$$

Diferencia: 470,346

Multiplicación

250. REGLA.—Para multiplicar números decimales, se busca el producto de ellos como si fuesen números enteros, sin hacer caso de la coma; pero teniendo cuidado de separar a la derecha del producto tantas cifras decimales como hay en ambos factores juntos.

Ejemplo.—Multiplicar 32,25 por 13,47.

$$\begin{array}{r} \text{Tenemos:} \quad 32,25 = \frac{3\,225}{100} \\ \quad \quad \quad 13,47 = \frac{1\,347}{100} \end{array}$$

Multiplicando miembro por miembro, resulta:

$$32,25 \times 13,47 = \frac{3\,225}{100} \times \frac{1\,347}{100} = \frac{3\,225 \times 1\,347}{10\,000}$$

Por donde se ve que, después de haber multiplicado 3 225 por 1 347, habrá que separar, con una coma, 4 guarismos a la derecha del producto. Lo que dará 4 cifras decimales, esto es, tantas como hay en ambos factores juntos.

251.—Nota para el cálculo mental.—1º Para multiplicar por 0,50, se toma la mitad del multiplicando;

$$24 \times 0,50 = \frac{24}{2} = 12.$$

2º Para multiplicar por 0,05 se divide el multiplicando por 20

$$24 \times 0,05 = \frac{24}{20} = 1,2.$$

3º Para multiplicar por 1,5 se añade al multiplicando su mitad:

$$24 \times 1,5 = 24 + 12 = 36.$$

4º Para multiplicar por 0,25, se divide el multiplicando por 4:

$$24 \times 0,25 = \frac{24}{4} = 6.$$

5º Para multiplicar por 0,75, se toman los $\frac{3}{4}$ del multiplicando, o se resta de éste su cuarta parte.

$$24 \times 0,75 = 24 \times \frac{3}{4} = 18.$$

$$24 \times 0,75 = 24 - \frac{24}{4} = 18.$$

División

252. COCIENTE CON UNA UNIDAD DE APROXIMACION.—1º El divisor es entero. — El cociente, con una unidad de aproximación, de un número decimal por un número entero, es igual cociente, con una unidad de aproximación, de la parte entera del número decimal por el divisor.

Divídase 6 256,85 por 215.

Se dispone la operación como si fuesen enteros los números. El cociente en menos de una unidad es 29, y el residuo 21,85.

$$\begin{array}{r} 6\,256,85 \quad | \quad 215 \\ 1\,956 \quad | \quad 29 \\ \hline 21,85 \end{array}$$

253. 2º EL DIVIDENDO Y EL DIVISOR SON DECIMALES.—Para encontrar el cociente, en menos de una unidad por defecto, se multiplican dividendo y divisor por una potencia de 10 suficiente para hacer entero el divisor, y el caso queda reducido a una división de enteros, o a la división de un número decimal por un número entero.

Para obtener el residuo, se corre la coma hacia la izquierda, en el residuo hallado, tantos lugares como se había corrido a la derecha en el dividendo.

Ejemplo.—Divídase 68 756,584 por 3 245,56

$$\begin{array}{r|l} 68\ 756\ 58,4 & 324\ 556 \\ 3\ 845\ 38 & 21 \\ \hline 599,824 & \end{array}$$

Hemos multiplicado por 100 dividendo y divisor.
Para obtener el residuo se corre la coma dos lugares a la izquierda.

El cociente en menos de una unidad es 21, y el residuo 599,824.

254. **COCIENTE EN MENOS DE 0,1, 0,01, 0,001.** — Para calcular el cociente en menos de 0,1 0,01, 0,001, etc. por defecto, de dos números decimales, se hace entero el divisor y se parte el dividendo por el divisor, sacando tantas cifras decimales cuantas indique la aproximación que se pida.

Ejemplo: Calcúlese el cociente de 7,1756 por 2,54 en menos de 0,001.

$$\begin{array}{r|l} 717,56 & 254 \\ 209\ 5 & 2,825 \\ 6\ 36 & \\ 1\ 280 & \\ \hline 0,010 & \end{array}$$

255.—**Nota para el cálculo mental.**—1º Para dividir por 0,50 se multiplica el dividendo por 2:

$$24 : 0,5 = 24 \times 2 = 48.$$

2º Para dividir por 0,05, se multiplica el dividendo por 20.

$$24 : 0,05 = 24 \times 20 = 480.$$

3º Para dividir por 1,5, se toma los 2/3 del dividendo:

$$24 : 1,5 = 24 \times \frac{2}{3} = 16.$$

4º Para dividir por 0,25, se multiplica el dividendo por 4:

$$24 : 0,25 = 24 \times 4 = 96.$$

5º Para dividir por 0,75, se toman los 4/3 del dividendo, o se añade a éste su tercio.

$$24 : 0,75 = 24 \times \frac{4}{3} = 32.$$

$$24 : 0,75 = 24 + \frac{24}{3} = 32.$$

III.—Reducción de quebrados comunes a fracciones decimales.

256. **Definición.**—Reducir un quebrado común a fracción decimal es buscar una fracción decimal equivalente al quebrado común, o que difiera de él en menos de una unidad de un orden decimal dado.

Ejemplo.—Reducir $\frac{7}{32}$ a fracción decimal.

Como todo quebrado común es el cociente indicado de la división de su numerador por su denominador (205), para encontrar la fracción decimal pedida hay que dividir 7 por 32.

Con 3 cifras decimales, tengo el cociente en menos de un milésimo; con 5 cifras, resulta el cociente exacto.

Sean también los quebrados $\frac{16}{125}$ y $\frac{7}{22}$.

160	125	70	22
350	0,128	40	0,31818...
1000		180	
0		40	
		18	
		:	
		.	

257. REGLA. — Para reducir un quebrado común a fracción decimal, se divide el numerador por el denominador; así resulta una fracción decimal equivalente al quebrado común (cuando el cociente es exacto); o que difiere de él en menos de un décimo, de un centésimo, de un milésimo, etc. (cuando no es exacto el cociente).

258. Nota. — De lo que antecede se deduce que, al reducir un quebrado común a decimal, pueden resultar fracciones con un número limitado de cifras; y otras en que el número de cifras es ilimitado habiendo un grupo de ellas que se repite periódica e indefinidamente.

Las primeras se llaman fracciones *limitadas* o *exactas*, y las segundas, fracciones *periódicas*.

259. CONDICION PARA QUE UN QUEBRADO COMUN SE CONVIERTA EN FRACCION DECIMAL LIMITADA. — Para que un quebrado común irreducible pueda convertirse exactamente en fracción decimal, es necesario y suficiente que el denominador no contenga más factores primos que 2 y 5.

1ª Esta condición es necesaria. — Sea el quebrado común irreducible $\frac{7}{20}$ que suponemos puede reducirse

exactamente a fracción decimal, y sea $\frac{a}{10^n}$ la fracción

decimal equivalente; tendremos:

$$\frac{7}{20} = \frac{a}{10^n}$$

Ahora bien, los términos de la fracción $\frac{a}{10^n}$ son equimúltiplos (216) de los términos del quebrado $\frac{7}{20}$;

además, siendo el denominador 10^n una potencia de 10, no contiene más que los factores 2 y 5. Luego el denominador 20, su divisor, no puede contener otros factores que 2 y 5.

2ª Esta condición es suficiente. — Sea el quebrado $\frac{7}{20}$ cuyo denominador no contiene más que los factores 2 y 5; se lo podemos convertir en fracción decimal exacta.

En efecto, tenemos $\frac{7}{20} = \frac{7}{2^2 \times 5}$; multiplicando por 5 ambos términos de este quebrado, resulta:

$$\frac{7 \times 5}{2^2 \times 5 \times 5} = \frac{35}{2^2 \times 5^2} = \frac{35}{10^2} = 0,35.$$

Asimismo $\frac{9}{16} = \frac{9}{2^4} = \frac{a}{10^4}$.

En efecto, multiplicando por 5^4 o 625 los dos términos del quebrado $\frac{9}{16}$, tendremos:

$$\frac{9 \times 625}{16 \times 625} = \frac{9 \times 625}{2^4 \times 5^4} = \frac{5625}{10^4} = 0,5625.$$

260. NOTA. — De lo demostrado se deduce: 1ª que el exponente

de 10 es igual al mayor de los exponentes de los factores 2 o 5 del denominador del quebrado irreducible; 2º que el número de cifras decimales es también igual al mayor de los exponentes de los factores 2 o 5.

IV.—Fracciones periódicas.

261. Definición.—Llámanse *fracciones periódicas* las fracciones decimales en las cuales las mismas cifras se reproducen indefinidamente y en el mismo orden.

Período es la serie de cifras que se reproducen.

262. Las fracciones periódicas se dividen en *puras* y *mixtas*.

La fracción periódica es pura cuando el período principia en las décimas, como en

$$0,356\ 356\ 356\dots$$

La fracción periódica es mixta cuando el período no principia en las décimas, como en

$$0,37\ 456\ 456\ 456\dots$$

37 es la *parte irregular* o *no periódica*.

263. TEOREMA.—Un quebrado común reducido a decimal da origen a una fracción periódica cuando no produce una fracción decimal exacta.

$$\text{Sea el quebrado } \frac{4}{7} \quad \begin{array}{r} 40 \\ 7 \end{array} \quad \begin{array}{r} 7 \\ \hline 0,571\ 428\ 571\ 428\dots \end{array}$$

Dividiendo el numerador por el denominador, los residuos han de ser siempre menores que el divisor, y por consiguiente, estos residuos diferentes, a lo más, son 6.

Habiendo aparecido todos estos residuos, claro está que en la división parcial siguiente aparecerá uno de los anteriores, y entonces los cocientes y los residuos se reproducirán en el mismo orden, e indefinidamente.

El período tiene 6 cifras; luego:

$$\frac{4}{7} = 0,571\ 428\ 571\ 428\dots$$

Para el quebrado $\frac{7}{22}$ se encuentra, después de 3

divisiones parciales, un residuo ya obtenido.

$$\begin{array}{r} 70 \quad | \quad 22 \\ 40 \quad | \quad 0\ 3\ 18\ 18\ 18\dots \\ 180 \quad | \end{array}$$

El período tiene 2 cifras;

$$\text{luego } \frac{7}{22} = 0,3\ 18\ 18\ 18\dots$$

Si se encuentra un residuo igual al dividendo primitivo, el período es *simple* (como en la fracción $\frac{4}{7}$);

y si es igual a un residuo ya obtenido, el período es *mixto* (como en la fracción $\frac{7}{22}$).

264. Notas.—El número de cifras del período es, a lo sumo, igual al número de unidades que tenga el divisor, menos una.

II. Los quebrados $\frac{4}{7}$ y $\frac{7}{22}$ se llaman *quebrados generadores* de las fracciones periódicas.

III.—Cuanto mayor es el número de períodos que se tomen, tanto más la fracción decimal se acerca al valor del quebrado generador (256); luego el quebrado generador es el *límite* al cual se acerca la fracción decimal periódica cuando el número de períodos aumenta indefinidamente.

Reducción de fracciones periódicas a quebrados comunes.

265. I. Hallar el quebrado generador de una fracción periódica pura.—Sea la fracción periódica pura

$$0,375\ 375\ 375\ 375\dots$$

Designemos por a el conjunto de los 4 primeros períodos:

$$a = 0,375\ 375\ 375\ 375 \quad (1)$$

Multipliquemos por 1000 ambos miembros, para que resulte entero el primer período:

$$1\ 000\ a = 375,375\ 375\ 375 \quad (2)$$

Como en esta igualdad no quedan más que tres períodos en la parte decimal, añadamos el cuarto período a ambos miembros:

$$1\ 000\ a + \frac{375}{1\ 000^4} = 375,375\ 375\ 375\ 375 \quad (3)$$

Restemos ordenadamente la igualdad (1) de la igualdad (3):

$$999\ a + \frac{375}{1\ 000^4} = 375$$

Si en vez de tomar 4 períodos se toman 10, 20, 100, etc., el valor del último período que es igual sucesivamente a

$$\frac{375}{1\ 000^{10}}, \frac{375}{1\ 000^{20}}, \frac{375}{1\ 000^{100}}, \text{ etc}$$

disminuye indefinidamente y se acerca a cero, mientras a se acerca al valor F de la fracción generatriz; por lo tanto,

$$999\ F = 375 \quad \text{o} \quad F = \frac{375}{999}$$

Como comprobación se puede simplificar el quebrado

$\frac{375}{999}$, y reducirlo a decimales; resulta:

$$\frac{375}{999} = \frac{125}{333} = 0,375\ 375\ 375\dots$$

266. REGLA. — El quebrado generador de una fracción decimal periódica pura tiene por numerador el período, y por denominador un número compuesto de tantos nueves como cifras tiene el período.

267. II. Hallar el quebrado generador de una fracción periódica mixta.

Sea la fracción $0,36\ 981\ 981\ 981\dots$

Llamando a al conjunto de la parte no periódica y de los 4 primeros períodos, se tendrá:

$$a = 0,36\ 981\ 981\ 981$$

Multipliquemos esta igualdad sucesivamente por 100 y por 100 000, de modo que la coma quede corrida, primero más allá de la parte no periódica, y después más allá del primer período, resultarán las dos igualdades:

$$100\ a = 36,981\ 981\ 981 \quad (1)$$

$$100\ 000\ a = 36\ 981,981\ 981 \quad (2)$$

Añadiendo el cuarto período a los dos miembros de la igualdad (2), resulta:

$$100\,000a + \frac{981}{1\,000^4} = 36\,981,981\,981\,981\,981 \quad (3)$$

Restando ordenadamente la igualdad (1) de la igualdad (3), y razonando como en el problema anterior, tendremos:

$$99\,900a + \frac{981}{1\,000^4} = 36\,981 - 36$$

o sea $99\,900F = 36\,981 - 36$

y $F = \frac{36\,981 - 36}{99\,900}$

268. REGLA.—El quebrado generador de una fracción periódica mixta tiene por numerador el número formado por la parte no periódica, seguida del primer período, menos la parte no periódica; y por denominador un número formado de tantos nueves como cifras tiene el período, seguidos de tantos ceros cuantas cifras tiene la parte no periódica.

269. TEOREMA.—Todo quebrado común irreducible da origen a una fracción periódica pura cuando su denominador no es divisible por los factores primos 2 y 5.

Sea el quebrado $\frac{a}{b} = 0,375\,375\,375\dots$; tenemos:

$$\frac{a}{b} = \frac{375}{999} \quad (266)$$

El denominador 999 no es divisible por el factor 2 ni por el factor 5, y como b ha de dividir a 999 (216), tampoco será b divisible por los factores 2 y 5.

270. TEOREMA.—Todo quebrado irreducible da origen a una fracción periódica mixta cuando su denominador, además de ser divisible por 2, por 5, o por 2 y 5 a la vez, tiene algún otro divisor primo.

La parte no periódica tendrá tantas cifras como unidades tenga el mayor exponente de 2 o 5 en el denominador.

Sea $\frac{a}{b}$ el quebrado irreducible que da origen a la

fracción $0,36\,981\,981\dots$; tenemos:

$$\frac{a}{b} = \frac{36\,981 - 36}{99\,900} = \frac{36\,981 - 36}{999 \times 100} = \frac{36\,981 - 36}{999 \times 2^2 \times 5^2}$$

Notemos primero que efectuando la resta indicada en el numerador de este último quebrado, el número que resulte no terminará en cero, porque se necesitaría que la última cifra de la parte no periódica fuese igual a la última cifra del período, y entonces el período hubiera debido comenzar en aquella cifra. Luego dicho numerador no es divisible por 10, o lo que es lo mismo, por 2 y 5 a la vez.

Simplificando este quebrado cuanto sea posible, siempre quedará, en el denominador del quebrado irreducible que resulte, el factor 2 o el 5 (o los dos en el caso de que el numerador no sea divisible por 2 ni 5), con el exponente 2, esto es, con un exponente que tiene tantas unidades como cifras tiene la parte no periódica.

NOTA.—100 descompuesto en sus factores primos es igual a $2^2 \times 5^2$. En general, todo número formado por la unidad seguida de ceros, descompuesto en sus factores primos se compone del factor 2 y del factor 5, elevados a una potencia que tiene tantas unidades como ceros siguen a la unidad.

Reducción de una fracción decimal limitada a quebrado común.

Sea la fracción decimal limitada 0,56.

El valor de este quebrado es 56 centésimas; se ha dividido la unidad en 100 partes y se han tomado 56 de ellas. Luego se escribirá (193):

$$0,56 = \frac{56}{100} = \frac{14}{25}$$

271. REGLA.—Para reducir una fracción decimal limitada a quebrado común, se prescinde de la coma, y se ponen todas las cifras como numerador; y como denominador, la unidad seguida de tantos ceros cuantas cifras tenga la parte decimal.

$$\text{Así, } 0,485 = \frac{485}{1000} = \frac{97}{200}$$

$$0,0019 = \frac{19}{10000}$$

$$6,25 = \frac{625}{100} = \frac{25}{4}$$

EJERCICIOS ORALES

476. ¿Qué es fracción decimal?
477. ¿Cómo se reducen a decimales los quebrados comunes?
478. ¿Todos los quebrados comunes son exactamente reducibles a quebrados decimales?
479. ¿Cómo se reducen a quebrados comunes las fracciones decimales?
480. ¿Todos los quebrados decimales son exactamente reducibles a quebrados ordinarios?
481. ¿Cómo se llama la fracción decimal que no es limitada?
482. ¿Cuándo se reduce a fracción decimal limitada un quebrado ordinario?
483. ¿Cuándo, de un quebrado ordinario irreducible, resulta una fracción periódica pura?
484. ¿Puede reducirse el quebrado $2/5$ a quebrado decimal limitado?
485. ¿El quebrado $18/30$ es reducible exactamente a quebrado decimal?
486. Pregúntase lo mismo de los quebrados $3/5$, $1/7$, $5/6$, $9/12$, $5/8$, $41/64$, $3/14$, y explíquese el porqué. Si son irreducibles, ¿a qué clase de quebrado periódico dan origen?

487. Cuántas cifras tendrá después de la coma el quebrado decimal equivalente a $12/25$?

488. Pregúntase lo mismo de los quebrados $5/8$, $3/40$, $17/200$ y $15/96$.

489. ¿Cuántas cifras tendrá la parte no periódica del quebrado decimal equivalente a $5/24$, y por qué?

490. Pregúntase lo mismo de los quebrados $3/14$, $2/15$, $2/23$, $4/55$, $7/75$.

EJERCICIOS ESCRITOS

Reducir a decimales los quebrados siguientes:

491.	$\frac{1}{5}$	495.	$\frac{2}{3}$	499.	$\frac{5}{6}$	503.	$\frac{7}{64}$
492.	$\frac{1}{8}$	496.	$\frac{1}{7}$	500.	$\frac{4}{13}$	504.	$\frac{7}{60}$
493.	$\frac{12}{15}$	497.	$\frac{1}{9}$	501.	$\frac{4}{45}$	505.	$\frac{6}{25}$
494.	$\frac{7}{8}$	498.	$\frac{10}{11}$	502.	$\frac{11}{24}$	506.	$\frac{6}{75}$

Búsqese la fracción generatriz de las fracciones periódicas siguientes:

507.	0,3333...	515.	0,254 33333...
508.	0,6666...	516.	0,01 6666...
509.	0,7777...	517.	0,32 548 548...
510.	0,23 23 23...	518.	0,345678 3333...
511.	0,45 45 45...	519.	0,000 432 432 432...
512.	0,91 91 91...	520.	0,198 198 198 198...
513.	0,108 108 108...	521.	22,45 45 45 45...
514.	0,18 18 18...	522.	254,394 75 75 75...

Escribir las fracciones decimales siguientes en forma de fracciones ordinarias reducidas a su más simple expresión:

523.	0,45	527.	0,24	531.	0,064
524.	0,185	528.	0,125	532.	0,195
525.	0,5	529.	0,0625	533.	0,4532
526.	0,25	530.	0,3244	534.	0,625

Hállese la suma de las cantidades siguientes:

$$535. \quad \frac{2}{3} + 0,448$$

$$536. \quad \frac{4}{7} + 0,91$$

$$537. \quad 2,36 + 5\frac{1}{9}$$

$$538. \quad 2\frac{4}{7} + 8,45 + 0,625$$

$$539. \quad 5\frac{3}{4} + 2\frac{7}{8} + 9,75$$

$$540. \quad 2,66 + 1\frac{3}{7} + 8\frac{4}{9}$$

Hállese la diferencia de las cantidades siguientes:

$$541. \quad \frac{5}{7} - 0,225$$

$$542. \quad \frac{11}{12} - 0,495$$

$$543. \quad 4,28 - \frac{2}{9}$$

$$544. \quad 5,016 - 1\frac{3}{7}$$

Efectuar las multiplicaciones siguientes:

$$545. \quad \frac{5}{6} \times 0,156$$

$$546. \quad 1\frac{3}{7} \times 3,458$$

$$549. \quad 0,45 \ 45 \ 45 \ 45 \dots \times 3,276 \ 666 \dots$$

$$547. \quad 0,572 \times 5\frac{2}{11}$$

$$548. \quad 8,35 \times 4\frac{5}{6}$$

Calcular en menos de un milésimo el cociente de las divisiones siguientes:

$$550. \quad \frac{2}{3} : 0,16$$

$$551. \quad 1\frac{5}{7} : 0,96$$

$$554. \quad 2,42 \ 54 \ 54 \ 54 \dots : 0,27 \ 27 \ 27 \ 27 \dots$$

$$552. \quad 1,96 : 1\frac{6}{7}$$

$$553. \quad 3,45 : 5\frac{5}{11}$$

555. Demostrar, sin reducirlas a un mismo denominador, que las fracciones siguientes son equivalentes:

$$1^\circ \quad \frac{5}{9} \quad \frac{55}{99} \quad \frac{555}{999} \quad \frac{5555}{9999}$$

$$2^\circ \quad \frac{8}{37} \quad \frac{808}{3737} \quad \frac{80808}{373737}$$

$$3^\circ \quad \frac{160}{999} \quad \frac{160160}{999999}$$

$$4^\circ \quad \frac{3}{11} \quad \frac{303}{1111} \quad \frac{30303}{111111}$$

CALCULO MENTAL

556. 1º A \$ 0,50 un libro, ¿cuánto valen 24 libros? — ¿15 libros? — ¿127 libros? — ¿273 libros?

A \$ 0,25, un espejo? — ¿cuánto importan 12 espejos? — ¿70 espejos? — ¿125 espejos? — ¿239 espejos?

A \$ 4,50 una caja de cigarrillos, ¿cuánto valen 10 cajas? — 75 cajas? — ¿154 cajas? — ¿327 cajas?

A \$ 0,75 un folleto, ¿cuánto importan 10 folletos? — ¿12 folletos? — ¿56 folletos? — ¿75 folletos? — ¿152 folletos?

2º ¿Cuántas horas ha trabajado un obrero que recibe \$ 41, ganando \$ 0,50 por hora?

Dividir por 0,05 los números siguientes: 12, 35, 76, 137, 328.

Dividir por 0,25 los números siguientes: 10, 25, 71, 127, 348.

¿Cuántas botellas de 0 lit. 75 se podrán llenar con un barril de 36 lit.? — ¿de 75 lit.? — ¿de 228 lit.?

PROBLEMAS

557. Un encuadernador ha comprado 5 docenas de badanas, a \$ 4 docena, y 2 docenas de cabritillas; la docena de esta última especie de piel importa el triple de la primera, menos \$ 0,80 centavos; ¿qué cantidad de dinero debe gastar el encuadernador?

558. Un taller que trabaja 10 horas por día, tiene obra para 16 días; si se quiere que el trabajo dure 20 días, ¿qué parte deberá disminuirse del trabajo diario?

559. Andrés compra 12 volúmenes a \$ 2,60 cada uno, y recibe 13 en lugar de 12 ¿a cuánto le sale el volumen?

560. ¿Cuál es la longitud de una pieza de paño que ha costado \$ 877,50, sabiendo que al revender 25 metros por \$ 437,50 se han ganado \$ 2,50 por metro?

561. Sebastián promete dar a los pobres \$ 0,25 cada vez que gane \$ 9,25; ¿cuánto le queda a él, cuando su limosna asciende a \$ 5,25?

562. Cada vez que un joven gana \$ 9,25 su padre le da cierta suma; ¿cuál es esta suma, sabiendo que cuando el dón del padre es de \$ 12,23 el hijo tiene por todo \$ 77?

563. Una bujía de 0^m23 de largo se disminuye de 0^m0011 por minuto, al estar encendida; ¿cuántas horas tardará en acabarse?

564. Una pieza de paño se vendería \$ 431,20 si tuviera 1/6 1/6 más de largo; dígame el largo que tiene la pieza si el metro vale \$ 15,40.

275. Raíz cuadrada.—*Raíz cuadrada* de un número es una cantidad, que, multiplicada por sí misma, da el número propuesto.

La extracción de la raíz cuadrada se indica por medio del signo $\sqrt{\quad}$ llamado *radical*.

Por definición, el cuadrado de una cantidad colocada bajo el signo radical se obtiene suprimiendo dicho signo.

Así, el cuadrado de $\sqrt{3}$ es 3, el de $\sqrt{4}$ es 4, porque

$$\sqrt{4} \times \sqrt{4} = 4.$$

276. Raíz cuadrada exacta.—Se dice que un número es *cuadrado perfecto* cuando es el cuadrado de otro número.

Así, 16 es cuadrado perfecto; ya que es el cuadrado de 4; 0,49 es cuadrado perfecto, pues es el cuadrado de 0,7.

Extraer la raíz cuadrada de un número que es cuadrado perfecto es encontrar el número del cual es cuadrado.

Por ejemplo, la raíz cuadrada de 64 es 8, pues 64 es el cuadrado de 8; y se escribe: $\sqrt{64} = 8$

Raíz cuadrada de un quebrado es otro quebrado que, multiplicado por sí mismo, da por producto el primero. Es la raíz cuadrada del numerador dividida por la del denominador.

La raíz cuadrada de un quebrado es siempre mayor que el quebrado mismo.

277. Raíz cuadrada aproximada.—Llámase *raíz cuadrada aproximada en menos de una unidad* de un número, el mayor número entero cuyo cuadrado está contenido en el número dado.

Así, la raíz cuadrada de 70 en menos de una unidad de aproximación es 8, ya que el cuadrado de 8 es 64, mayor cuadrado perfecto contenido en 70.

Llámase *raíz cuadrada aproximada en menos de* 0,1, 0,01, 0,001 *por defecto*, el mayor número decimal

de 1,2,3 cifras decimales, cuyo cuadrado está contenido en el número dado.

Por ejemplo, la raíz cuadrada aproximada por defecto en menos de 0,01 de 0,0135 es 0,11, pues el cuadrado de 0,11 es 0,0121, mayor número decimal cuadrado contenido en 0,0135, porque el cuadrado de 0,12 es 0,0144, número mayor que 0,0135.

278. Residuo.—Llámase *residuo* de la raíz cuadrada de un número, el exceso del número sobre el cuadrado de su raíz cuadrada aproximada.

En el ejemplo anterior, el residuo es

$$0,0135 - 0,11^2 = 0,0135 - 0,0121 = 0,0014.$$

Por lo tanto el número es igual al cuadrado de su raíz cuadrada, más el residuo.

No hay residuo cuando el número es cuadrado perfecto.

279. TEOREMA.—El cuadrado de la suma de dos números se compone: 1º del cuadrado del primero; 2º del doble producto del primero por el segundo; 3º del cuadrado del segundo.

Hágase el cuadrado de $4 + 3$.

$$\text{Tendremos: } (4 + 3)^2 = (4 + 3)(4 + 3)$$

Ejecutando el producto indicado, resulta:

$$(4 + 3)^2 = 4^2 + 2(4 + 3) + 3^2 \quad (65)$$

280. COROLARIO.—Si un número consta de decenas y unidades, su cuadrado se compone: 1º del cuadrado de las decenas; 2º del doble producto de las decenas por las unidades; 3º del cuadrado de las unidades.

Sea el número 26; tendremos:

$$26^2 = (20 + 6)^2 = 20^2 + 2(20 \times 6) + 6^2$$

Para *generalizar* llamando d a las decenas, u a las unidades de un número N , se tendrá:

$$N^2 = (d + u)^2 = d^2 + 2du + u^2$$

281. TEOREMA.—La diferencia de los cuadrados de dos números consecutivos es igual al duplo del menor, más 1.

En efecto,

$$(18 + 1)^2 - 18^2 = [18^2 + 2(18 \times 1) + 1^2] - 18^2 = 2 \times 18 + 1$$

En general, siendo N y $N + 1$ dos números consecutivos,

$$(N + 1)^2 - N^2 = 2N + 1$$

Este teorema puede también expresarse como sigue: Si se aumenta 1 a un número, el cuadrado de él se aumenta del duplo de dicho número más 1 .

282. COROLARIO.—Cuando se conoce el cuadrado de un número entero cualquiera, se puede encontrar inmediatamente el cuadrado del número que le precede y del que le sigue.

Así, ya que el cuadrado de 20 es 400 ,
el de 21 será, $400 + (2 \times 20 + 1) = 400 + 41 = 441$
el de 19 será, $400 - (2 \times 19 + 1) = 400 - 39 = 361$

283. TEOREMA.—Para que un número sea cuadrado perfecto, es menester y suficiente que los exponentes de sus factores primos sean pares.

1º Esta condición es necesaria

Sea: $A = 2^3 \times 5^7$

Cuadrando ambos miembros, tendremos:

$$A^2 = 2^{3 \times 2} \times 5^{7 \times 2} = 2^6 \times 5^{14}.$$

Luego, los exponentes de los factores primos del cuadrado de A son pares.

2º Esta condición es suficiente.

Pues, si se la supone cumplida, como en

$$A = 2^6 \times 5^6$$

este número puede transformarse en dos productos iguales:

$$(2^3 \times 5^3) \times (2^3 \times 5^3)$$

y cada uno de ellos será la raíz cuadrada de A .

Luego los exponentes pares indican cuadrados perfectos.

284. COROLARIO.—Un número, cuadrado perfecto, es un producto de factores cuadrados perfectos.

285. TEOREMA.—Un número que remata en $2, 3, 7$ u 8 no puede ser cuadrado perfecto.

En efecto, el cuadrado de un número cualquiera remata siempre como el cuadrado del guarismo de sus unidades (280). Pero los cuadrados de los nueve primeros números rematan en $1, 4, 9, 6, 5$; y si el número remata en cero, su cuadrado rematará también en cero; por tanto, un número que remata en $2, 3, 7$ u 8 no puede ser cuadrado perfecto.

286. COROLARIO.—Un número que remata en ceros no puede ser cuadrado perfecto a no ser que el número de ceros sea par.

En efecto, como los números que rematan en ceros son los únicos cuyos cuadrados rematan también en ceros (285), si consideramos los números 360 y 700 , tendremos:

$$360^2 = (36 \times 10)^2 = 36^2 \times 10^2 = 36^2 \times 100$$

$$700^2 = (7 \times 100)^2 = 7^2 \times 100^2 = 7^2 \times 10\,000$$

y cada uno de estos cuadrados tiene un número de ceros doble que el número propuesto.

§ II.—Práctica de la extracción de la raíz cuadrada.

287. Los números enteros son o no cuadrados perfectos; en el primer caso la raíz cuadrada es *exacta*, y *aproximada* en el segundo.

Así, la raíz cuadrada de 16 es 4 , la de 64 es 8 .

Pero 40 tiene por raíz cuadrada 6 y 7 , con una unidad de aproximación; la primera por defecto, y la segunda por exceso. Lo que se representa como sigue:

$$36 < 40 < 49 \\ 6 < \sqrt{40} < 7$$

288. Extraer la raíz cuadrada de un número que no es cuadrado perfecto, con aproximación de una unidad, es buscar la raíz del mayor cuadrado contenido en el número propuesto.

289. Raíz cuadrada de un número de dos cifras, con aproximación de una unidad.—La raíz cuadrada, con aproximación de una unidad, de un número de dos cifras, esto es de un número menor que 100, es menor que 10, ya que el cuadrado de 10 es 100. Luego tiene sólo una cifra.

290. REGLA.—Para extraer la raíz cuadrada, con aproximación de una unidad, de un número menor que 100, se busca en la tabla de los cuadrados de los números menores que 10, el mayor cuadrado contenido en el número dado.

La raíz cuadrada de este cuadrado es la raíz buscada, y el residuo es el exceso del número dado sobre este cuadrado.

Ejemplo.—Extraer la raíz cuadrada de 53.

Desde luego se ve que 53 está comprendido entre 49 y 64.

$$49 < 53 < 64$$

Por lo tanto $7 < \sqrt{53} < 8$

Los números 7 y 8 son la raíz cuadrada de 57 (287) pero 7 sólo corresponde a la definición dada (288).

291. Raíz cuadrada, con una unidad de aproximación, de un número entero mayor que 100.—Sea el número 7358.

Estando este número comprendido entre 100 y 10000, su raíz cuadrada lo estará entre 10 y 100; por lo tanto constará de decenas y de unidades. Ahora bien, siendo el cuadrado de las decenas un número exacto de centenas, no puede encontrarse sino en las 73 centenas del número propuesto; luego la raíz cuadrada, con una unidad de aproximación, de este número de centenas, será la cifra de las decenas de la raíz buscada.

En efecto, tenemos: $8^2 < 73 < 9^2$.

Pero los dos últimos números, difieren evidentemente, por lo menos, de una unidad; multiplicando por 100, tendremos:

$$8^2 \times 100 < 7300 < 9^2 \times 100.$$

Así, los dos últimos números diferirán, a lo menos, de una centena; luego se pueden añadir 58 unidades al menor, sin alterar las desigualdades, y tendremos:

$$8^2 \times 10^2 < 7358 < 9^2 \times 10^2$$

$$8 \times 10 < \sqrt{7358} < 9 \times 10.$$

Por lo tanto, la raíz cuadrada de 7358 está comprendida entre 8 decenas y 9 decenas, y 8 es la cifra de las decenas.

El cuadrado de un número que consta de decenas y de unidades componiéndose del cuadrado de las decenas, del doble producto de las decenas por las unidades, más el cuadrado de las unidades, podemos escribir:

$$7358 = d^2 + 2du + u^2$$

más el residuo, si lo hay.

Disposición de la operación

73.58	85	
64	165	$2d + u$
958	5	u
825		
	$825 = 2du + u^2$	
133		

Si de este cuadro se resta d^2 o 64 centenas, el residuo 958 contendrá todavía el doble producto de las decenas por las unidades, más el cuadrado de las unidades, esto es, $2du + u^2$ o $u(2d + u)$, más el residuo de la operación, si lo hay. Luego, al dividir 958 por $2d$, esto es, por el duplo de las decenas, resultará la cifra de las unidades, o una cifra mayor, porque al dividir sólo por $2d$ cuando el divisor real es $(2d + u)$, puede resultar demasiado grande el cociente. Ahora

bien, el doble producto de las decenas por las unidades proporciona decenas; dividiendo las 95 decenas del residuo por 2×8 o 16, resulta 5 por cociente. Se prueba esta cifra, ora haciendo el cuadrado de 85 para cerciorarse de que se lo puede restar de 7358, ora formando las dos partes indicadas $2du + u^2$; si esta suma puede restarse de 958, la cifra 5 es la cifra de las unidades, lo que ocurre en el presente caso.

292. REGLA.—Para extraer, en menos de una unidad, la raíz cuadrada de un número entero mayor que 100, se lo divide en períodos de dos cifras, de derecha a izquierda; el último período puede constar de sólo una cifra.

La raíz cuadrada del primer período de la izquierda da la primera cifra de la raíz que se escribe en la galera; se cuadra esta cifra y se resta su cuadrado del primer período; la diferencia da el primer residuo parcial.

A la derecha de este residuo, si lo hay, se escribe el período siguiente y se separa con un punto la primera cifra de la derecha; se divide la parte de la izquierda por el duplo de la cifra escrita en la raíz: el cociente es la cifra de la raíz o una cifra demasiado grande. Para probarla, se la escribe en la raíz y también a la derecha del duplo de la raíz hallada; se multiplica el número así formado por la cifra que se ha de probar. Si el producto puede restarse del número formado por el primer residuo parcial y el segundo período, la cifra probada es exacta; en caso contrario se le disminuye una unidad, hasta que pueda efectuarse la resta; así resulta el segundo residuo parcial.

A la derecha de este residuo se escribe el período siguiente, y se repiten las mismas operaciones, hasta que se hayan escrito todos los períodos del número propuesto y que esté concluida la operación.

El resultado de la última resta da el residuo.

Ejemplo.—Extraíase la raíz cuadrada de 453 458.

Dividamos el número en períodos de dos cifras, empezando por la derecha. La raíz cuadrada de 45 es 6, cuyo cuadrado es 36. Restando 36 de 45 resulta 9; escribamos al lado de este primer residuo el período siguiente 34.

Disposición de la operación

45 34.58	673	
36	127	1343
93.4	7	3
88 9	889	4029
455.8	402.9	
52 9		

En el número 934, separemos por un punto la última cifra 4. Formemos el duplo de la cifra 6 y dividamos 93 por 12. Después de haber escrito el cociente 7 en la raíz y a la derecha de 12, multipliquemos 127 por 7. Como al restar de 934 el producto 889, resulta 45, se infiere que 7 es la segunda cifra de la raíz.

A la derecha de 45 escribamos el período siguiente 58, separemos la última cifra 8 y dividamos 455 por el duplo de 67 que es 134; el cociente es 3. Escribamos este cociente a la derecha de 67 y de 134. Multipliquemos 1343 por 3, y restemos el producto 4029 de 4558. El residuo 529 indica que 3 es la tercera cifra de la raíz.

Por consiguiente, la raíz cuadrada de 453 458, con aproximación de una unidad, es 673, y el residuo 529.

Como comprobación, se puede verificar que

$$453\ 458 = 673^2 + 529$$

673
673
2019
4711
4038
452929 = 673 ²
529 residuo
453458 número dado

293. Procedimiento abreviado para la extracción de la raíz cuadrada.—Cuando se ha hallado más de la mitad de las cifras de la raíz cuadrada de un número, se pueden encontrar las demás, dividiendo el residuo por el duplo del número formado por la parte hallada, seguida de tantos ceros como cifras queden por determinar.

Ejemplo.—Extraer la raíz cuadrada de 2 135 578 946.

Método ordinario		Método por división	
21.35.57.89.46	46 212	21.35.57.69.46	46 2
53.5	86	53.5	86
195.7	92 2	195.7	92 2
1138.9	92 41 <i>residuo</i>	1136946	92 400 <i>divisor</i>
21484.6	924 22	212946	12
3000.2		28146	

En ambos casos la raíz es 46 212.

294. Notas.—I. En la práctica se simplifica la escritura, efectuando las restas sin escribir los sustraendos, como en la operación adjunta.

45.34.58	673		
93.4	127	1343	
4 55 8	7	3	
<i>Residuo</i> 52 9	889	4029	

II. Para obtener, en el curso de la operación, el duplo de la cantidad ya escrita en la raíz, basta agregar la cifra que se acaba de encontrar, al número por el cual se la ha multiplicado para probarla.

Así, en el ejemplo precedente se puede obtener el duplo de 67 agregando 7 a 127.

III. Si una de las divisiones indicadas diese cero por cociente, se escribiría el cero en la raíz y en el duplo de ella, y se bajaría el período siguiente.

IV. El residuo de la raíz cuadrada de un número entero es siempre menor que el duplo de la raíz cuadrada entera más 1. (281)

295. RAÍZ CUADRADA DE UN NÚMERO DECIMAL, CON APROXIMACION DE UNA UNIDAD.—Para extraer la raíz cuadrada de un número decimal, con aproximación de una unidad, se extrae la raíz cuadrada de la parte entera con aproximación de una unidad.

Se encuentra el residuo, escribiendo la parte decimal del número a la derecha del residuo de la raíz de la parte entera.

Ejemplo.—Cálculase, con aproximación de una unidad, la raíz cuadrada de 258,126.

Basta extraer la raíz cuadrada de 258:

258,126	16		
15.8	27	26	
2,126	7	6	
	189	156	

Para encontrar la segunda cifra de la raíz, hemos probado el 7, y hemos visto que es demasiado grande.

La raíz cuadrada es 16, y el residuo 2,126.

296. Raíz cuadrada de cualquier número, en menos de 0,1, 0,01, 0,001, etc.—Nos contentaremos con dar la regla práctica, y unos ejemplos de aplicación.

REGLA.—Para extraer la raíz cuadrada de un número (entero o decimal) en menos de 0,1, 0,01, 0,001, etc. se le divide en períodos de dos cifras desde la coma a derecha y a izquierda. El último período de la izquierda puede constar de sólo una cifra.

A la derecha de la coma se toman tantos períodos de dos cifras, cuantas cifras decimales se quiera en la raíz, añadiendo uno o varios ceros si faltaren cifras decimales.

Se extrae la raíz cuadrada del número que resulta, como si fuese entero, cuidando de separar con una coma, de la derecha de la raíz obtenida, la mitad del número de decimales que tenga el número dado, o poniendo la coma en la raíz cuando se baja el primer período decimal.

1er Ejemplo.—Extraer la raíz cuadrada de 2, en menos de 0,001.

Para que se puedan separar tres períodos a la derecha de la coma, hay que añadir 6 ceros, y considerar el número 2,000 000.

2 00.00.00	1.414		
10.0	24	281	2 824
40.0	4	1	4
1190.0			
0,000 604	96	281	11 296

La raíz cuadrada es 1,414, y el residuo 0,000 604.

2º Ejemplo.—Extraer la raíz cuadrada de 465,8452, en menos de 0,01.

4.65,84.52	21,58		
6.5	41	425	4 308
248.4	1	5	8
3595.2			
0,1488	41	2125	34464

La raíz cuadrada es 21,58, y el residuo 0,1488.

3^{er} Ejemplo.—Extraer la raíz cuadrada de 0,305, en menos de 0,001.

0,305000	0,552	
55.0	105	1102
250.0	5	2
0,000296	525	2204

La raíz cuadrada es 0,552, y el residuo, 0,000296.

§ III.—Raíz cuadrada de un número cualquiera, con una aproximación dada.

297. Extraer la raíz cuadrada de 42 con $\frac{1}{5}$ de aproximación.

La raíz buscada ha de ser un quebrado cuyo denominador sea 5 y cuyo numerador sea un número con una unidad de aproximación.

Multipliquemos y dividamos 42 por 25, cuadrado del denominador de $\frac{1}{5}$; tendremos:

$$\frac{42 \times 25}{25} \text{ o } \frac{1050}{25}, \text{ expresión igual a 42.}$$

La raíz cuadrada de 1050 siendo 32 o 33, con una unidad de aproximación, la raíz cuadrada de $\frac{1050}{25}$

estará comprendida entre $\frac{32}{5}$ y $\frac{33}{5}$; por donde se ve

que estos dos valores difieren de la raíz, en menos de $\frac{1}{5}$.

El mismo raciocinio puede hacerse con cualquier aproximación indicada por un quebrado cuyo numerador sea 1.

Así, la raíz cuadrada de 24 con $\frac{1}{11}$ de aproximación, es:

$$\frac{\sqrt{24} \times 121}{11}, \text{ esto es, } \frac{53}{11} \text{ o } \frac{54}{11};$$

y la de 7, con $\frac{1}{4}$ de aproximación, es:

$$\sqrt{\frac{7 \times 16}{4}}, \text{ es decir } \frac{10}{4} \text{ u } \frac{11}{4}.$$

298. REGLA.—Para extraer la raíz cuadrada de un número cualquiera con $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{9}$, y en general $\frac{1}{n}$ de aproximación, se multi-

plica el número por el cuadrado del denominador de la aproximación, se extrae, con una unidad de aproximación, la raíz cuadrada de este producto, y a esta raíz se le da por denominador el denominador de la aproximación.

299. Nota.—Cuando el numerador de la aproximación es diferente de 1, se escribe esta aproximación en forma de quebrado que tenga 1 por numerador, y por denominador el quebrado de la aproximación, pero invertido; de este modo se vuelve al caso precedente.

Así, para encontrar la raíz cuadrada de 21, con $\frac{3}{7}$ de aproximación, se buscará la aproximación con $\frac{1}{7/3}$ ya que $\frac{3}{7} = \frac{1}{7/3}$.

Multiplico 21 por el cuadrado de $\frac{7}{3}$, y tengo $\frac{1029}{9}$ o 114,33.

La raíz cuadrada de 114,33 es 10 u 11, con una unidad de aproximación. Luego la raíz cuadrada pedida estará compren-

dida entre $\frac{10}{7/3}$ y $\frac{11}{7/3}$ esto es, entre $\frac{30}{7}$ y $\frac{33}{7}$; por donde se ve

que estos dos valores difieren de la verdadera raíz en menos

$$\text{de } \frac{3}{7}$$

Luego, para extraer la raíz cuadrada de un número con $\frac{m}{n}$ de a-

proximación, se multiplica el número por el cuadrado $\frac{n^2}{m^2}$ de la

aproximación invertida; se extrae, con una unidad de aproximación, la raíz cuadrada de la parte entera del número obtenido, y se multiplica esta raíz por el quebrado que denota la aproximación.

§ V.—Raíz cuadrada de los quebrados comunes.

300. REGLA GENERAL.—Para extraer la raíz cuadrada de un quebrado, se divide la raíz cuadrada del numerador por la raíz cuadrada del denominador (276).

La raíz cuadrada de los quebrados comunes presenta tres casos:

301. Caso I.—Ambos términos son cuadrados perfectos.

$$\text{Sea el quebrado } \frac{36}{49}$$

$$\text{Tendremos (276): } \sqrt{\frac{36}{49}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{49}} = \frac{6}{7}$$

302. Caso II.—Sólo el denominador es cuadrado perfecto.

$$\text{Sea el quebrado } \frac{51}{64}$$

En este caso, se suele extraer la raíz cuadrada del numerador, con una unidad de aproximación, y se la divide por la del denominador.

$$\text{Así, } \sqrt{\frac{51}{64}} = \frac{\sqrt{51}}{8} \approx \frac{7}{8}, \text{ en menos de } \frac{1}{8}$$

303. Caso III.—El denominador no es cuadrado perfecto.

$$\text{Sea el quebrado } \frac{23}{60}$$

Un procedimiento consiste en hacer el denominador cuadrado perfecto, multiplicando ambos términos por este denominador; luego se extrae la raíz cuadrada como en el caso precedente.

$$\text{Para } \sqrt{\frac{23}{60}}, \text{ resulta } \sqrt{\frac{23 \times 60}{60^2}} = \frac{\sqrt{1380}}{60} = \frac{37}{60}$$

$$\text{La raíz cuadrada de } \frac{23}{60} \text{ es } \frac{37}{60} \text{ en menos de } \frac{1}{60}$$

304. Nota.—En los dos últimos casos se puede también reducir a decimal el quebrado dado, y luego aplicar la regla conocida, y así resulta la raíz cuadrada con la aproximación que se quiere

$$\text{Así, el quebrado } \frac{15}{16} = 0,9375.$$

La raíz cuadrada de 0,9375 es 0,96 en menos de un centésimo.

EJERCICIOS ORALES

575. ¿A qué es igual la diferencia de los cuadrados de dos números enteros consecutivos?

576. Ya que el cuadrado de 25 es 625, dígame según esto: 1º cuál es el cuadrado de 24; 2º cuál es el cuadrado de 26.

577. ¿Cuáles son los cuadrados de los números siguientes: 19, 21, 29, 31, 99, 101?

578. ¿De qué se compone el cuadrado de un número formado de decenas y unidades?

579. ¿A qué es igual el cuadrado: 1º de una decena; 2º de un centésimo; 3º de un décimo; 4 de una centena?

580. ¿Pueden ser cuadrados los números terminados por, 2, 3, 7, 8? ¿Por qué?

581. ¿Puede ser cuadrado un número terminado por un número impar de ceros? ¿Por qué?

582. ¿Cuándo puede ser cuadrado un número que remata en 5? ¿Por qué?

583. ¿Cuántos números enteros de dos cifras son cuadrados perfectos?

584. ¿Cuántos números enteros de tres cifras son cuadrados perfectos?

585. ¿Cuál es el mayor valor que puede tener el residuo en la extracción de la raíz cuadrada de un número? ¿Por qué?

586. ¿A qué es igual la diferencia de los cuadrados de dos números que tienen entre sí dos unidades de diferencia? Ejemplos, 25 y 27.

587. ¿Cómo se extrae la raíz cuadrada de un quebrado?

588. ¿Cómo se extrae la raíz cuadrada de un quebrado cuando el denominador no es cuadrado?

PROBLEMAS

589. Hállese el cuadrado de las cantidades siguientes: 1º 346; 2º 5,25; 3º 0,38; 4º 0,015; 5º 5/12; 6º 34/7.

590. Hállese la raíz cuadrada de cada uno de los números siguientes: 1º 196; 2º 729; 3º 15876; 4º 283024; 5º 4460544.

591. ¿Cuál es la raíz cuadrada de cada uno de los números siguientes: 1º 2,0164; 2º 0,0361; 3º 16,5649; 4º 0,005929; 5º 0,416025?

592. Hállese la raíz cuadrada de cada uno de los valores siguientes:

$$1^\circ \frac{121}{144}; 2^\circ \frac{625}{1681}; 3^\circ \frac{3249}{131044}; 4^\circ \frac{225 \times 121}{64 \times 49}; 5^\circ \frac{250 \times 72 \times 80}{27 \times 507 \times 256}$$

593. ¿Cuál es, en menos de un décimo, la raíz cuadrada de cada una de las cantidades siguientes: 1º 345; 2º 45689; 3º

$$945,8, 4^\circ 12560,5; 5^\circ \frac{17424}{76}?$$

594. Cuál es, en menos de 0,01, la raíz cuadrada de cada una de las cantidades siguientes: 1º 496; 2º 52,743; 3º 7,25; 4º 811,394; 5º 0,036?

595. Extraer, en menos de 0,01, la raíz cuadrada de las cantidades siguientes: 1º 23,5; 2º 1,45327; 3º 0,323541; 4º 4/5; 5º 7/9.

596. Extraer, en menos de 0,0001, la raíz cuadrada de las cantidades siguientes: 1º 2; 2º 3; 3º 8; 4º 1/5; 5º 1/11.

597. Hállese, en menos de 1/2, la raíz cuadrada de los números siguientes: 1º 1899; 2º 3540; 3º 5050; 4º 7915; 5º 219492.

598. Hállese en menos de 1/5, la raíz cuadrada de las cantidades siguientes: 1º 48; 2º 325; 3º 834; 4º 0,524 5º 9/11.

599. Hállese, en menos de 2/3, la raíz cuadrada de los números siguientes: 1º 56; 2º 87; 3º 92; 4º 911; 5º 895.

600. ¿Cuáles son los dos números consecutivos que tienen por diferencia de sus cuadrados: 1º 49; 2º 85; 3º 439; 4º 723?

601. ¿Cuáles son los dos números pares consecutivos que tienen por diferencia de sus cuadrados: 1º 36; 2º 52; 3º 412; 4º 2084?

602. La suma de los cuadrados de dos números es 1625, y el mayor de ellos 40; ¿cuál es el menor?

603. Un jardín que mide 90 metros de longitud por 40 de latitud debe ser cambiado por otro de igual valor, y cuadrado; ¿qué dimensiones debe tener este último?

604. ¿Cuáles son las dimensiones de un rectángulo de 9408 metros cuadrados de superficie, si su longitud es el triple de la latitud?

605. Si se resta 12 de un número entero, resulta el mayor cuadrado que contiene este número; pero si se le añade 77, resulta el cuadrado inmediatamente superior al mismo número. ¿Cuál es éste?

606. Bonifacio quiere plantar árboles a igual distancia, en un terreno cuadrado. ¿Cuántos debe plantar en cada lado para que entren 15129?

607. El producto de dos números es 3645; uno de ellos es los $\frac{5}{9}$ del otro. ¿Cuáles son estos números?

608. La superficie de un rectángulo es de 405,60 metros cuadrados; uno de los lados del rectángulo es los $\frac{5}{12}$ del otro. ¿Cuáles son sus dimensiones?

609. Búsquese 1º un número que, aumentado de su cuadrado, dé 272; 2º un número que, al restarlo de su cuadrado, dé 600; 3º un número cuyo duplo y cuadrado den 195363.

610. Un campo cuadrado contiene 12544 pies de árboles plantados en cuadro a 4 metros uno de otro; pregúntase cuántas hileras van a dar a cada uno de los cuatro lados.

611. Se trata de murar un terreno cuadrado que tiene 3600 metros cuadrados de superficie; ¿cuál será la longitud de cada muro?

612. Se trata de cuadrar un terreno que mide 625 metros de longitud por 400 de ancho; pregúntase cuánto se debe disminuir a la longitud y aumentar al ancho para que el terreno tenga la misma superficie.

613. Un jovencito preguntaba a un labrador cuáles eran las dimensiones de su terreno. "Caballero, dijo el labrador, el largo excede al ancho en dos metros, y la superficie del terreno es de 20163 m²; busque Ud. lo que me pregunta".

614. Preguntado un profesor por el número de sus alumnos, contesta que el número de ellos es tal, que multiplicado $\frac{1}{3}$ del mismo, da 2523; ¿cuántos alumnos tiene?

615. ¿Cuánto importa el cercado de alambre de un potrero cuadrado de 36 áreas, a \$ 0,50 el medio decámetro?

616. ¿Cuál es el número que, multiplicado por su tercera parte, da 108?

617. La diferencia de los cuadrados de dos números consecutivos es 729457; ¿cuáles son estos números?

618. Un jardinero quiere plantar un cuadro de dalias; a este efecto pone los tubérculos a igual distancia unos de otros, tanto a lo largo como a lo ancho; la 1ª vez, le faltan 15; la 2ª pone 1 menos en todo sentido, y entonces le sobran 34; ¿cuántos tubérculos tenía?

619. Un general quiere formar, con 1152 hombres, un cuadro de centro vacío que pueda contener 42 hombres en cada lado; ¿cuántos hombres hay en la columna exterior, y cuántas son las columnas?

620. Un labrador, nada versado en matemáticas, debe hacer una plantación de café en un campo de forma cuadrada; después de concluida su tarea, nota que le sobran 132 pies, y se pone a plantar uno más en cada hilera, y entonces le

faltan 29 pies para completar el cuadrado; pregúntase: 1º cuántos fueron los pies de café; 2º cuántos entraron en cada fila la 1ª y la 2ª vez.

CAPITULO II

CUBO Y RAIZ CUBICA

§ I.—Definiciones y teoremas.

305. Cubo.—Llámase *cubo* de un número el producto de tres factores iguales a dicho número.

Así, 216 es el *cubo* de 6, pues $216=6 \times 6 \times 6$.

El *cubo* de un número se representa escribiendo una sola vez este número, dándole por exponente el número 3.

Así, 6³ es el *cubo* de 6; 0,01³ es el *cubo* de 0,01.

Cubo de un quebrado es el producto de tres factores iguales a este quebrado.

Así, el *cubo* de $\frac{2}{3}$ es $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$; de donde se ve

que el *cubo de un quebrado es igual al cubo del numerador dividido por el del denominador.*

306. Cubo de los 10 primeros números.

Números	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cubos:	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

307. Raíz cúbica.—*Raíz cúbica* de un número es otro número que, elevado al cubo, da el primero.

La raíz cúbica de 216 es 6, pues $6 \times 6 \times 6 = 216$.

Raíz cúbica de un quebrado es otro quebrado que, elevado al cubo, reproduce el primero. Es la *raíz cúbica del numerador* dividida por la *del denominador.*

La raíz cúbica se indica con el signo $\sqrt[3]{\quad}$, llamado

radical de tercer grado; el 3, puesto en la abertura del radical, es el índice de la raíz.

Así, $\sqrt[3]{64}$ indica que se debe extraer la raíz cúbica de 64.

Por definición, el cubo de $\sqrt[3]{2}$ es 2; el de $\sqrt[3]{25}$ es 25. Por donde se ve que para obtener el cubo de un número que está bajo un radical de tercer grado, basta suprimir el radical.

308. Raíz cúbica exacta.—Dícese que un número es *cubo perfecto*, cuando es el cubo de otro número

Por ejemplo, 64 es cubo perfecto, pues es el cubo de 4.

Por lo tanto, *extraer la raíz cúbica de un número cubo perfecto, es hallar el número del cual es el cubo.*

309. Raíz cúbica aproximada.—Llámase raíz cúbica con una unidad de aproximación por defecto de un número, el mayor número entero cuyo cubo está contenido en el número dado.

Así, la raíz cúbica, con una unidad de aproximación, de 242, es 6, pues el cubo de 6 que es 216 (306) está contenido en 242, y el cubo de 7, que es 343, es mayor que 242; luego 6 es el mayor número entero cuyo cubo está contenido en 242.

Llámase *raíz cúbica con 0,1 0,01, 0,001 de aproximación por defecto* de un número, el mayor número decimal de 1, 2, 3 cifras decimales, cuyo cubo está contenido en el número dado.

Por ejemplo, la raíz cúbica por defecto, con 0,1 de aproximación, de 0,5, es 0,7, ya que el cubo de 0,7 es 0,343, mayor cubo contenido en 0,5.

310. Residuo.—Llámase *residuo* de la raíz cúbica de un número, el exceso de este número sobre el cubo de su raíz cúbica aproximada.

Así, en el ejemplo precedente, el *residuo* es

$$0,5 - 0,7^3 = 0,5 - 0,343 = 0,157.$$

311. TEOREMA.—El cubo de la suma de dos números se compone:

1º del cubo del primero; 2º del triple producto del cuadrado del primero por el segundo; 3º del triple producto del primero por el cuadrado del segundo; 4º del cubo del segundo.

Hágase el cubo de $4+3$.

Se forma el cubo de una suma, multiplicando su cuadrado por esta misma suma.

Para el cuadrado, tenemos (279):

$$4^2 + 2(4 \times 3) + 3^2$$

Luego, basta multiplicar este resultado por $4+3$.

$$\begin{array}{r} 4^2 + 2(4 \times 3) + 3^2 \\ 4 + 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4^3 + 2(4^2 \times 3) + 4 \times 3^2 \\ 4^2 \times 3 + 2(4 \times 3^2) + 3^3 \end{array}$$

$$(4+3)^3 = 4^3 + 3(4^2 \times 3) + 3(4 \times 3^2) + 3^3$$

312. COROLARIO.—El cubo de todo número que consta de decenas y unidades, se compone: 1º del cubo de las decenas; 2º del triple producto del cuadrado de las decenas por las unidades; 3º del triple producto de las decenas por el cuadrado de las unidades; 4º del cubo de las unidades.

Llamando N el número, d las decenas, u las unidades, tendremos

$$N^3 = (d+u)^3 = d^3 + 3d^2u + 3du^2 + u^3.$$

313. TEOREMA.—La diferencia de los cubos de dos números enteros consecutivos es igual al triple del cuadrado del menor, más el triple de este número, más 1.

Pues tenemos:

$$\begin{aligned} (18+1)^3 - 18^3 &= (18^3 + 3 \cdot 18^2 + 3 \cdot 18 + 1) - 18^3 \\ (18+1)^3 - 18^3 &= 3 \cdot 18^2 + 3 \cdot 18 + 1 \end{aligned}$$

Para generalizar, llamemos N y $N+1$ dos números consecutivos; tendremos:

$$(N+1)^3 - N^3 = (N^3 + 3N^2 + 3N + 1) - N^3 = 3N^2 + 3N + 1.$$

314. Los números enteros son o no cubos perfectos;

en el primer caso, la raíz cúbica es *exacta y aproximada* en el segundo.

Así, la raíz cúbica de 343 es 7, la de 729 es 9; pero la de 420 es 7 y 8, con una *unidad de aproximación*, la primera por defecto, y la segunda por exceso, pues

$$343 < 420 < 524 \\ 7 < \sqrt[3]{420} < 8$$

Extraer la raíz cúbica con aproximación de una unidad, de un número que no es cubo perfecto, es buscar la raíz cúbica del mayor cubo contenido en el número propuesto.

§ II. Práctica de la raíz cúbica.

315. Raíz cúbica, con una unidad de aproximación, de un número menor que 1000.—La raíz cúbica de un número menor que 1000, esto es, de un número de tres o menos de tres cifras, es menor que 10, ya que el cubo de 10 es 1000. Luego esta raíz consta de sólo una cifra.

REGLA.—Para obtener la raíz cúbica de un número menor que 1000, se busca en la tabla (306) el mayor cubo contenido en el número dado. La raíz cúbica de este cubo será la raíz pedida, con una unidad de aproximación.

Así, la raíz cúbica de 612 es 8, pues 512, cubo de 8, es el mayor cubo contenido en 612.

El residuo es $612 - 512 = 100$.

316. Raíz cúbica, con una unidad de aproximación, de un número mayor que 1000.—Nos contentaremos con dar la regla para efectuar la operación, y varios ejemplos de aplicación.

REGLA.—Para extraer la raíz cúbica, con una unidad de aproximación, de un número entero mayor que 1000, se divide este número en períodos de a tres cifras, empezando por la derecha; el último período de la izquierda puede tener sólo una o dos cifras.

Se extrae la raíz cúbica del primer período de la izquierda para obtener la primera cifra de la raíz. Se resta del primer período el cubo de esta cifra, y resulta el primer residuo parcial.

A la derecha de este residuo se escribe el segundo período y se separan con un punto las dos primeras cifras de la derecha. Se divi-

de el número que queda a la izquierda por el triple cuadrado de la cifra ya escrita en la raíz. El cociente es la segunda cifra de la raíz o una cifra mayor. Para probarla se eleva al cubo el número formado por las dos primeras cifras de la raíz; si el producto puede restarse del número formado por los dos primeros períodos, la segunda cifra de la raíz es exacta; cuando no, se disminuye una unidad a esta cifra, y se prueba del mismo modo hasta que pueda efectuarse la sustracción. Así resulta el segundo residuo parcial.

A la derecha de este residuo se escribe el tercer período, se separan las dos primeras cifras de la derecha, y se divide el número que queda a la izquierda por el triple del cuadrado del número formado por las dos primeras cifras de la raíz. Así resulta la tercera cifra de la raíz o una cifra mayor; se la prueba como la precedente. Se continúa hasta haber escrito todos los períodos del número propuesto; hecho lo cual queda acabada la operación.

1º Ejemplo.—Extraíase la raíz cúbica de 177 697 529 con una unidad de aproximación.

Disposición de la operación

	1 77.6 97.5 29	562 raíz cúbica
	1 25	5³.3 = 75 1º divisor
1º residuo	52 6.97	56³.3 = 9408 2º divisor
	56³ = 1.75 6 16	
2º residuo	2 0 815.29	
	562³ = 1 77 5 043 28	
Residuo	1 932 01	

Dividido el número en períodos de a tres cifras, empezando por la derecha. La raíz cúbica del primer período, 177, es 5. De 177 resto $5^3=125$, lo que da 52 por residuo parcial. Escribo el período siguiente, 697, y separo dos cifras por la derecha. Divido la parte de la izquierda 526, por $5^2.3=75$. El cociente es 6. Elevo 56 al cubo para probar el 6; $56^3=175 616$, número que puede restarse de 177 697: luego 6 es la segunda cifra de la raíz. El segundo residuo es 2081; escribo a la derecha el período 529 y separo las dos primeras cifras de la derecha. Divido 20 815 por $56^2.3=9 408$, triple cuadrado de la raíz. El cociente es 2. Elevo 562 al cubo; $562^3=177 504 328$, número menor que 177 697 529. Luego 2 es la tercera cifra de la raíz.

La raíz cúbica es 562, y el residuo 193 201.

2º Ejemplo.— Extráigase la raíz cúbica de 130 745 640 724, con una unidad de aproximación.

130.7 45.6 40.7 24	5075
125	
5 7.45 6 40	$5^3 = 75$
$507^3 = 130\ 3\ 23\ 8\ 43$	$50^3 = 7500$
4 21 7 97 7 24	$507^3 = 771147$
$5075^3 = 130\ 7\ 09\ 7\ 96\ 8\ 75$	
35 8 43 8 49	

En el cálculo de la segunda cifra se ve que $50^3 = 7500$ no está contenido en 57; se escribe un cero en la raíz y se baja el período siguiente. Se divide 57436 por $50^3 = 7500$; el cociente es 7, etc.

La raíz cúbica es 5 075, y el residuo, 35 843 849.

317. Raíz cúbica de un número decimal, con una unidad de aproximación.—Para extraer, con una unidad de aproximación, la raíz cúbica de un número decimal, se extrae la raíz cúbica de la parte entera, con una unidad de aproximación.

Se obtiene el residuo agregando la parte decimal al residuo de la parte entera.

Ejemplo.—Extraer, con una unidad de aproximación, la raíz cúbica de 15 825,37.

Extraigamos la raíz cúbica de la parte entera

15 8 25,37	25
8	$2^3 = 12$
7 8 25	
$25^3 = 15\ 6\ 25$	
2 00,37	

La raíz es 25, y el residuo, 200,37.

318. Raíz cúbica de cualquier número, en menos de 0,1 0,01, 0,001, etc.—Nos contentaremos con dar la regla que se ha de seguir, y varios ejemplos de aplicación.

REGLA.—Para extraer la raíz cúbica de un número (entero o decimal) en menos de 0,1, 0,01, 0,001, etc. se lo divide en períodos de a tres cifras desde la coma a derecha y a izquierda. El último período de la izquierda puede constar de sólo una o dos cifras.

A la derecha de la coma se toman tantos períodos de a tres cifras como cifras decimales se quiera en la raíz, añadiendo uno o varios ceros si faltaren cifras decimales.

Se extrae la raíz cúbica del número que resulta como si fuere entero, cuidando de poner una coma en la raíz cuando se baja el primer período decimal.

El residuo es la última diferencia, en la cual se separan por la derecha tantas cifras decimales como hay en el número.

1º Ejemplo.—Extráigase la raíz cúbica de 26 en menos de 0,1.

26,000	2,9
8	$2^3 = 12$
18 000	
$29^3 = 24\ 389$	
1,611	

La raíz cúbica es 2,9, y el residuo, 1,611.

2º Ejemplo.—Extráigase la raíz cúbica de 7,015, en menos de 0,01.

7,015 000	1,91
1	$1^3 = 3$
60,15	$19^3 = 1\ 083$
$19^3 = 68\ 59$	
1 560,00	
$191^3 = 6\ 9678\ 71$	
0,047 121	

La raíz cúbica es 1,91, y el residuo, 0,047 121.

3º Ejemplo.—Extráigase la raíz cúbica de 0,000 12492, en menos de 0,001.

0,000.124.920	0,049
64	$4^3 = 48$
609,20	
$49^3 = 1176\ 49$	
0,000 0072 71	

La raíz cúbica es 0,049, y el residuo, 0,000 007271.

319. **NOTA.**—De lo que antecede se infiere que la raíz cúbica de un número tiene tantos guarismos cuantos períodos de tres cifras contenga dicho número, pudiendo el último período tener sólo una o dos cifras.

320. **Prueba.**—Para comprobar la raíz obtenida, se la eleva al cubo, al producto se le agrega el residuo, y debe resultar el número propuesto.

§ III.—Raíz cúbica de los quebrados comunes.

Ocurren tres casos en la raíz cúbica de los quebrados comunes:

321. **Caso I.**—Ambos términos son cubos perfectos.

REGLA.—Para extraer la raíz cúbica de un quebrado cuando sus dos términos son cubos perfectos, basta extraer separadamente la raíz cúbica de cada uno de ellos (307).

$$\text{Así, } \sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{\sqrt[3]{3^3}}{\sqrt[3]{4^3}} = \frac{3}{4}$$

322. **Caso II.**—Sólo el denominador es cubo perfecto.

REGLA.—Para extraer la raíz cúbica de un quebrado cuando sólo el denominador es cubo perfecto, se extrae la raíz cúbica del numerador, con la aproximación que se quiera, y se divide el resultado por la raíz cúbica del denominador.

$$\text{Ejemplo: } \sqrt[3]{\frac{13}{64}} = \frac{\sqrt[3]{13}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{\sqrt[3]{13}}{4} = \frac{3,666}{4}$$

323. **Caso III.**—El denominador no es cubo perfecto.

REGLA.—Para extraer la raíz cúbica de un quebrado cuando el denominador no es cubo perfecto, se extrae la raíz cúbica del producto del numerador, por el cuadrado del denominador, y se divide el resultado por el denominador.

Sea el quebrado $\frac{3}{5}$. Multipliquemos ambos términos por 5 para hacer el denominador cubo perfecto:

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 5^2}{5 \times 5^2} = \frac{3 \times 5^2}{5^3}$$

Extrayendo la raíz cúbica de ambos miembros, resulta:

$$\sqrt[3]{\frac{3}{5}} = \frac{\sqrt[3]{3 \times 5^2}}{5} \quad (\text{Caso II})$$

324. **RAÍZ CÚBICA DE UN NÚMERO MIXTO.**—Para extraer la raíz cúbica de un número mixto, se lo reduce a quebrado impropio, y se extrae su raíz como la de los quebrados comunes.

Sea el número mixto $15 \frac{3}{7}$. Tenemos:

$$15 \frac{3}{7} = \frac{3}{7} + \frac{108}{7} = \frac{108 \times 7^2}{7^3}$$

$$\text{de donde } \sqrt[3]{15 \frac{3}{7}} = \frac{\sqrt[3]{3 \times 108 \times 7^2}}{7} \quad (323)$$

EJERCICIOS ORALES

621. ¿A qué es igual la diferencia de los cubos de dos números consecutivos?
622. ¿Cómo se reconoce que un número dado es la diferencia de los cubos de dos números enteros consecutivos? Búsquense estos números, y hágase la aplicación con 751 501.
623. ¿Cuándo puede ser cubo un número que remata en ceros?
624. ¿Se puede conocer si un número es o no cubo perfecto, por la última cifra de la derecha?

PROBLEMAS

625. ¿Cuáles son los cubos de las cantidades siguientes: 1° 19; 2° 138; 3° 1,50; 4° 0,185; 5° 2/7; 6° 11/17
626. ¿Cuál es la raíz cúbica de cada uno de los números siguientes: 1° 1 331; 2° 3 375; 3° 12 167; 4° 32 768; 5° 110 592?
627. ¿Cuál es la raíz cúbica de cada uno de los números siguientes:

1° 1 367 631; 2° 9 938 375; 3° 41 781 923; 4° 96 071 912;
5° 184 220 009; 6° 300 763 000; 7° 476 379 541; 8° 709 732 288;
9° 736 314 327; 10° 977 002 999?

628. Extraer la raíz cúbica de las fracciones decimales siguientes, con aproximación de 0,01:

1° 0,0046; 2° 0,10904; 3° 0,002; 4° 0,304376.

629. ¿Cuál es la raíz cúbica de los quebrados siguientes:

1° $\frac{1331}{357911}$; 2° $\frac{17576}{373248}$; 3° $\frac{103823}{23149135}$?

630. Búsquese la raíz cúbica de los quebrados siguientes, haciendo que el denominador sea cubo perfecto:

1° $\frac{17}{21}$; 2° $\frac{1248}{2800}$; 3° $\frac{84}{12648}$.

631. ¿Cuál es el número cuya raíz cúbica disminuída de 3 da 24?

632. ¿Cuál es el número cuya mitad, tercera y cuarta parte multiplicadas entre sí, dan 9 por producto?

633. Encuéntrase el número cuya tercera parte, multiplicada por el cuadrado del mismo, dé por producto 1944.

634. Con \$ 164,64 he comprado cajas de sardinas en cierto número de cajones, cada uno de los cuales contiene un número de cajas triples del de los cajones; cada caja de sardinas importa un número de centavos doble del de los cajones; ¿cuántas son las cajas de sardinas y los cajones en que están guardadas?

635. Búsquese 1° un número cuyo cubo y cuadrado den 252; 2° un número cuyo cubo menos su cuadrado dé 448; 3° un número cuyo cubo, triple cuadrado y tripo den 39303.

Parte III



SISTEMA METRICO DECIMAL

Nota histórica

Antes de la creación del sistema métrico decimal, existía en las diferentes naciones, y a veces en las varias provincias de un mismo país, un gran número de medidas que se diferenciaban ya por el valor de la unidad principal, ya por la ley en virtud de la cual se forman los múltiplos y submúltiplos de cada una de las unidades principales. La falta de uniformidad dificultaba las transacciones comerciales, y los cálculos resultaban largos y muy complicados.

Para acabar con estas dificultades, Francia decidió la creación de un sistema métrico que tuviera una base fundamental como unidad de longitud, que siguiera la ley decimal y tuviese relación directa con las dimensiones del globo terrestre.

Con tal motivo, en 1792, la Academia de Ciencias designó a Mechain y a Delambre para que midiesen el arco del meridiano comprendido entre Dunkerque, ciudad de Francia, y Barcelona, ciudad de España, que es la cuarta parte de la distancia del polo norte al Ecuador.

Los dos astrónomos calcularon la distancia que media entre Lieusaint y Melun, ciudades vecinas de París, y la hallaron igual a 6075,98 toesas¹, y por el cálculo encontraron 551583 toesas para la distancia de Dunkerque a Barcelona.

Habiendo determinado la latitud de estas dos ciudades, la diferencia dio el valor del arco cuya longitud acababan de medir; con estos datos, calcularon la longitud de la cuarta parte del meridiano, la cual resultó igual a 5130740 toesas. La

(1) La toesa, medida francesa, se dividía en 6 pies, el pie en 12 pulgadas, y la pulgada en 12 líneas.

diezmillonésima parte de esta longitud, esto es, 0 toesas 3 pies 0 pulgadas 11 líneas, y 295 milésimas de línea fue adoptada para unidad de las medidas de longitud. En seguida se formó una regla de platino de la extensión de una de estas partes, y a dicha regla dieron el nombre de *metro*, del griego *metrón*, que quiere decir medida.

Mediciones más recientes han demostrado que la longitud de un cuadrante de meridiano terrestre es de 10 002 208 de metros actuales. Por eso debemos decir que el metro es *aproximadamente* la diezmillonésima parte de un cuadrante de meridiano terrestre.

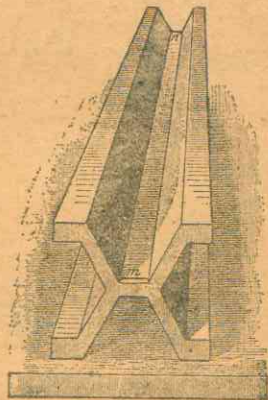
Para determinar la unidad de las medidas de peso, se labró un cilindro de latón cuyo volumen se calculó con precisión; se pesó este cilindro en el aire; se añadió a su peso el del aire desalojado para obtener su peso en el vacío; en seguida se lo pesó en agua destilada, y la diferencia de los dos resultados dió el peso de igual volumen de agua. Dividiendo este peso por el volumen del cilindro que se halló igual a 11 dm³ 290, resultó el peso de un centímetro cúbico de agua destilada, al cual dieron el nombre de gramo.

Una regla de platino (patrón original del metro) y un cilindro del mismo metal (patrón del kilogramo) fueron depositados en los "Archivos del Estado".

La Conferencia internacional de Pesas y Medidas que se verificó en París, en 1889, decidió que el *metro legal* es la longitud a 0°, de una regla patrón de platino iridiado, que se depositó en el Pabellón de Breteuil, en Sevres, cerca de París.

La misma comisión internacional fijó los signos abreviados oficiales para designar las unidades del sistema métrico. Estos signos son los que emplearemos a continuación.

La mayor parte de las naciones, tanto de América como de Europa, han adoptado el sistema métrico francés a fin de facilitar sus recíprocas relaciones comerciales; las que no lo han adoptado oficialmente (Inglaterra, Rusia, Estados Unidos de América) no prohíben se haga uso de él.

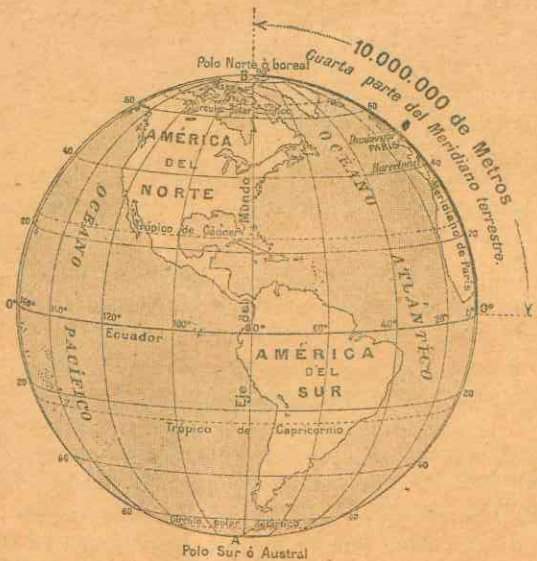


Metro prototipo.
mn longitud del metro.

Preliminares

325. Definición.—*Sistema métrico* es el conjunto de las medidas que se derivan del metro.

Este sistema se llama *métrico* porque su base es el metro, y *decimal*, porque los múltiplos y submúltiplos de las varias unidades siguen la misma relación que los del sistema de numeración décupla.



El círculo exterior de la figura representa el meridiano de París, pasando por Dunkerque y Barcelona.

326. Metro es una longitud aproximadamente igual a la diezmillonésima parte de un cuadrante de meridiano terrestre.

327. Un meridiano terrestre es un círculo máximo trazado en la esfera terrestre, y cuyo diámetro es la línea de los polos AB.

El número de meridianos terrestres puede considerarse como infinito.

328. Clases de magnitudes y sus unidades principales.—En las medidas usuales se consideran ordinariamente seis clases de magnitudes, a saber: de *longitud*, de *superficie*, de *volumen*, de *capacidad*, de *peso* y de *moneda*.

El sistema métrico debe pues contener seis especies de unidades:

- 1º El *metro*, para las longitudes;
- 2º El *metro cuadrado* o el *área*, para las superficies;
- 3º El *metro cúbico* para los volúmenes;
- 4º El *litro*, para las capacidades;
- 5º El *gramo*, para los pesos;
- 6º La *peseta* en España, el *peso* o el *sucre* en las Repúblicas latinas de América, el *franco* en Francia, etc.

Las unidades de tiempo y las que sirven para medir los arcos y los ángulos, no están sujetas a la división decimal, y no entran en el sistema métrico (402 y 403).

Múltiplos y submúltiplos.—Para valuar con mayor comodidad las diversas cantidades, se emplean, a más de las unidades principales, varios múltiplos y submúltiplos decimales de estas mismas unidades.

329. Los múltiplos se expresan, menos en las medidas de moneda, por medio de las siguientes voces griegas, antepuestas al nombre de la unidad principal.

	Deca,	que significa	10;
	Hecto,	—	100;
	Kilo,	—	1 000;
	Miria,	—	10 000;
Así,	Decámetro	significa	10 metros;
	Hectolitro	—	100 litros;
	Kilogramo	—	1 000 gramos;
	Miriámetro	—	10 000 metros.

330. Los submúltiplos se expresan por medio de

las siguientes voces latinas, antepuestas al nombre de la unidad principal:

	Deci,	que significa	<i>décima</i>	<i>parte;</i>
	Centi,	—	<i>centésima</i>	—
	Mili,	—	<i>milésima</i>	—
Así	Decímetro	significa	$\frac{1}{10}$	<i>de metro;</i>
	Centilitro	—	$\frac{1}{100}$	<i>de litro;</i>
	Miligramo	—	$\frac{1}{1 000}$	<i>de gramo.</i>

331. Medidas efectivas y ficticias.—Las medidas métricas se dividen en efectivas y en ficticias.

Las *medidas efectivas* son las que existen realmente, como: el metro, el litro el kilogramo, etc.

Las medidas efectivas comprenden la unidad, su duplo y su mitad.

Las *medidas ficticias* o de *cuenta* no existen en realidad y se emplean en el cálculo, como: el metro cuadrado, el área, etc.

CAPITULO I

Medidas de longitud (1)

332. Definición.—Llámanse *medidas de longitud*, las que sirven para determinar la extensión en una sola dimensión.

Por ejemplo, la longitud de una calle, la altura de un árbol, el espesor de una pared, etc.

La unidad de las medidas de longitud es el *metro*.

(1) Al estudiar las varias medidas del sistema métrico decimal, véase pág. 226 el cuadro de correspondencia.

333. Múltiplos y submúltiplos del metro.—

Los múltiplos del metro son:

El decámetro, o <i>dam.</i> que vale	10 metros
El hectómetro, o <i>hm.</i> —	100 —
El kilómetro, o <i>km.</i> —	1 000 —
El miriámetro, o <i>Mm.</i> —	10 000 —

Los submúltiplos del metro son:

El decímetro, o <i>dm.</i> que vale	$\frac{1}{10}$	del metro
El centímetro, o <i>cm.</i> —	$\frac{1}{100}$	—
El milímetro, o <i>mm.</i> —	$\frac{1}{1 000}$	—

El número 2 hectómetros 5 decámetros 8 metros 4 decímetros 3 milímetros se escribe: 258,403 metros.

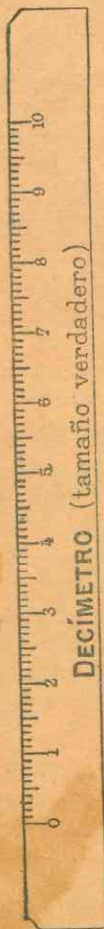
334. Las medidas de longitud se dividen en *medidas de longitud propiamente dichas*, y en *medidas itinerarias*.

§ I.—Medidas de longitud propiamente dichas.

335. Definición.—Llámanse *medidas de longitud propiamente dichas*, las que sirven para valuar las longitudes poco considerables, como la altura de una casa, el ancho de una calle, etc.

336. Las medidas efectivas de longitud propiamente dichas son:

1º El doble decámetro,	o 20 m.
2º El decámetro,	o 10 m.
3º El medio decámetro,	o 5 m.
4º El doble metro,	o 2 m.
5º El metro,	o 1 m.
6º El medio metro,	o 0,50 m.
7º El doble decímetro,	o 0,20 m.
8º El decímetro,	o 0,10 m.



A estas medidas se les da la forma más conveniente para sus aplicaciones.

Las más usadas son:

1º El *doble decámetro* y el *decámetro*, fabricados en forma de cadena de agrimensor (fig. adjunta).

2º El *doble metro de madera*, dividido en decímetros y centímetros.

3º El *metro de madera*, en forma de regla plana.

4º Los *metros plegadizos*, de madera, cobre, hueso, marfil, formados de dos, cinco o diez partes.

5º El *metro* para el uso de los mercaderes de paño, tela, etc., en forma de regla cuadrada.

6º El *doble decímetro* y el *decímetro*, de cobre, marfil, madera, etc.

§ II.—Medidas itinerarias.

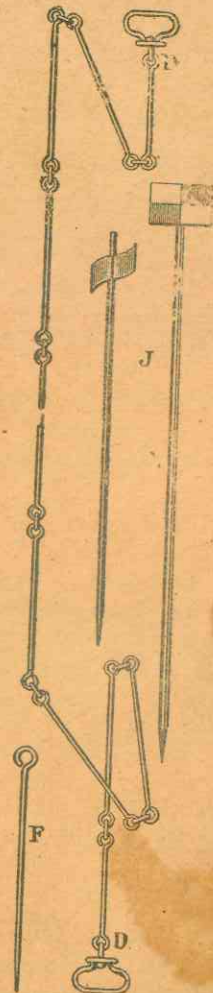
337. Definición — Llámanse *medidas itinerarias* las que sirven para determinar las distancias geográficas, como la de Madrid a París.

La unidad de estas medidas es el *kilómetro*.

338. Las medidas itinerarias son: el *hectómetro*, el *kilómetro* y el *miriámetro*.

En las carreteras se suele indicar los kilómetros por mojones principales, y los hectómetros por mojones más pequeños.

339. Observación.—La cuarta parte del meridiano es igual a 10 millones de metros aproximadamente, luego el meridiano equivale a 40 millones de metros.



La circunferencia del meridiano se divide en 360 partes iguales, llamadas grados, y la longitud de un grado es igual a $\frac{40\,000\,000}{360} = 111\,111$ metros aproximadamente.

340. Unidades marítima y terrestre.—Las unidades marítima y terrestre son la legua marina y la legua terrestre.

La *legua marina o geográfica* es de 20 al grado, es decir que en la longitud de un grado, 111 111 metros, hay 20 leguas marinas; por lo tanto, la legua marina vale $\frac{111\,111}{20} = 5\,555$ metros.

La *legua terrestre* es de 25 al grado, y por consiguiente vale $\frac{111\,111}{25} = 4\,444$ metros.

En España, la *legua terrestre* es de 5 572 metros.

La *legua de posta*, o legua común, es de 4 kilómetros.

La *milla marina*, o tercera parte de la legua geográfica, tiene 1 852 metros aproximadamente; es la longitud de un arco de un minuto.

La *milla inglesa* es de 1 609 metros.

El *nudo* (que sirve a los marineros para apreciar la velocidad de los navíos) es la cientoveinteava parte de la milla marina, o sea 15,42 metros.

CAPITULO II

MEDIDAS DE SUPERFICIE

341. Definición.—Las *medidas de superficie* son las que sirven para determinar la extensión considerada en dos dimensiones, *largo y ancho*.

La unidad de superficie es el *metro cuadrado* (m^2), que es un cuadrado de un metro de lado.

Para valuar las superficies no hay medidas efectivas; nos valemos de las medidas efectivas de longitud.

342. Múltiplos y submúltiplos del metro cuadrado.—Los múltiplos del metro cuadrado son:

1º El <i>decámetro cuadrado</i> , o dam^2 , que vale 100 metros cuadrados.	
2º El <i>hectómetro cuadrado</i> , o hm^2 metros cuadrados	— 10 000
3º El <i>kilómetro cuadrado</i> , o km^2 de metros cuadrados.	— 1 000 000
4º El <i>miriámetro cuadrado</i> , o Mm^2 de metros cuadrados.	— 100 000 000

343. Los submúltiplos son:

1º El *decímetro cuadrado*, o dm^2 que vale la centésima parte del metro cuadrado.

2º El *centímetro cuadrado*, o cm^2 , que vale la diezmilésima parte del metro cuadrado.

3º El *milímetro cuadrado*, o mm^2 , que vale la millonésima parte del metro cuadrado.

344. Los múltiplos y submúltiplos del metro cuadrado son sucesivamente 100 veces mayores o menores unos que otros.

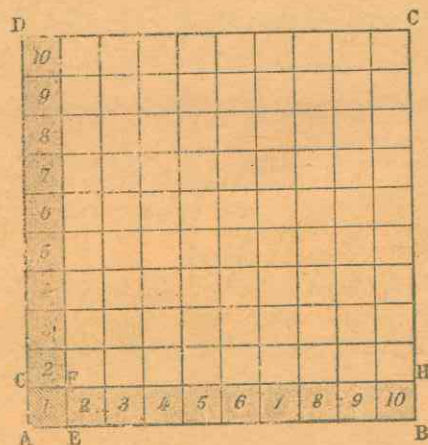
Para demostrar, por ejemplo, que *el metro cuadrado vale 100 decímetros cuadrados*, se pueden emplear dos métodos:

1º *Método sintético.*—Supongamos que tengo cierto número de decímetros cuadrados; pongo diez de ellos en línea recta unos a continuación de otros, y resulta el rectángulo ABHG, de un metro de largo y de un decímetro de ancho. Puedo poner al lado de este rectángulo otro igual, y también un tercero, un cuarto, etc.; cuando haya puesto 10 rectángulos, tendré un cuadrado de un metro de lado, es decir, un *metro cuadrado*.

Ahora bien, cada rectángulo contiene 10 decímetros cuadrados, los diez rectángulos contendrán 10×10 o 100 decímetros cuadrados. Luego *se necesitan 100 decímetros cuadrados para formar un metro cuadrado*.

2º *Método analítico.*—Sea ABCD un cuadrado de un metro de lado, esto es un metro cuadrado.

Dividamos el lado AD en diez partes iguales, y por los puntos de división tracemos paralelas al lado AB; el cuadrado ABCD quedará dividido en diez rectángulos iguales a ABHG, de 1 metro de largo y 1 decímetro de alto.



Area del cuadrado.

Dividamos AB en diez partes iguales, y por los puntos de división tracemos paralelas a AD; cada uno de los rectángulos que antes hemos formado quedará dividido en 10 cuadrados iguales al cuadrado 1, y cuyo lado tiene un decímetro.

Teniendo cada rectángulo 10 decímetros cuadrados, los diez rectángulos tendrán 10×10 , o sean 100 decímetros cuadrados.

Del propio modo se demostraría que el decámetro cuadrado vale 100 metros cuadrados o 10 000 decímetros cuadrados, y así sucesivamente.

345. Nota.—De lo que antecede, se infiere que si, en un número, la unidad es el metro cuadrado, el decámetro cuadrado ocupará el orden de las centenas, el

hectómetro cuadrado el de las decenas de millar, etc.; el decímetro cuadrado ocupará el orden de las centésimas, el centímetro cuadrado el de las diezmilésimas, etc.

Luego se necesitan dos cifras para representar cada orden de unidad de superficie.

Así, $1 \text{ dam}^2 \ 5 \text{ m}^2 \ 25 \text{ cm}^2$ se escribirán: $105 \text{ m}^2 \ 0025$.

346. División de las medidas de superficie.—

Las medidas de superficie son de tres clases:

- 1º Las *medidas de superficie propiamente dichas*;
- 2º Las *medidas topográficas*;
- 3º Las *medidas agrarias*.

347. Medidas de superficie propiamente dichas.—Las *medidas de superficie propiamente dichas* se emplean en la valuación de las superficies de corta extensión, como la de una pared, de un patio, etc.

La unidad es el *metro cuadrado*.

348. Medidas topográficas.—Las *medidas topográficas* tienen por objeto la valuación de las superficies considerables, como la de una provincia, de un estado, etc.

La unidad es el *kilómetro cuadrado* o el *miriámetro cuadrado*.

Así, se dice, por ejemplo, la República de Colombia tiene 1 200 000 kilómetros cuadrados de superficie.

349. Medidas agrarias.—*Medidas agrarias* son las que tienen por objeto la valuación de la superficie de los terrenos, como campos, cañaverales, cacao-tales, etc.

La unidad es el *decámetro cuadrado* que entonces recibe el nombre de *área*. (*a*)

El *área* tiene un múltiplo, la *hectárea* (*ha*) que vale 100 áreas o un hectómetro cuadrado; y un submúltiplo, la *centiárea* (*ca*) que es la centésima parte del área, o un metro cuadrado.

Lo que se puede resumir como sigue:

$$ha = hm^2 = 10\,000\ m^2$$

$$a = dam^2 = 100\ m^2$$

$$ca = m^2 = 1\ m^2$$

Así, 15 hectáreas 7 áreas 23 centiáreas se escribirán:
150 728^{ca}, o 150 728^{ma}

Superficie de algunas figuras geométricas.

350. Cuadrado.—La superficie de un cuadrado es igual al producto del lado l por sí mismo:

$$S = l \times l = l^2.$$

351. Rectángulo.—La superficie de un rectángulo es igual al producto de la base B por la altura a :

$$S = B \times a.$$

352. Triángulo.—La superficie de un triángulo es igual al semiproducto de la base B por la altura a :

$$S = \frac{B \times a}{2}.$$

353. Trapecio. La superficie de un trapecio es igual al producto de la semisuma de las bases B , b por la altura a :

$$S = \frac{B + b}{2} \times a.$$

354. Polígono regular.—La superficie de un polígono regular es igual al semiproducto de su perímetro p por la apotema a :

$$S = \frac{p \times a}{2}.$$

355. Círculo.—La superficie de un círculo es igual al producto del número π (π) por el cuadrado del radio R , o al producto de la cuarta parte de π por el cuadrado del diámetro D :

$$S = \pi R^2 = \frac{\pi D^2}{4}$$

CAPITULO III

MEDIDAS DE VOLUMEN

356. Definición.—*Medidas de volumen* son las que sirven para valuar la extensión considerada en sus tres dimensiones: *longitud latitud, altura (espesor o profundidad)*.

357. División.—Las medidas de volumen se dividen en dos clases:

- 1ª Las *medidas de volumen propiamente dichas*;
- 2ª Las *medidas para la leña*.

§ I.—Medidas de volumen propiamente dichas.

La unidad de las medidas de volumen es el *metro cúbico*.

358. Metro cúbico (m^3) es un cubo que tiene por caras seis cuadrados iguales, y cuyos lados miden un metro de longitud.

359. Múltiplos y submúltiplos del metro cúbico.—Prácticamente no se emplean los *múltiplos* del metro cúbico; se dice diez, cien, mil, diez mil metros cúbicos.

Los *submúltiplos* son:

1º El *decímetro cúbico*, o dm^3 , que es un cubo de un decímetro de lado, y vale $\frac{1}{1000}$ del metro cúbico.

2º El *centímetro cúbico*, o cm^3 , que es un cubo de un centímetro de lado, y vale $\frac{1}{1000000}$ del metro cúbico.

3º El *milímetro cúbico*, o mm^3 , que es un cubo de un milímetro de lado, y vale $\frac{1}{1000000000}$ del metro cúbico.

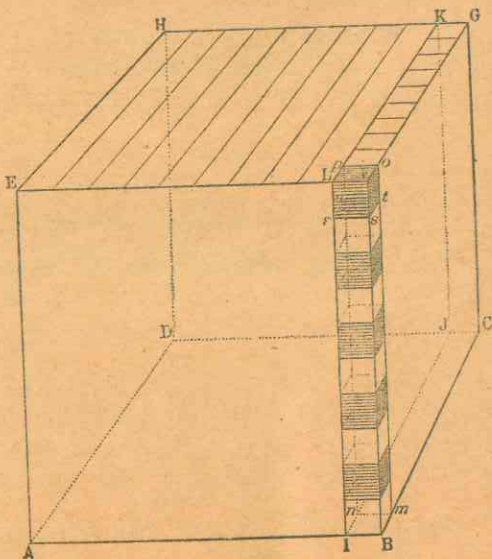
360. Así pues:

El metro cúbico vale: $\left\{ \begin{array}{l} 1\ 000\ \text{dm}^3 \\ 1\ 000\ 000\ \text{de cm}^3 \\ 1\ 000\ 000\ 000\ \text{de mm}^3 \end{array} \right.$

El decímetro cúbico vale: $\left\{ \begin{array}{l} 1\ 000\ \text{cm}^3 \\ 1\ 000\ 000\ \text{de mm}^3 \end{array} \right.$

El centímetro cúbico vale: $\left\{ \begin{array}{l} 1\ 000\ \text{mm}^3 \end{array} \right.$

Para demostrar que el metro cúbico vale 1 000 decímetros cúbicos, se emplean dos procedimientos:



Volumen del cubo.

1º *Método sintético.*—Puede representarse el metro cúbico por medio de un cajón cuyo interior tenga un metro de profundidad, un metro de largo y un metro de ancho. El fondo de este cajón tiene un metro cuadrado o 100 decímetros cuadrados, y puede recibir 100 cubos de un decímetro de lado, lo que forma un piso de un decímetro de alto; dos pisos se elevarán a 2 decímetros de alto y contendrán dos veces 100 dm^3 o sea $100 \times 2 = 200\ \text{dm}^3$.

Tres pisos, $100 \times 3 = 300\ \text{dm}^3$... y 10 pisos o el metro cúbico, $100 \times 10 = 1\ 000\ \text{dm}^3$.

2º *Método analítico.*—Sea ABCDEFGH un metro cúbico. Por medio de secciones paralelas a una cara, podemos descomponerlo en diez capas semejantes a BCGFLIJK, la cual tiene 1 decímetro de espesor; siendo la cara BCGF un metro cuadrado, esta capa contiene 100 decímetros cúbicos (344). Luego las diez capas, o el metro cúbico, contendrán 100×10 o sea 1 000 decímetros cúbicos.

Por lo tanto, el metro cúbico vale 1 000 decímetros cúbicos. Del propio modo puede probarse que el decímetro cúbico vale 1 000 cm^3 , y que el centímetro cúbico vale 1 000 mm^3 .

361. *Nota.*—De lo que antecede se infiere que si, en un número, la unidad es el metro cúbico, el decímetro cúbico ocupa el orden de las milésimas, el centímetro cúbico el de las millonésimas, etc.

Luego se necesitan tres cifras para representar cada orden de unidad de volumen.

Así, $2\text{m}^3\ 25\text{dm}^3\ 7\text{cm}^3$ se escribirán: $2\text{m}^3\ 025\ 007$.

No hay medidas efectivas para los volúmenes propiamente dicho. Para valuarlos, nos valemos de las propiedades geométricas y de las medidas efectivas de longitud.

Volumen de algunos sólidos.

362. *Cubo.*—El volumen de un cubo es igual al cubo del lado l :

$$V = l \times l \times l = l^3.$$

363. *Prisma.*—El volumen de un prisma es igual al producto de la base B por la altura a :

$$V = B \times a.$$

364. *Cilindro.*—El volumen de un cilindro es igual al producto de la base B por la altura a :

$$V = B \times a.$$

365. *Pirámide.*—El volumen de una pirámide es igual al tercio del producto de la base B por la altura a :

$$V = \frac{1}{3} B \times a.$$

366. Cono.—El volumen de un cono es igual al tercio del producto de la base B por la altura a:

$$V = \frac{1}{3} B \times a.$$

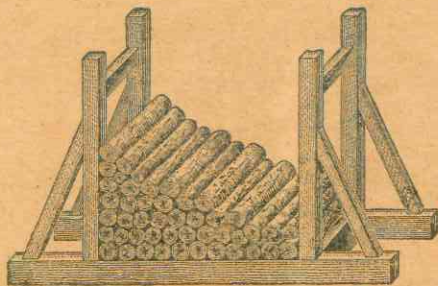
367. Esfera.—El volumen de una esfera es igual al tercio del producto de su superficie S por su radio r:

$$V = \frac{1}{3} S \times r.$$

§ II.—Medidas para la leña.

368. La unidad de las medidas para la leña es el *estéreo* (s), que equivale a un *metro cúbico*.

El *estéreo* tiene un múltiplo que es el *decastéreo* (das), volumen de 10 estéreos, y un submúltiplo que es el *decistéreo* (ds), igual a la décima parte del *estéreo*.



Estéreo.

369. Las medidas efectivas para la leña son tres:

- 1º El *estéreo*.
- 2º El *doble estéreo*, medida de 2 estéreos.
- 3º El *medio decastéreo*, medida de 5 estéreos.

Nota.—I. La altura varía según la longitud de la leña; de modo que el producto de las tres dimensiones dé siempre 1 estéreo, 2 estéreos, o 5 estéreos.

La distancia entre los montantes es de 1 metro para el *estéreo*, 2 metros para el *doble estéreo*, y 3 para el *medio decastéreo*.

Ejemplo.—Si la leña mide 1,08 metro de largo, y si quiero un *medio decastéreo*, diré: La distancia entre los montantes, 3 metros, multiplicada por 1,08 m., longitud de la leña, y por x la altura, o $3 \times 1,08 \times x = 5$ estéreos;

$$\text{luego, } x = \frac{5}{3 \times 1,08} = 1,54 \text{ metro.}$$

La altura será 1,54 metro.

II. La leña se vende también al peso y sobre todo por *carretadas*.

CAPITULO IV

MEDIDAS DE CAPACIDAD

370. Definición.—Llámanse *medidas de capacidad* las que sirven para medir *líquidos* como el vino, el alcohol, y *áridos* como el maíz, el trigo.

Su unidad principal es el *litro*.

371. Litro es una medida cuya capacidad es igual a un *decímetro cúbico*.

No acomodándose bien la forma cúbica a las necesidades del comercio, al litro y a las demás medidas de capacidad se les suele dar forma cilíndrica.

372. Múltiplos y submúltiplos del litro.—Los múltiplos del litro son:

- | | | | |
|--|----------|-------|---------|
| 1º El <i>decalitro</i> , o <i>dal.</i> , | que vale | 10 | litros. |
| 2º El <i>hectolitro</i> , o <i>hl.</i> , | — | 100 | — |
| 3º El <i>kilolitro</i> , o <i>kl.</i> , | — | 1 000 | — |

Este último se usa poco, y se dice más bien 100 decalitros, 10 hectolitros.

373. Los submúltiplos del litro son:

- 1º El *decilitro*, o *dl.*, que vale 0,1 de litro.
2º El *centilitro*, o *cl.*, — 0,01 —

El número 6 dal. 7 cl. se escribirá: 60,07 litros.

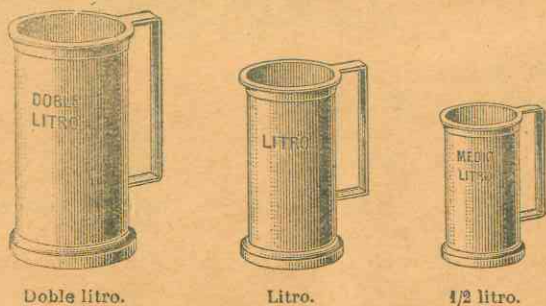
Medidas efectivas de capacidad.

374. I. Medidas efectivas para líquidos.—Las medidas efectivas para líquidos se dividen en tres clases:

1º **Grandes medidas.**—Las grandes medidas para líquidos tienen forma cilíndrica y la profundidad es igual al diámetro; se fabrican de cobre y de hierro fundido estañados.

Estas medidas se emplean en el comercio al por mayor y son cinco: *hectolitro*, *medio hectolitro*, *doble decalitro*, *decalitro*, *medio decalitro*.

MEDIDAS PARA VINO Y LICORES



Doble litro.

Litro.

1/2 litro.



Doble dl.

dl.

1/2 dl.

2 cl.

cl.

2º **Medidas para vino y licores.**—Estas medi-

das que se fabrican de estaño, hoja de lata, níquel, etc. (el cobre exceptuado) son cilindros cuya profundidad es el doble del diámetro; se emplean en el comercio al por menor y comprenden desde el *doble litro* hasta el *centilitro* inclusive.

3º **Medidas para el aceite y la leche.**—Estas medidas, de hoja de lata, tienen forma cilíndrica, y su profundidad es igual al diámetro.

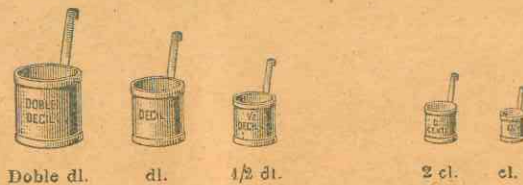
MEDIDAS PARA EL ACEITE



Doble litro.

Litro.

1/2 litro.



Doble dl.

dl.

1/2 dl.

2 cl.

cl.

La serie de estas medidas comprende desde el *hectolitro* hasta el *centilitro* inclusive; pero en el comercio al por menor se usan tan sólo desde el *doble litro* inclusive.

II. **Medidas efectivas para áridos.**—Las medidas efectivas para áridos se construyen con madera

de encina, de haya o de nogal; también pueden ser de cobre o de hierro fundido.

Estas medidas tienen forma cilíndrica y el diámetro es igual a la profundidad.

MEDIDAS PARA ARIDOS



Hectolitro.



1/2 hectolitro.



Doble dal.



Decalitro.



1/2 dal.



Doble litro.



Litro.



1/2 l.



2 dl



dl



1/2 dl.

Estas medidas son once: hectolitro, medio hectolitro; doble decalitro, decalitro, medio decalitro; doble litro, litro, medio litro; doble decilitro, decilitro, medio decilitro.

CAPITULO V

MEDIDAS DE PESO

375. Definición.—*Medidas de peso* o simplemente *pesas* son las que sirven para determinar el peso de los cuerpos.

Su unidad principal es el *gramo* (gr.).

376. Gramo es el peso que tiene, en el vacío, un centímetro cúbico de agua destilada, tomada a su mayor densidad, esto es, a la temperatura de 4 grados del termómetro centígrado.

377. Múltiplos y submúltiplos del gramo.— Los múltiplos del gramo son:

- | | | |
|---------------------------------|-----------------|---------------------|
| 1º El <i>decagramo</i> , | o <i>dag.</i> , | que vale 10 gramos. |
| 2º El <i>hectogramo</i> , | o <i>hg.</i> , | — 100 gramos. |
| 3º El <i>kilogramo</i> , | o <i>kg.</i> , | — 1 000 gramos. |
| 4º El <i>quintal métrico</i> | o <i>q.</i> , | — 100 kg. |
| 5º La <i>tonelada métrica</i> , | o <i>t.</i> , | — 10 q. |

378. Los submúltiplos del gramo son:

- | | | |
|---------------------------|----------------|-------------------------------|
| 1º El <i>decigramo</i> , | o <i>dg.</i> , | que vale la 0,1 parte del gr. |
| 2º El <i>centigramo</i> , | o <i>cg.</i> , | — la 0,01 parte del gr. |
| 3º El <i>miligramo</i> , | o <i>mg.</i> , | — la 0,001 parte del gr. |

El número 2 hectogramos 25 gramos 7 centigramos se escribirá: 225,07 gramos.

En el comercio al por menor se toma como unidad usual el *kilogramo*.

El *quintal métrico* y la *tonelada métrica* se emplean constantemente en los ferrocarriles, en los buques, etc., para las pesas muy grandes. (1)

En la marina mercante, se dice, por ejemplo, buque de 300 toneladas para significar que la carga puede alcanzar hasta 300 000 kg.

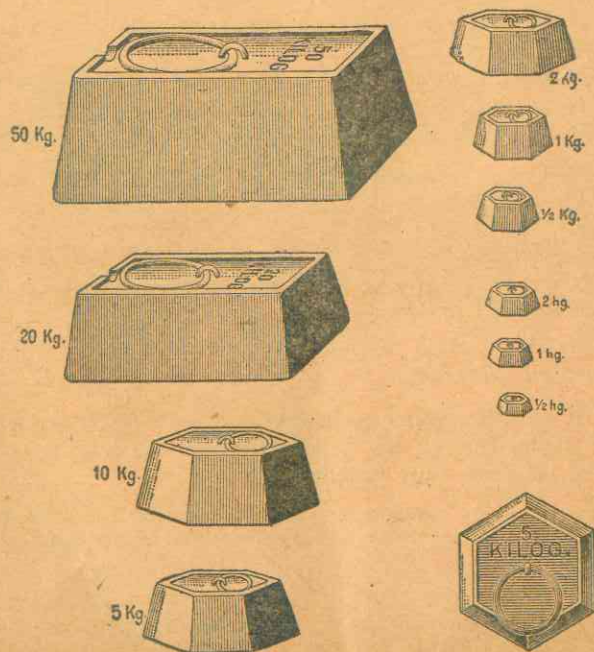
(1) En varias comarcas se emplea todavía el *quintal antiguo*, que vale 50 kg., y que no debe confundirse con el *quintal métrico*.

Medidas efectivas de peso.

379. **Pesas de hierro fundido.**—Hay 10 pesas de *hierro fundido*, a saber: 50 kg., 20 kg., 10 kg., 5 kg., 2 kg., 1 kg., medio kg., 2 hg., medio hg.

PESAS DE HIERRO FUNDIDO

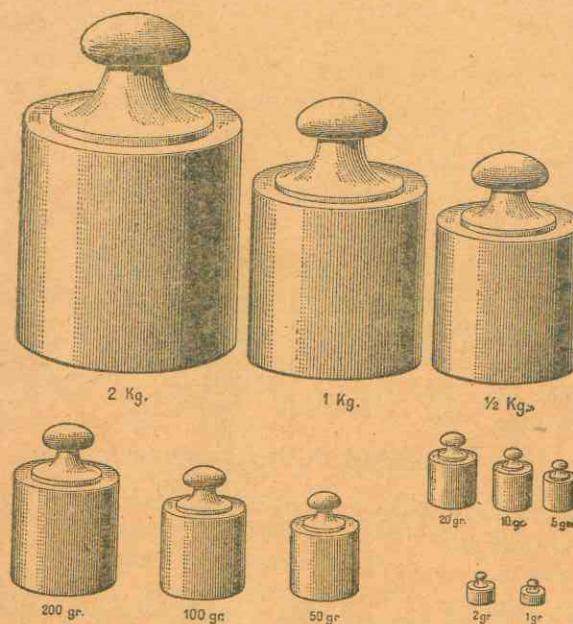
Tienen la forma de una pirámide truncada, y de aristas amortiguadas; su base es un rectángulo en las pesas de 50 y de 20 kg., y un exágono regular en las demás.



Para su fácil manejo, estas pesas están provistas de una anilla en su parte superior.

380. **2ª Pesas de latón.**—Hay 14 pesas de *latón*, a saber: 20 kg., 10 kg., 5 kg., 2 kg., 1 kg., 500 gr., 200 gr., 100 gr., 50 gr., 20 gr., 10 gr., 5 gr., 2 gr., 1 gr.—Tienen la forma de un cilindro, que remata en un botón

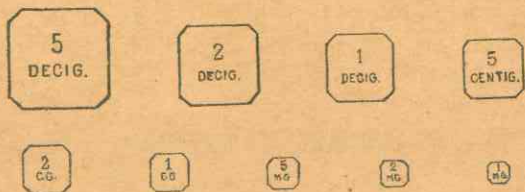
PESAS DE LATON



Hay también pesas huecas de forma troncónica, contenidas unas dentro de otras; la mayor es como una caja que da cabida a todas las demás.

381. Hay 9 pesas menores que 1 gramo que se fabrican de chapa de latón, de plata o de níquel, y que

PESAS DE CHAPA DE LATON



(Estas pesas están representadas en su tamaño natural).

sirven para pesar el oro, la plata, las perlas, los diamantes, etc. También se emplean en los laboratorios químicos, farmacias, etc.

Todas las pesas llevan grabadas en su parte superior la indicación de su peso.

382. Un juego de pesas medias comprende:

Una de 500 gramos	Dos de 10 gramos
Una de 200 —	Una de 5 —
Dos de 100 —	Dos de 2 —
Una de 50 —	Una de 1 —
Una de 20 —	

Densidad de los cuerpos

383. **Definición.**—Llábase *densidad de un cuerpo*, o peso específico, el cociente del peso de este cuerpo por el peso de igual volumen de agua.

Así, decir que la densidad de un cuerpo es de 6,5, significa que este cuerpo pesa seis veces y medio más que un volumen igual de agua.

Ejemplo.—Búsquese el peso de una barra de hierro de 3 dm³ siendo la densidad del hierro 7,788.

Ya que un decímetro cúbico de hierro pesa 7 kg 788, 3 decímetros cúbicos pesarán 3 veces más o 23 kg 364.

384. Luego, el peso de un cuerpo es igual al producto de su volumen por su densidad.

Llamando P el peso de un cuerpo, V su volumen y D su densidad, tendremos:

$$P = VD \quad (1)$$

El peso resulta en toneladas, si el volumen está expresado en metros cúbicos; en kilogramos, si se da el volumen en decímetros cúbicos; en gramos, si se da el volumen en centímetros cúbicos.

Ejemplo.—¿Cuál es el peso de un cuerpo cuya densidad es 19,25, y su volumen, 35 cm³?

$$P = 35 \times 19,25 = 673,75 \text{ gramos.}$$

385. Para encontrar el volumen de un cuerpo, se divide su peso por su densidad.

Dividamos por D los dos miembros de la igualdad (1).

$$\frac{P}{D} = V \quad (2)$$

El volumen resulta en metros cúbicos, decímetros cúbicos o centímetros cúbicos, según se dé el peso en toneladas, en kilogramos o en gramos.

Ejemplo.—¿Cuál es el volumen de un cuerpo que pesa 17 kg. 400, y cuya densidad es 2,9?

$$V = \frac{17,400}{2,9} = 6 \text{ dm}^3.$$

386. Para encontrar la densidad de un cuerpo, se divide el peso por el volumen.

Dividamos por V los dos miembros de la igualdad (1)

$$\frac{P}{V} = D \quad (3)$$

Ejemplo.—¿Cuál es la densidad del azufre, sabiendo que 25 cm³ de este cuerpo pesan 52 gramos?

$$D = \frac{52}{25} = 2,08.$$

Densidad de algunos cuerpos

Cuerpos	Densidad	Cuerpos	Densidad
Agua	1	Aluminio	2,56
Mercurio	13,596	Vidrio	2,52
Alcohol	0,792	Cristal	3,33
Agua de mar	1,026	Azufre	2,086
Leche	1,03	Granito*	2,70
Aceite de olivas	0,915	Basalto*	2,60
Vino	0,99	Mármol*	2,70
Hielo á 0°	0,916	Porcelana	2,24
Oro fundido	19,26	Piedra de constr.*	1,80
Plata fundida	10,47	Pórfido	2,71
Platino	21,53	Diamante*	3,515
Plomo fundido	11,35	Acero	7,765
Cobre	8,85	Latón	8,427
Hierro	7,788	Bronce*	8,838
Zinc	7,19	Fundición	7,200
Estaño	7,291	Petróleo	0,847
Antimonio	6,72	Aire	0,001293

Las densidades precedidas del signo * son densidades medias.

CAPITULO VI

MEDIDAS MONETARIAS

387. **Definición.**—Llámanse *medidas monetarias*, o simplemente *monedas*, las que sirven para valuar el precio de las cosas.

En España, la unidad es la *peseta*.

Peseta es una moneda de plata que pesa 5 gramos y contiene 0,835 de *plata pura* y 0,165 de *cobre*.

388.— **Múltiplos y submúltiplos de la peseta.**—Los *múltiplos* de la peseta no tienen nombres particulares; se dice 10 pesetas, 100 pesetas, etc.

(1) Como base del sistema monetario tomamos la *peseta*, unidad monetaria en España que, a la par, equivale al *franco* francés.

Véanse al final de la obra las monedas extranjeras y sus equivalencias.

Los *submúltiplos* son:

1º El *décimo* o la décima parte de la peseta.

2º El *céntimo* o la centésima parte de la peseta.

389. **Clases de monedas.**—Las monedas son de tres clases: de *oro*, de *plata* de *bronce*, o de *níquel*.

Al oro y a la plata se les agrega cierta cantidad de cobre para dar a las monedas mayor consistencia. Esto es lo que constituye la *liga*.

Las monedas de *bronce* son un compuesto de cobre, estaño y zinc.

Monedas efectivas de España

MONEDAS	VALOR	LEY	DIAMETRO	PESO		TOLERANCIA	
				EXACTO	N LA LLY	EN EL PESO	
ORO	100 pts.	0,900	35mm	32g258	0,002	0,001	
	50	0,900	28	16 129	0,002	0,001	
	25	0,900	24	8 0645	0,002	0,002	
	20	0,900	21	6 4516	0,002	0,002	
	10	0,900	19	3 2258	0,002	0,002	
	5	0,900	17	1 6129	0,002	0,003	
PLATA	0,05	»	25	5	»	0,010	
	0,02	»	20	2	»	0,010	
	0,01	»	15	1	»	0,010	
	0,50	0,835	18	2 50	0,003	0,007	
	0,25	0,835	16	1	0,003	0,010	
NIQUEL	0,10	»	30mm	10g	»	0,010	

390. **Ley de la moneda.**—Llámanse *ley de la moneda* a la proporción en que entran en la ligación el oro o la plata con el cobre, y el cobre con el estaño o el zinc.

También puede decirse que *ley de una ligación* es el cociente del peso de su metal fino por el peso total de dicha ligación.

Llamando L la ley, P' el peso del metal fino, P el peso total, tendremos :

$$L = \frac{P'}{P} \quad (1)$$

Multipliquemos por P los dos miembros de esta igualdad:

$$PL = P' \quad (2)$$

391. Así, para encontrar el peso del metal fino, se multiplica el peso total por la ley.

Dividamos por L los dos miembros de la igualdad (2):

$$P = \frac{P'}{L} \quad (3)$$

392. Luego, para encontrar el peso total, se divide el peso del metal fino por la ley.

393. Monedas de oro.—La ley de las monedas de oro es de 900 milésimas; es decir que de las 1 000 partes en que se supone dividido el peso de una moneda hay 900 partes de *oro* y 100 de *cobre*.

394. Monedas de plata.—La ley de las monedas de plata es de 900 milésimas para la moneda de 5 ptas., y de 835 milésimas para las demás.

395. Monedas de bronce.—La ley para las monedas de bronce es de 950 milésimas de *cobre*, 40 de *estaño* y 10 de *zinc*.

Esta ley es la que rige también en *España, Francia, Italia, Bélgica, Grecia y Suiza*, pero sin convenio de circulación.

396. Tolerancia en ley y peso.—Como es muy difícil obtener con rigurosa exactitud el peso de las monedas, y la ley a que deben ajustarse, se admite una *tolerancia* en más y en menos. La tolerancia en más se llama en *fuerte*, y la en menos, en *feble*.

Para esta tolerancia, véase el cuadro precedente.

397. Talla de las monedas.—*Talla de las monedas* es el número de monedas que han de acuñarse del kilogramo de ligación monetaria.

La talla de cualquier moneda se halla, dividiendo el *kilogramo* por el *peso* de esta moneda; o dividiendo el *valor* de un kilogramo de metal aleado por el *valor* de la misma moneda.

MONEDAS DE ORO		MONEDAS DE PLATA	
De 100 ptas. hay 31 en el kg.	»	De 5 ptas. hay 40 en el kg.	»
» 50 » » 62 » »	»	» 2 » » 100 » »	»
» 25 » » 124 » »	»	» 1 » » 200 » »	»
» 20 » » 155 » »	»	» 0,50 » » 400 » »	»
» 10 » » 310 » »	»	» 0,20 » » 1000 » »	»
» 5 » » 620 » »	»		

398. Valor relativo de las monedas.—El valor relativo de las monedas se funda en la siguiente convención:

En igualdad de peso:

El oro vale:	{	1º 15½ veces más que la plata.
	{	2º 124 veces más que el níquel.
La plata »	{	1º 15½ veces menos que el oro.
	{	2º 8 veces más que el níquel.
El níquel »	{	1º 124 veces menos que el oro.
	{	2º 8 veces menos que la plata.

Ya que 5 gramos de *plata* amonedada valen 1 peseta, 1 gramo vale $\frac{1}{5}$ de peseta, y 1 kilogramo $\frac{1 \times 1000}{5}$ o sea 200 pta.

Por consiguiente 1 kilogramo de oro amonedado vale $200 \times 15,5$ o sea 3 100 ptas., y 1 gramo 3,10 ptas.

1 kilogramo de níquel vale $\frac{200}{8}$, es decir 10 ptas., y 1 gramo valen $2\frac{1}{2}$ céntimos.

399. De lo que precede se deduce que, en igualdad de valor:

El oro pesa:	{	1º $15\frac{1}{2}$ veces menos que la plata.
		2º 124 veces menos que el níquel.
La plata »	{	1º $15\frac{1}{2}$ veces más que el oro.
		2º 8 veces menos que el níquel.
el níquel »	{	1º 8 veces más que la plata.
		2º 124 veces más que el oro.

1 peseta en plata pesa 5 gramos; y 1 peseta en oro pesará $\frac{5}{15,5}$ o sea 0 gr. 322.580; y 1 peseta, en níquel pesará 5×8 , esto es, 40 gramos.

400. Notas—I. Las monedas de oro y las de plata de 5 ptas. tienen curso forzoso entre particulares. El curso forzoso de las demás monedas de plata y de las de níquel tienen un límite que es, en las primeras, de 50 ptas., y en las segundas, de 5 ptas. El Estado recibe una y otras sin limitación alguna.

II.—Carecen de curso legal las monedas de oro, cuando llegan a perder de su peso $\frac{1}{2}$ por ciento a la tolerancia en feble. Lo mismo sucede con las de plata de a 5 ptas. si la pérdida de peso es de 1% , y con las demás de plata si es de 5% .

Relaciones entre las medidas métricas.¹

MEDIDAS DE SUPERFICIE

Relación de las medidas de superficie entre sí.

El m^2	igual a	1 centiárea.
El dam^2	—	1 área
El hm^2	—	1 hectárea.
El km^2	—	100 hectáreas.
El Mm^2	—	10 000 hectáreas.

Y recíprocamente:

La centiárea	igual a	1 m^2 .
El área	—	1 dam^2 o	100 m^2 .
La hectárea	—	1 hm^2 o	10 000 m^2 .

MEDIDAS DE VOLUMEN

Relación del metro cúbico con las medidas para la leña y con las de capacidad y de peso.

Ya que	1 m^3	igual a	1 estéreo,
	10 m^3	igualan a	1 decastéreo.
	100 dm^3	—	1 decistéreo.

Como el litro es igual a 1 dm^3 , y 1 dm^3 de agua pesa 1 kilo,

1 dl.	igual a	100 cm^3	y pesa	100 gr.
1 cl.	—	10 cm^3	—	10 gr.
1 ml.	—	1 cm^3	—	1 gr.
1 dal.	—	10 dm^3	—	10 kg.
1 hl.	—	100 dm^3	—	100 kg.
1 kl.	—	1 000 dm^3 o 1 m^3	—	1 000 kg.

(1) Consúltese el Cuadro del sistema métrico decimal (109×131^{cm}) de la colección G. M. Bruño, en el cual van representadas las medidas en su tamaño natural, y se da la correspondencia que tienen entre sí.

636. ¿Cuál sería, en metros, el largo de un alambre que daría la vuelta al globo terrestre, pasando por los polos?

637. ¿Cuál sería su longitud, en kilómetros?

638. ¿Cuántas veces mayor sería el metro, si se lo hubiera tomado igual a la diezmillonésima parte: 1° del semimeridiano? 2° del meridiano?

639. ¿Cuáles son las unidades principales del sistema métrico?

640. ¿Cuáles son las medidas que no están sujetas a la ley decimal?

641. Dígase las ventajas del sistema métrico decimal.

642. ¿Cuáles son las medidas efectivas de longitud?

643. ¿Cuál es la longitud media de un grado del meridiano, y cómo se encuentra?

644. ¿En qué lugar se escriben; 1° los decámetros cuadrados; 2° los hectómetros cuadrados; 3° los décimos del centímetro cuadrado; 4° las decenas del decímetro cuadrado?

645. ¿Con relación al decámetro cuadrado, ¿qué son: 1° los décimos del hectómetro cuadrado; 2° las decenas del kilómetro cuadrado; 3° las decenas del decímetro cuadrado?

646. ¿Qué fracción del hectómetro cuadrado representan: 1° 1 250 m²; 2° 75 dam²; 3° 50 dm²?

647. ¿Cuál es la unidad de las medidas agrarias?

648. ¿A qué múltiplo del metro cuadrado equivale el área? —la hectárea— la centiárea?

649. ¿Qué parte de la hectárea representan: 1° 1 250 m²; 2° 25 dm²; 3° 1/10 de m²?

650. ¿Qué parte del decámetro cuadrado representan: 1° 50 áreas; 2° 0 a. 005; 3° 20 cm²?

651. ¿Cuáles son las medidas efectivas que se usan para medir las superficies?

652. ¿Cuál es la unidad de las medidas de volumen?

653. Con relación al metro cúbico, ¿qué son: 1° los decímetros cúbicos; 2° los centímetros cúbicos; 3° los milímetros cúbicos?

654. ¿Cuáles son las medidas efectivas que se usan para valuar los volúmenes?

655. ¿Cuál es la unidad de las medidas de capacidad?

656. ¿Qué son, respecto al metro cúbico, cada uno de los múltiplos y submúltiplos del litro?

657. ¿Cuáles son las medidas efectivas de capacidad?

658. ¿Cuál es la unidad usual de peso?

659. ¿Cuál es la mayor unidad de peso?

660. ¿El peso de qué volumen de agua pura representa cada uno de los múltiplos del gramo?

661. ¿Qué volumen de agua pura pesa: 1° un quintal métrico; 2° una tonelada métrica?

662. ¿Qué se llama densidad de un cuerpo?

663. ¿Cómo se encuentra la densidad de un cuerpo, siendole dados su volumen y su peso?

664. ¿Cómo se encuentra el peso de un cuerpo, cuando se conoce su volumen y su densidad?

665. ¿Cómo se encuentra el volumen de un cuerpo, conociendo su densidad y su peso?

666. ¿Cuál es la unidad de las medidas monetarias?

667. ¿Qué es ley, en las monedas?

668. En igualdad de valor: ¿1° cuántas veces más pesa la moneda de plata que la de oro; 2° cuántas veces más pesa la moneda de bronce que la moneda de oro y la de plata?

669. En igualdad de peso. ¿1° cuántas veces más vale la moneda de oro que la de plata; 2° cuántas veces más vale la moneda de oro que la de bronce?

PROBLEMAS

1° Medidas de longitud

670. Cuando el metro de paño vale \$ 4,20, ¿a cómo se vende: 1° el decímetro; 2° el centímetro; 3° 60 centímetros?

671. Se ha medido la distancia de dos pueblos con un decámetro que tiene 10^m 052, y se ha encontrado de 4350 m. Calcúlese la verdadera distancia.

672. Se ha medido una pieza de tela con un metro ya gastado, y que no tenía más que 98 cm.; la longitud encontrada es de 94^m 50. ¿Qué pérdida sufre el comprador, si la tela le ha sido dada a \$ 4 el metro?

673. Las ruedas de una locomotora miden 5^m 65 de circun-

ferencia; las de los vagones tienen 2^m 60. ¿Cuántas vueltas dará cada una de estas ruedas al recorrer una distancia de 315 km?

674. Hernando ha andado durante 15 minutos al paso gimnástico y durante 45 minutos al paso ordinario. Se pregunta qué camino ha recorrido, sabiendo que el paso gimnástico equivale a 0^m 80 y el paso ordinario, a 0^m 75; se sabe además que en un minuto se dan 170 pasos gimnásticos o 115 pasos ordinarios.

675. En 4 minutos un peón recorre 5 hm. mientras otro recorre 6 en 5 minutos. ¿Cuál de los dos anda más ligero, y qué distancia los separará al cabo de 8 horas de marcha, si ambos salen del mismo punto y andan en la misma dirección?

676. Un automóvil recorre 8^m 9^m 4^m por minuto. ¿Cuál es, en metros, su velocidad por segundo, y cuántos kilómetros habrá recorrido al cabo de 6 h. 5?

677. Se ha trazado un mapa en la escala de $\frac{1}{320\,000}$. ¿Qué

distancia en el terreno representa una longitud de 0^m 70 en el mapa; y qué longitud representará en el mapa un viaje de 240 kilómetros?

678. Una de las ruedas de una bicicleta ha dado 5 490 vueltas y tiene 0^m 75 de diámetro; dígame el camino recorrido.

2º Medidas de superficie

679. Ambrosio compra una quinta de 5 hectáreas 7 centiáreas en \$ 5 600; ¿a cómo le sale el metro cuadrado?

680. Los $\frac{5}{7}$ de una hectárea de terreno importan \$ 680; ¿cuánto costarán 23 áreas 6 centiáreas?

681. Un terreno de 5 hectáreas 75 centiáreas, que ha sido vendido a razón de 80 centavos el metro cuadrado, había costado \$ 1 527 la hectárea. ¿Cuánto se ha ganado en esta venta?

682. Se ha abierto un sendero de 450 metros de largo por 0^m 40 de ancho en un terreno tasado en \$ 40 el área; ¿cuánto vale el sendero?

683. Un sendero de 0^m 50 de ancho ha sido abierto en un terreno tasado en \$ 35 el área, y se han pagado por él 75,60. ¿Cuál es el largo de este sendero?

684. Para edificar una casa, se ha comprado un terreno por \$ 9 000, a razón de \$ 4 el metro cuadrado. Uno de los lados de este terreno rectangular mide 72 metros. ¿Cuál es la otra dimensión?

685. Se han pintado al óleo las 4 paredes de una sala de 3^m 80 de alto y de 5^m 60 de ancho. Se han pagado \$ 34,47 por este trabajo, a razón de 24 centavos el metro cuadrado. ¿Cuál es la longitud de la sala?

686. Habiéndose medido un campo con una cadena de agrimensor que sólo tenía 9^m 96, han resultado 3 hectáreas 16 áreas 20 centiáreas. ¿Cuál es la extensión real del campo?

687. Los cinco lagos mayores de los E. U. tienen las superficies siguientes: el lago Superior, 32 000 millas cuadradas; el lago Michigan, 23 000 millas cuadradas; el lago Hurón, 24 000 millas cuadradas; el lago Erie, 7 800 millas cuadradas, y el lago Ontario, 6 900 millas cuadradas. Sabiendo que la milla cuadrada equivale a 259 hectáreas, dígame, en km^2 , en cuánto la superficie del mar Caspio, que es de 400 000 km^2 , pasa la de los 5 lagos.

688. Para entarimar un cuarto de 3^m 50 de largo por 4 m. de ancho, se emplean tablas de 3 m. de largo por 0^m 10 de ancho. ¿Cuántas tablas se necesitarán, y cuál será el precio del metro cuadrado, si el entarimado importa \$ 50?

689. Un campo rectangular de 155 m. por 38,5 que vale \$ 7 el área ha de trocarse por un terreno que vale \$ 500 la hectárea. ¿Cuál será la longitud de este terreno si se lo toma en un campo de 84 m. de ancho?

690. Leoncio ha comprado, a razón de \$ 12 el área, un terreno rectangular cuya longitud es el doble de la anchura, y cuyo perímetro tiene 600 m. Hállese el precio del terreno.

691. Hállese el área de un triángulo rectángulo cuyos catetos tienen 8^m 25 y 2^m 50.

692. El área de un trapecio es de $2\,040^m$ 60; su altura tiene 15 m y la base inferior 56^m 20. Calcúlese la base superior.

693. Un prado de forma rectangular, que tiene 530^m 40 por 248^m 50, se vendió a \$ 28,75 los 500 metros cuadrados. Hállese el precio de ese prado.

694. Se quiere pintar las paredes de una sala que tiene 18 m. de largo, 9^m 50 de ancho y 4^m 50 de alto; dicha sala tiene 6 ventanas de 2 m por 1^m 40. ¿Cuál será el importe del trabajo, si el metro cuadrado se paga a \$ 0,35?

695. ¿Cuántas baldosas en forma de exágono regular de 0^m 80 de lado se necesitan para embaldosar una habitación de 6^m 50 por 4^m 72?

3º Medidas de volumen

696. Una viga de 108 decímetros cúbicos de volumen ha costado \$ 15; ¿a cómo sale el metro cúbico?

697. ¿Cuál es el volumen de una pared que tiene 4^m 50 de largo, 25 cm. de espesor y 3^m 20 de alto?

698. Para construir una pared de 683^m 595 se emplean ladrillos que, comprendidas las juntas, tienen 1 022 cm³. ¿Cuántos millares se necesitarán, y cuál será el gasto, si el ciento importa \$ 1,40?

699. Un trozo cúbico de hielo tiene 1^m 20 de lado; ¿qué peso será menester poner sobre el trozo para que su superficie superior venga a flor de agua, siendo la densidad de la nieve de 0,92?

700. Las dimensiones de un ladrillo son las siguientes: largo 23 cm., ancho 10 cm., alto 58 mm.; ¿cuántos ladrillos hay en un montón de 34 m³?

701. En un patio rectangular, que tiene 14 m. por 8^m 75, debe extenderse un capa de arena de 3 cm. de espesor. Calcúlese el número de metros cúbicos de arena que se necesitarán, y el gasto, en el supuesto de que 735 dm³ de arena cuesten \$ 0,95.

702. Hállese el volumen de un aljibe de forma cilíndrica, siendo de 4^m 50 el radio de la base, y de 3^m 60 la altura.

703. Tres bolas metálicas que tienen por diámetro, respectivamente 1^m 20, 30 cm. y 40 cm., han de fundirse en una sola; ¿Cuál será su diámetro?

704. Una barra cilíndrica de hierro de 2 m. de largo termina por sus extremos en punta cónica. Cada uno de estos conos tiene 25 cm. de altura, y su diámetro, que es el de la parte cilíndrica, tiene 9 cm. Hállese el volumen de la barra.

705. La más alta de las pirámides de Egipto tiene por base un cuadrado de 233 m. de lado, y su altura es de 146 m. Calcúlese: 1º su volumen; 2º la longitud de la pared que se podría edificar con sus materiales, siendo de 4 m. la altura de esta pared, y de 35 cm. su espesor.

4º Medidas de capacidad y de peso

706. Un mechero consume un hl. de gas por hora. Si el m³ de gas importa \$ 0,30, ¿cual será el gasto anual de 3 mecheros encendidos 4 horas por día?

707. ¿Cuántos dobles decilitros de líquido hay que verter en un decalitro para llenarlo hasta la mitad?

708. Tres grifos dan a un aljibe: el primero da 3 litros por minuto, el segundo 12 litros cada 5 minutos; y el tercero, medio hectolitro cada 16 minutos. El aljibe se llena en 10 horas por los tres grifos simultáneamente. Dígase su capacidad en metros cúbicos.

709. Una vasija llena de aceite pesa 17 kg. 250; vacía pesa 2 kg. 610. ¿Cuál es su capacidad, siendo la densidad del aceite de 0,915?

710. La densidad del petróleo es de 0,847. ¿Cuál es la capacidad de un bote que, lleno de este aceite, pesa 40 kg. 840, y vacío, 9 kg. 300?

711. Si un litro de alcohol importa 76 centavos, ¿cuánto vale un kilogramo, siendo la densidad del alcohol de 0,84?

712. Un trozo de hierro fundido, sumergido en una vasija llena de agua, desaloja 2 lit. 35 centil. ¿Cuánto pesa el trozo de hierro, si su densidad es de 7,200?

713. ¿Cuánto pesa un trozo de hielo de 12^m 640, si la densidad del hielo es de 0,92?

714. Se ha puesto un pedazo de plomo en una vasija llena de agua pura. El peso del agua derramada es de 650 gr. La vasija con todo su contenido pesa ahora 6 kg. 7288 más que antes. ¿Cuál es la densidad del plomo?

715. Braulio vende 1 958 kg. de patatas a razón de \$ 4,50 el quintal métrico; ¿qué suma recibirá en pago?

716. Se sabe que el aire pesa 770 veces menos que el agua, y que la densidad del oxígeno es igual a 1,1057 vez la del aire. ¿Cuánto pesa un litro de este gas?

717. ¿Cuál es la densidad de la plata amonedada a la ley de 0,835, sabiendo que la densidad de la plata es de 10,47, y la del cobre, de 8,85?

718. Un lechero vende cada día 20 litros de leche que pesan 20 kg. 510. Si la densidad de la leche es de 1,03, dígase el fraude cometido por el lechero.

719. No se conoce la capacidad de un barril, pero se sabe que lleno de vino de Málaga, pesa 81 kg. 860, y lleno de alcohol, pesa 69 kg. 098. Calcúlese: 1º la capacidad del barril; 2º su peso, vacío. Densidad del Málaga: 0,99; densidad del alcohol: 0,81.

720. Se gasta una suma de \$ 158,10 para comprar frijoles en \$ 3,40 el doble dal.; ¿a cómo debe venderse el litro para ganar \$ 65,10?

721. Un comerciante ha vendido por \$ 3 528 el trigo que había comprado por \$ 2 572,50; ¿cuántos hl. tenía, si ha ganado \$ 3,25 por 100 kg. y si el hl. de trigo pesa 75 kg.?

5.º Medidas monetarias

722. Cuántos gramos de cobre deben añadirse a 200 gr. de plata para obtener una ligación con 0,9 de ley?

723. ¿Cuántos gramos de cobre deben añadirse a 200 gr. de plata para obtener una ligación con 0,835 de ley?

724. ¿Qué cantidad de plata pura se debe emplear para acuñar: 1.º 250 piezas de 5 pesetas; 2.º 500 piezas de 2 pesetas?

725. ¿Cuánto vale una barra de oro que tiene la ley de 0,900, y en la que han entrado 12 gramos de cobre?

726. Un cáliz de plata, ley de 0,800, pesa 950 gr.; ¿cuál es el peso del metal fino que entra en la liga?

727. Hállese la ley de una liga formada de 11 gr. $\frac{2}{3}$ de oro, y de 2 gr. $\frac{5}{7}$ de cobre.

728. ¿Cuál es el valor de la corona de plata, moneda de Inglaterra, cuyo peso es de 28 gr. 250, y la ley 0,925?

729. Una cadenilla de oro pesa 250 gramos y encierra 40 gr. de cobre; ¿cuál es su ley, y cuál su valor al precio del oro amonedado?

730. Una vasija cuyo peso es de 123 gramos y la capacidad 35 centilitros, se llena de agua destilada. ¿Qué suma en plata se necesita para equilibrarla?

731. Una suma en piezas de plata pesa 2978 gr. 03; ¿cuál es el peso de la misma suma: 1.º en monedas de oro; 2.º en monedas de bronce?

732. Se han fundido juntos 100 duros de España con 100 táleres de Prusia. El duro, a la ley de 0,9, pesa 25 gr., y el táler, a la ley de 0,750 pesa 22 gr. 271. Hállese la ley de la liga resultante.

733. En el supuesto de que un hombre puede llevar 75 kg., ¿qué suma podría llevar: 1.º en oro; 2.º en plata?

734. Un obrero cuyo jornal es de \$ 3,8 trabaja 6 días por semana; después de haber trabajado 52 semanas ha recibido una suma en plata que pesa 5396 gr. Hállese el número de días en que no trabajó, y cuál fué la suma que ahorró si sus gastos diarios alcanzaron \$ 1,50.

NUMEROS COMPLEJOS

Nociones generales.

401. Definición.—*Números complejos* son los concretos que constan de varias partes de diferente especie, pero que se refieren a una misma medida, y cuyo sistema de numeración no es decimal.

Así, 3 años 4 meses 15 días; y 43 grados 18 minutos 17 segundos, son números complejos.

Los números complejos se emplean en los pesos y medidas de los países que aún no han adoptado el sistema métrico, y sobre todo en la *medida del tiempo*, y en la *división de la circunferencia y valuación de los ángulos*¹.

402. Medida del tiempo.—El año civil se divide en 365 *días* repartidos en 12 *meses*; el día se divide en 24 *horas*; la hora, en 60 *minutos*, y el minuto, en 60 *segundos*.

Las subdivisiones de los segundos se escriben ordinariamente en quebrado decimal. Los días, horas, minutos y segundos se indican respectivamente por las letras *d, h, m, s*; así, 3 días 15 horas 20 minutos y 30 segundos, se escriben: 3^d 15^h 20^m 30^s.—El año *bisiesto* tiene 366 días; por convención, son bisiestos los años cuyo milésimo es divisible por 4. Los *años seculares* no son bisiestos sino cuando las centenas del milésimo son divisibles por 4. Así, los años 1800 y 1900 no fueron bisiestos porque 18 y 19 no son divisibles por 4; pero lo será el año 2000.

Entre comerciantes, se suele considerar el año de 360 días; entonces se llama *año comercial*.

(1) Para las medidas antiguas y extranjeras, véanse los cuadros pág. 226, y al fin de la obra.

403. División de la circunferencia.— 1º División sexagesimal.—En geometría se divide la circunferencia en 4 *cuadrantes*; el cuadrante, en 90 *grados*; el grado, en 60 *minutos*, y el minuto, en 60 *segundos*. Las fracciones de segundos se escriben en forma de quebrados comunes o decimales.

Los grados, minutos y segundos se indican respectivamente por los signos °, ', "; así 17 grados 32 minutos 19 segundos, se escriben: 17° 32' 19".

404. 2º División centesimal.—Hoy día tiende a generalizarse el dividir la circunferencia en 400 partes iguales, llamadas *grados centesimales*; cada grado se divide en 100 *minutos de 100 segundos decimales*.

Luego 1 grado sexag. vale $\frac{400}{360}$ o $\frac{10}{9}$ de grado centesimal.

1 minuto o 1 segundo sexag. vale $\frac{100}{60}$ o $\frac{5}{3}$ de min. o de seg. cent.

REGLA.—1º Para pasar del sistema ordinario al sistema centesimal, se multiplica por $\frac{10}{9}$ el número de grados, y por $\frac{5}{3}$ el número de minutos o de segundos sexagesimales.

2º Inversamente para pasar del sistema centesimal al sistema sexagesimal, se multiplica respectivamente por $\frac{9}{10}$ y $\frac{3}{5}$.

Ejemplo: Transformar 18° 15' 47" sexagesimales en grados, minutos y segundos centesimales.

$$18^\circ = 18 \times \frac{10}{9} = 20 \text{ grados centesimales.}$$

$$15' = 15 \times \frac{5}{3} = 25 \text{ minutos centesimales.}$$

$$47'' = 47 \times \frac{3}{5} = 28 \frac{2}{5} = 28 \text{ segundos centesimales } 1/3.$$

Luego 18° 15' 47" = 20 grados 25 minutos 78 segundos 1/3 centesimales.

§ I.—Transformaciones de los números complejos.

405. 1ª Transformación.—Convertir un número complejo a incomplejo equivalente, de orden inferior.

Redúzcanse a segundos 13° 17' 18".

$$\begin{array}{r} 13^\circ \\ \times 60 \\ \hline 780' \\ 60 \times 13 = 780'; \quad 780' + 17' = 797'; \\ + 17' \\ \hline 797' \\ 1 \text{ minuto vale } 60'', \text{ los } 797' \text{ valdrán} \\ 60 \times 797 = 47\,820'', \\ \times 60 \\ \hline 47\,820'' \\ + 18'' \\ \hline 47\,838'' \end{array}$$

y añadiendo los 18" dados, tenemos 47 838".

406. Nota.—También puede expresarse este resultado en quebrado ordinario de grados o de minutos: en efecto, puesto que 1 grado vale 60 × 60 o 3 600 segundos, podemos escribir 47 838" bajo la forma de

$$\frac{47\,838}{3\,600} \text{ de grado, o también } \frac{47\,838}{60} \text{ de minuto.}$$

407. REGLA.—Para convertir un número complejo a incomplejo equivalente de orden inferior, se reducen sus unidades de orden superior al orden inferior inmediato, y se suman con las de este orden que haya en el complejo; se hace lo mismo con esta suma, y así sucesivamente.

Aplicación.—Reducir a onzas, 10 arrobas, 15 libras, 10 onzas.

	10 arrobas
× 25	250 libras
	+ 15
	265
× 16	1590
	265
	4240 onzas
	+ 10
	4250 onzas

1 arroba vale 25 libras, 10 arrobas valdrán $25 \times 10 = 250$; $250 + 15 = 265$;
1 libra vale 16 onzas, 265 libras valdrán $16 \times 265 = 4\ 240$; $4\ 240 + 10 = 4\ 250$.

408. Transformación.—Convertir un número incomplejo de especie inferior a complejo equivalente.

Conviértanse 3 745 314 segundos a días, horas, minutos y segundos.

3 745 314	60			
145	62 421	60		
25 3	2 42	104	24	
1 31	114		4 d	
Residuo 54 s	Residuo 21 m	Residuo 8 h		

Este número contendrá tantos minutos cuantas veces 60 segundos estén contenidos en 3 745 314 segundos; resultan 62 421 m. con un residuo de 54 s. Del mismo modo, encontraremos tantas horas cuantas veces 60 minutos estén contenidos en 62 421; resultan 104 h. con un residuo de 21 m. En fin habrá tantos días cuantas veces 24 horas estén contenidas en 104; resultan 4 días con un residuo de 8 h.

Luego, $3\ 745\ 314\ s = 4^d\ 8^h\ 21^m\ 54^s$.

409. REGLA.—Para reducir un número incomplejo a complejo equivalente, se reduce el incomplejo propuesto a la especie superior inmediata; el cociente se reduce a la especie inmediata superior siguiente, y así sucesivamente, hasta obtener un cociente de la especie superior del complejo, o bien un cociente cero. El último cociente y los residuos de las divisiones respectivas componen el complejo equivalente al incomplejo propuesto.

Aplicación.—Reducir 56 845 farthings a complejo.

Ya que 4 farthings valen 1 penique, que 12 peniques valen 1 chelín, y que 20 chelines valen 1 libra esterlina, tendremos:

56 845	4			
16	14 211	12		
8	2 2	1 184	20	
4	1 01	184	59 £	
5	51	4ch.		
1f.	3p.			

Luego, $56\ 845\ f. = 59\ £\ 4\ ch.\ 3\ p.\ 1\ f.$

§ II.—Operaciones con los números complejos.

Con los números complejos se ejecutan las mismas operaciones que con los números ordinarios, con tal que aquéllos se conviertan previamente en unidades de la menor denominación.

En la suma y en la resta, los datos han de ser homogéneos.

Adición.

410. Háganse las sumas siguientes.

1 ^{er} Ejemplo			2 ^o Ejemplo		
(1	(1		(1	(2	
17 ^t	14 ^h	35 ^m	17 ^o	35 [']	38 ^{''}
39	8	50	31	18	58
53	13	23	13	47	54
110 ^d	12 ^h	48 ^m	62 ^o	42 [']	30 ^{''}

En el 1^{er} ejemplo, empezamos por la derecha. La suma de los minutos da 108^m, que valen 1 hora que se

lleva a la columna siguiente, y 48 minutos que se escriben; la suma de las horas da 36^h , que valen 1 día que se lleva a la columna siguiente, y 12^h que se escriben; la suma de los días da 110^d .

La operación es idéntica en el 2º ejemplo.

411. REGLA.—Para sumar los números complejos, se colocan unos debajo de otros de modo que se correspondan las unidades de igual denominación. En seguida, empezando por la derecha, se suman las unidades de cada columna; del total de la primera columna se sacan las unidades de la denominación inmediatamente superior, si las hubiere, para agregárselas; se escriben debajo de la raya las que sobren, o cero en el caso de no quedar ninguna. Se continúa hasta la última columna, con lo cual se termina la operación.

Sustracción.

412. Efectúense las sustracciones siguientes:

1º Ejemplo	2º Ejemplo
131° 17' 49"	36 ^{sem} 3 ^d 12 ^h 43 ^m
19° 12' 34"	9 ^{sem} 3 ^d 15 ^h 47 ^m
<hr/>	<hr/>
112° 5' 15"	26 ^{sem} 6 ^d 20 ^h 56 ^m

Para el 1º ejemplo no hay dificultad alguna.

Análisis del 2º ejemplo. Empezando por la derecha, noto desde luego que 47 m, no pueden restarse de 43, por lo cual tomo de 12 horas 1 hora, que vale 60 minutos, los cuales añadidos a los 43, dan 103; $103 - 47 = 56$. Pasando a las horas, veo que no se pueden restar 15 horas de las 11 que quedan. Tomo de 3 días 1 día, que vale 24 h., las cuales añadidas a 11 dan 35 h.; $35 - 15 = 20$ h., y así sucesivamente,

Luego la resta es $26^{\text{sem}} 6^d 20^h 56^m$.

413. REGLA.—Para restar los números complejos, se escribe el sustraendo debajo del minuendo de modo que se correspondan las unidades de la misma denominación, y empezando por la derecha, se restan sucesivamente las unidades del sustraendo de sus correspondientes del minuendo. Si un número del sustraendo fuere mayor que su correspondiente del minuendo, se agrega a éste una unidad de la

denominación inmediata superior, reduciéndola a unidades de la denominación que se resta; y al restar la denominación siguiente, se quita del minuendo la unidad tomada ya, o se la añade al sustraendo para que haya compensación. Se continúa del mismo modo la operación hasta que se hayan restado todos los términos.

Multiplicación.

414. Multiplíquense 4 años 10 meses 18 días por 7.

4 ^a 10 ^m 18 ^d	Empezando la operación por la derecha, digo: 7 veces 18 días dan
<hr/>	126 ^d , que valen 4 ^m 6 ^d ; escribo 6
34 ^a 2 ^m 6 ^d	y llevo 4; 7 veces 10 meses dan
	70 ^m más 4 que llevo, son 74 o 6
	años 2 meses; escribo 2 y llevo 6; por fin, 7 veces
	4 años dan 28 ^a , y 6 que llevo son 34 años, que completan el producto.

415. REGLA.—Para multiplicar un número complejo por otro incomplejo, se multiplica cada especie de unidad del multiplicando por el multiplicador, se sacan de cada producto las unidades que contenga de la especie inmediatamente superior, partiendo dicho producto por el número de unidades que contiene ésta de la especie inferior. Si queda residuo, se lo escribe debajo de la raya en su columna respectiva, y se lleva el cociente para sumarlo con el producto de la especie siguiente.

416. Nota.—Cuando se ha de multiplicar un número complejo por otro, se suele reducir los dos números a incomplejos de la última especie. Entonces el multiplicando es un número entero, y el multiplicador un número fraccionario cuyo denominador indica cuántas veces el orden menor está contenido en el mayor.

Ejemplo.—Multiplíquense 6 horas 25 minutos 4 segundos, por 3º 42'

6^h 25^m 4^s valen 23 104 segundos.

3º 42' valen $3 \times 60' + 42'$, o sea $\frac{222}{60}$ de grados.

Multiplicando 23 104 por $\frac{222}{60}$, el producto representará segundos.

2º Ejemplo.—Dividanse 6 horas 25 minutos 4 segundos por 2º 25'.

6^h 25^m 4^s dan 23 104 segundos.
2º 25' dan 145 minutos.

Hay que dividir $\frac{23\ 104}{3\ 600}$ por $\frac{145}{60}$.

$$\frac{23\ 104}{3\ 600} : \frac{145}{60} = \frac{23\ 104 \times 60}{3\ 600 \times 145} = 2 + \frac{1\ 426}{2\ 175}$$

CORRESPONDENCIA DE LAS MEDIDAS METRICAS CON LAS ANTIGUAS MEDIDAS CASTELLANAS, Y VICEVERSA

§ I. Medidas de longitud.

1 legua = 3 millas	1 pie = 12 pulgadas.
1 cuadra = 100 varas.	1 palmo = 9 pulgadas.
1 milla = 33 $\frac{1}{3}$ cuadras.	1 pulgada = 12 líneas.
1 vara = 3 pies	1 dedo = 9 líneas.
	1 línea = 12 puntos.

METRICAS	ANTIGUAS	LEGUAS	METRICAS
1 kilómetro.	11 cuadras 968.	1 legua españa.	5 km. 572 m.
1 hectómetro.	1 cuadra 1968.	1 legua métrica.	5 km.
1 decámetro.	11 varas 968.	1 cuadra.	83 m. 60.
1 metro.	Sp. 7 pul. 0,758 lín.	1 vara.	0,836 m.
1 decímetro.	4 pul. 3,7236 lín.	1 pie.	0,2786 m.
1 centímetro.	5,1679 lín.	1 pulgada.	0,0252 m.
1 milímetro.	0,5167 lín.	1 línea.	0,001935 m.

§ II. Medidas agrarias y de superficie

1 leg. cuad. = 10 000 cuad ²	1 caballería = 16 cuadras ² .
1 yugada = 50 fanegadas	1 cuadra ² = 4 solares.
1 fanegada = 576 estad ² .	1 solar = 2 500 varas ² .
1 celemín = 48 —	1 vara ² = 9 pies ² .
1 cuartillo = 12 —	1 pie ² = 144 pulg ² .
1 aranzada = 400 —	1 pulgada ² = 144 líneas ² .
1 estadal cuad. = 16 varas ²	1 línea ² = 144 puntos ² .

(1) Las antiguas medidas castellanas han sido tomadas de las leyes 1, 2, 3 y 4 del tit. 13, lib. 9º de la *Recopilación Castellana*; o leyes 1, 2, 3, 4 y 5 del tit. 9, lib. 9º de la *Novísima Recopilación*.

La vara de Burgos que equivale a 0 m. 836, sirve de base al cálculo de estas tablas.

METRICAS	ANTIGUAS	ANTIGUAS	METRICAS
1 Mm ² .	3,22 leguas ² .	1 legua ² .	3105,5 hectáreas.
1 km ²	155,289 fans.	1 yugada.	32,298 hectár.
1 hm ² o hectárea.	894,469 estad.	1 caballería.	11,1798 hectár.
1 dam ² o área.	143,0828 var ² .	1 cuadra ² .	69,8737 áreas.
1 m ² o centiárea.	1,4308 var ² .	1 fanegada.	64,596 áreas.
1 dm ² .	0,1288 pie ² .	1 aranzada.	44,729 áreas.
1 cm ² .	0,1854 pulg ² .	1 solar.	17,4684 áreas.
1 mm ² .	0,2670 lín ² .	1 vara ² .	0,6988 m ² .

III. Medidas de volumen

1 vara cúbica = 27 pies cúbicos.

1 pie cúbico = 1728 pulgadas cúbicas.

1 pulgada cúbica = 1728 líneas cúbicas.

METRICAS	ANTIGUAS	ANTIGUAS	METRICAS
1 m ³ .	1,711516 var ³ .	1 vara ³ .	0,584277 m ³
1 dm ³ .	79,8527 pul ³ .	1 pie ³ .	0,021624 m ³
1 cm ³ .	0,079852 pul ³ .	1 pulgada ³ .	0,012519 dm ³
1 mm ³ .	0,137985 lín ³ .		

IV. Medidas de capacidad

(Para áridos).

1 cahiz = 12 fanegas. | 1 celemin = 4 cuartillos.
 1 fanega = 4 cuartillas. | 1 cuartillo = 4 ochavos.
 1 cuartilla = 3 celemines. | 1 ochavo = 4 ochavillos.

(Para líquidos)

1 moyo = 16 cántaras. | 1 azumbre = 4 cuartillas.
 1 cántara = 8 azumbres. | 1 cuartillo = 4 copas.

METRICAS	ANTIGUAS	ANTIGUAS	METRICAS
1 litro.	3,46 ochavos.	1 cahiz.	666 lit.
1 decalítro.	2,162 celem.	1 fanega.	55,5 lit.
1 hectolítro.	1,801 faneg.	1 cuartilla.	13,875 lit.
1 kilolítro.	1 cah. 8 fan. 018	1 celemin.	4,625 lit.
1 decilítro.	0,346 ochavos.	1 cuartillo.	1,156 lit.
1 centilítro.	0,0346 ochavos.	1 ochavo.	0,289 lit.
2,5824 hl.	1 moyo.	1 azumbre.	2,016 lit.
16,140 lit.	1 cántara.	1 cuartillo.	0,504 lit.

V. Medidas de peso

METRICAS	ANTIGUAS	ANTIGUAS	METRICAS
1 gramo.	20,025 granos.	1 tonelada.	920 kg.
1 decagramo.	0,3478 onz.	1 quintal.	46 kg.
1 hectogramo.	3,478 onz.	1 arroba.	11,5 kg.
1 kilogramo.	2,173 lib.	1 libra.	460 gr.
1 miriagramo.	21,738 lib.	1 onza.	28,75 gr.
1 quint. métr.	2,1738 quint.	1 adarme.	1,796 gr.
1 tonelad. métr.	21,738 quint.	1 grano.	0,0499 gr.
1 decigramo.	2,002 gran.		
1 centigramo.	0,2 gran.	1 onza.	37,8337 gr.
1 miligramo.	0,02 gran.	1 dracma.	4,7292 gr.
		1 escrúpulo.	1,5764 gr.
		1 óbolo.	0,7882 gr.
		1 grano.	0,0657 gr.

Libra inglesa (*avoirdupois*) = 453 gr. 59.

Quintal inglés = 112 libr. ingl. = 50 kg. 80.

Tonelada inglesa de 20 quint. ingl. = 10 quint. métr. 16.

(Ordinarias)

1 tonelada = 20 quintales. | 1 onza = 16 adarmes.
 1 quintal = 4 arrobas. | 1 adarme = 3 tomines.
 1 arroba = 25 libras. | 1 tomin = 12 granos.
 1 libra = 16 onzas.

(Para el aceite)

1 arroba	= 25 libras.
1 cuartilla	= $6\frac{1}{4}$ libras.
1 libra	= 4 panillas.

(Pesas de las farmacias.)

1 libra	= 12 onzas	1 escrúpulo	= 2 óbolos.
1 onza	= 8 dracmas	1 óbolo	= 12 granos.
1 dracma	= 3 escrupulos		

(Para el oro)

1 libra	= 2 marcos.
1 marco	= 8 onzas.
	1
1 onza	= $6\frac{1}{4}$ castell.
	4
1 castellano	= 8 tomines.
1 tomin	= 3 quilates.
1 quilate	= 4 granos.

(Para la plata)

1 libra	= 2 marcos.
1 marco	= 8 onzas.
1 onza	= 8 ochavos.
1 ochavo	= 2 adarmes.
1 adarme	= 3 tomines.
1 tomin	= 12 granos.

(Para las piedras preciosas y las perlas).

1 onza castellana	= 140 quilates.
1 quilate	= 4 granos

RELACION

ENTRE LA VARA, EL METRO Y LA YARDA

La vara, antigua unidad lineal en España, se usa todavía a menudo en aquel país y en los Estados Hispano-Americanos.

El metro es la unidad lineal en Francia y en los países que han adoptado el sistema métrico decimal.

La yarda es la medida lineal en Inglaterra y sus colonias, y en los Estados Unidos de América.

1 vara	= 0 ^m 836	= 0 yardas 914
1 metro	= 1 vara 196	= 1 yarda 09.
1 yarda	= 0 ^m 914	= 1 vara 09.

Reducción de metros a varas y viceversa.—1° Se reducen metros a varas, multiplicando el número de metros por 1,196, porque un metro iguala a 1 vara 196.

Así, en 100 metros hay $100 \times 1,196 = 119$ varas 60.

Por lo tanto, en cada 100 metros hay un aumento de 19 varas 60, o sea un 19,60%, y por exceso el 20%, como se acostumbra en el comercio, para mayor facilidad.

Luego, para reducir metros a varas, se añade al número de metros el 20% o $\frac{1}{5}$ de los mismos.

Así pues, en 500 metros, por ejemplo, hay:

$$500 + \frac{500}{5} = 600 \text{ varas.}$$

2° Se reducen varas a metros, multiplicando el número de varas por 0^m836, porque una vara iguala a 0^m836.

Así en 600 varas, hay:

$$600 \times 0,836 = 501^m60.$$

Sentado ya el principio de que en 100 metros hay 120 varas, por medio de una regla de tres se pueden encontrar los metros que hay en 600 varas.

En 120 varas hay 100 m.

$$600 \quad \text{---} \quad x$$

$$100 \times 600$$

de donde $x = \frac{100 \times 600}{120} = 500$ m., resultando una dife-

rencia de 1^m60 por las decimales despreciadas.

Luego, para reducir varas a metros, se multiplican las va-

$$\text{ras por } \frac{100}{120} \text{ o } \frac{5}{6}.$$

Reducción de metros a yardas y viceversa.—1° Se reducen metros a yardas, multiplicando el número de metros por 1,09 porque en un metro hay 1 yarda 09.

Así, en 100 metros hay $100 \times 1,09 = 109$ yardas.

Por consiguiente, en cada 100 metros hay un aumento de 9 yardas, o sea un 9%.

Luego, para reducir metros a yardas, se añade al número de metros el 9% de los mismos.

Así pues, en 500 metros, por ejemplo, hay $500 + (5 \times 9) = 545$ yardas.

2° Se reducen yardas a metros, multiplicando el número de yardas por 0^m914 que vale una yarda.

Así, en 545 yardas hay $545 \times 0,914 = 498^m13$, resultando una diferencia de 1^m87 por haber prescindido de las decimales.

Sentado el principio de que en 100 metros hay 109 yardas, para saber el número de metros contenidos en 545 yardas, por ejemplo diremos:

En 109 yardas hay 100 m.

$$\begin{array}{r} 545 \quad - \quad x \\ 100 \times 545 \end{array}$$

$$\text{de donde } x = \frac{100 \times 545}{109} = 500 \text{ m.}$$

Luego, para reducir yardas a metros, se multiplica el número de yardas por 100, y se divide el producto por 109.

Reducción de yardas a varas y viceversa.—1° Se reducen yardas a varas, multiplicando el número de yardas por 1,09 porque una yarda vale 1 vara 09.

Así, en 100 yardas hay $100 \times 1,09 = 109$ varas.

De donde resulta que en cada 100 yardas hay un aumento de 9 varas, o sea un 9%.

Luego, para reducir yardas a varas se puede añadir al número de yardas su 9%.

Así, en 500 yardas, por ejemplo, hay

$$500 + (5 \times 9) = 545 \text{ varas;}$$

o lo que es lo mismo, multiplicar el número de yardas por 109 y dividir el producto por 100.

$$500 \times \frac{109}{100} = 545 \text{ varas.}$$

2° Se reducen varas a yardas, multiplicando el número de varas por 0 yardas 914 que vale una vara.

Así, en 545 varas hay $545 \times 0,914 = 498$ yardas 13, con una diferencia de 1 yarda 87 por haber prescindido de las decimales.

Sentado el principio de que en 100 yardas hay 109 varas, para encontrar el número de yardas que hay en 545 varas, por ejemplo, diremos:

En 109 varas hay 100 yardas

$$\begin{array}{r} 545 \quad - \quad x \\ 100 \times 545 \end{array}$$

$$\text{de donde } x = \frac{100 \times 545}{109} = 500 \text{ yardas.}$$

Luego, para reducir varas a yardas, se multiplica el número de varas por 100, y se divide el producto por 109.

Nota.—Por lo expuesto, se observa a primera vista que es enteramente idéntico el modo de reducir metros a yardas y yardas a varas, y viceversa el de reducir yardas a metros y varas a yardas. Esto proviene de que es una misma la relación entre el metro y la yarda, y entre la yarda y la vara.

En resumen, para reducir:

1° Metros a varas, se añade al número de metros el 20% o 1/5 de los mismos.

2° Varas a metros se multiplican las varas por $\frac{100}{120}$, o 5/6.

3° Metros a yardas, o yardas a varas, se añade al número de metros o de yardas el 9% de este número.

4° Yardas a metros, o varas a yardas, se multiplican las yardas o las varas por $\frac{100}{109}$.

PROBLEMAS

735. ¿Cuántos minutos hay en 1^a 7^m 28^d 16^h 37^m?

736. Redúzcanse los valores siguientes a la especie superior: 1° 16 452 segundos a grados; 2° 78 692 horas a años comunes; 3° 90 060 segundos a días.

737. ¿Cuál es el total de las cantidades siguientes: 1° 12 años 10^d 13^h 42^m 27^s; 2° 16 años. 102^d 18^h 24^m 36^s; 3° 19 años 8^d 21^h 54^m 57^s; 4° 23 años 13^d 19^h 49^m 48^s; 5° 29 años 18^d 23^h 58^m 56^s?

738. ¿Cuánto tiempo transcurrió entre el descubrimiento de América por Cristóbal Colón, el 12 de Octubre de 1492, y la muerte de este grande hombre, acaecida en Valladolid el 20 de Mayo de 1506?

739. ¿Cuánto tiempo ha transcurrido desde el 28 de Dbre. de 1856, a las 10 A.M. (antes del medio día), hasta el 16 de Enero de 1888, a las 4 P. M. (después del medio día)?

740. ¿Cuántos días hay desde el 10 de Marzo hasta el 8 de Nbre.

741. ¿Cuántos días hay desde el 15 de julio hasta el 23 de Enero?

742. Una persona nacida el 29 de Febrero de 1824, murió el 18 de Marzo de de 1864; ¿de qué edad murió, y cuántos aniversarios vió desde el día de su nacimiento?

743. Suponiendo que una persona nació en 29 de Febrero de 1788, ¿cuántos aniversarios de su cumpleaños hubo hasta el 29 de Febrero de 1840?

744. ¿Cuál es el producto de $7^a 264^d 23^h 47^m$ por 8?

745. Un sastre emplea $8^h 46^m 50^s$ en hacer un vestido; ¿cuánto tiempo se tardará en hacer 11 vestidos semejantes?

746. Redúzcanse $6^d 7^h 10^m 45^s$ a decimales de semana.

747. ¿Cuál es el valor de los 0,367 de año, en días, etc?

748. ¿Qué parte de 1 segundo es $\frac{1}{103608}$ de día?

749. ¿Cuántas horas, minutos y segundos dan los $\frac{9}{75}$ de un día?

750. ¿Cuáles son los $\frac{5}{13}$ de un año?

751. De los $\frac{3}{7}$ de 1 día réstense los $\frac{7}{9}$ de 1 hora.

752. Nueva York tiene $73^{\circ}57'45''$ de longitud O (meridiano de Greenwich); Brest $4^{\circ}29'45''$ también O. Si se manda un cable de Brest a Nueva York a las 4 de la tarde, ¿qué hora será en Nueva York cuando se entregue el cable al destinatario, en el supuesto de que transcurre 1 hora $\frac{1}{2}$ entre la expedición del cable y su entrega al destinatario?

753. Con las mismas condiciones, ¿a qué hora llegaría a Brest un cable enviado de Nueva York a las 9 y 45 de la mañana?

754. Nápoles y Nueva York tienen más o menos la misma latitud, y a esta distancia del polo la longitud del paralelo es de 30332 km. aproximadamente ¿Cuál es la distancia que media entre ambas ciudades, sabiendo que la longitud de Nueva York es de $73^{\circ}57'45''$ O, y la de Nápoles, de $14^{\circ}15'12''$ E (meridiano de Greenwich)?

755. ¿Qué hora es en Nápoles y en Nueva York cuando es mediodía en Greenwich? (Véase el problema precedente).

756. ¿Qué hora es en Greenwich y en Nápoles cuando es mediodía en Nueva York?

757. ¿Qué hora es en Nueva York cuando son las 11 de la noche en Nápoles?

758. ¿Cuál es la suma de los dos ángulos siguientes: de $27^{\circ} 35' 44''$ y $19^{\circ} 50' 28''$?

759. La suma de dos ángulos es 90° ; uno de ellos vale $18^{\circ} \frac{1}{2}$; ¿cuánto vale el otro?

760. Si catorce ángulos iguales tienen juntos $867^{\circ} 17' 45''$; ¿cuánto vale cada uno?

761. Se ha dividido una circunferencia en 17 partes iguales; ¿cuántos segundos tiene cada una de estas partes?

762. El año solar es de $365^d 5^h 48^m 47^s$; una lunación dura $29^d 12^h 44^m 3^s$. ¿Cuántas lunaciones hay en 18 años 11 días?

763. Si 30 cuartillas de trigo importan \$ 46,50, ¿a cómo resulta el hectolitro?

764. Redúzcanse 45 metros: 1° a varas; 2° a yardas.

765. Redúzcanse 1308 varas: 1° a metros; 2° a yardas.

766. Redúzcanse 1962 yardas: 1° a metros; 2° a varas.

767. La compra de 5 arrobas 2 libras 9 onzas de una mercadería ha importado \$ 138; ¿cuánto vale una arroba?

Parte IV

NUMEROS PROPORCIONALES

CAPITULO I

RAZONES Y PROPORCIONES

I. Razones

420. Definición.—Llámase *razón* o *relación* de dos números de la misma especie, el cociente de la división del primero por el segundo.

Así, la relación de 15 a 5 es $\frac{15}{5} = 3$;

la relación de 4 a 20 es $\frac{4}{20} = \frac{1}{5}$.

421. Relación de dos magnitudes de la misma especie es la medida de la primera, si se toma la segunda como unidad.

Así, cuando se dice que la relación de dos cantidades es 5, esto significa que la primera contiene 5 veces a la segunda. Si la relación entre dos cantidades es $\frac{7}{8}$, la primera no vale más que 7 veces la octava parte de la segunda, o los $\frac{7}{8}$ de la segunda.

422. Términos de la razón.—Los dos números que se comparan son los términos de la razón. El primer término se llama *antecedente*, y el segundo, *consecuente*.

Por ejemplo, en la razón $\frac{7}{8}$, 7 es el *antecedente*, y 8 el *consecuente*.

Como se escribe una razón en forma de *quebrado*, se llaman también sus términos: *numerador* y *denominador*.

423. Razones inversas.—Dos razones son *inversas*, cuando los términos de la una son los mismos que los de la otra, pero dispuestos en orden inverso.

Así, $\frac{4}{5}$ y $\frac{5}{4}$ son razones inversas, lo mismo que $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{2}$.

Según esto, *el producto de dos razones inversas es 1*.

424. Propiedades de las razones.—Las propiedades de las razones son las mismas de los quebrados, y las operaciones de cálculo se ejecutan del mismo modo. Así:

Para multiplicar una razón por un número, se multiplica su antecedente o se divide su consecuente por este número (201, 1^o).

Para dividir una razón por un número, se multiplica su consecuente o se divide su antecedente por este número (201, 2^o).

No se altera el valor de una razón cuando se multiplican o dividen sus dos términos por un mismo número (202).

Para multiplicar una razón por otra, se multiplican entre sí los antecedentes y los consecuentes (231).

Para dividir una razón por otra se multiplica la razón del dividendo por la razón del divisor invertida (237).

II. Proporciones

425. Definición.—Llámase *proporción* la expresión de la igualdad de dos razones.

Por ejemplo, $\frac{15}{3} = \frac{20}{4}$ en que cada razón es igual a 5.

426. Términos de la proporción.—Una proporción consta de 4 términos. El antecedente de la

primera razón y el consecuente de la segunda son los *extremos*; el consecuente de la primera razón y el antecedente de la segunda son los *medios*.

En la proporción $\frac{15}{3} = \frac{20}{4}$, 15 y 4 son los *extremos*; 3 y 20 son los *medios*.

427. Representación y lectura de una proporción.—Para representar una proporción, se escribe una razón a continuación de la otra, separadas entre sí con el signo = (425); o también del modo siguiente:

$$15 : 3 :: 20 : 4,$$

y se lee: 15 es a 3 como 20 es a 4.

428. PROPIEDAD FUNDAMENTAL.—En toda proporción, el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

Sea la proporción $\frac{4}{6} = \frac{14}{21}$; demostremos que $4 \times 21 = 6 \times 14$.

En efecto, multipliquemos estas dos razones iguales por 6×21 , *producto de los consecuentes*; resulta:

$$\frac{4 \times 6 \times 21}{6} = \frac{14 \times 6 \times 21}{21}$$

Simplifiquemos:

$$4 \times 21 = 6 \times 14.$$

429. RECIPROCAMENTE, si el producto de dos números es igual al producto de otros dos, estos cuatro números pueden formar una proporción.

Sean los productos iguales $3 \times 8 = 4 \times 6$; demostremos que los cuatro números, 3, 8, 4 y 6 pueden formar una proporción.

En efecto, dividamos los dos productos iguales por 4×8 ; los resultados serán iguales aún:

$$\frac{3 \times 8}{4 \times 8} = \frac{4 \times 6}{4 \times 8}$$

Simplifiquemos: $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$

430. Cuarta proporcional.—Llámase *cuarta proporcional* cualquiera de los cuatro términos de una proporción, cuando todos ellos son diferentes.

En la proporción $\frac{14}{21} = \frac{18}{27}$, cada uno de los cuatro términos es una *cuarta proporcional* con respecto a los otros tres.

De la propiedad fundamental se deduce el medio de encontrar un término cualquiera de una proporción cuando se conocen los otros tres:

1º Si el término desconocido es un extremo, se multiplican los dos medios, y se divide el producto por el extremo conocido.

Sea la proporción $\frac{18}{15} = \frac{42}{x}$
 Tenemos (428): $18x = 15 \times 42$;
 luego $x = \frac{15 \times 42}{18} = 35$.

2º Si el término desconocido es un medio, se multiplican los dos extremos, y se divide el producto por el medio conocido.

Sea la proporción $\frac{18}{x} = \frac{42}{35}$
 Tenemos (428): $42x = 18 \times 35$;
 luego $x = \frac{18 \times 35}{42} = 15$.

431. Media proporcional.—Se llama *media proporcional* cada uno de los medios de una proporción,

cuando éstos son iguales. En este caso la proporción se llama *continua*.

En la proporción $\frac{4}{6} = \frac{6}{9}$, 6 es una *media proporcional* entre 4 y 9.

La media proporcional se llama también *media geométrica*.

Sea la proporción $\frac{8}{x} = \frac{x}{18}$, en la cual x es media proporcional entre 8 y 18.

La propiedad fundamental da:

$$x^2 = 8 \times 18 \text{ o } 144;$$

luego $x = \sqrt{144} = 12$.

Por lo tanto, en toda proporción continua, el término medio es igual a la raíz cuadrada del producto de los extremos;

o de otro modo:

La media geométrica entre dos números es igual a la raíz cuadrada del producto de estos números.

432. Tercia proporcional.—Llámase *tercia proporcional* el primero o el cuarto término de una proporción continua.

En la proporción $\frac{9}{6} = \frac{6}{4}$, 9 es una *tercia proporcional* con respecto a los otros términos; lo mismo es el 4.

Sea la proporción $\frac{5}{10} = \frac{10}{x}$.

Tenemos (428) $5x = 10 \times 10$;

de donde $x = \frac{100}{5} = 20$.

LUEGO, para encontrar una *tercia proporcional* se divide el cuadrado de un medio por el extremo conocido.

433. Transposición de los términos de una proporción.—La propiedad fundamental permite escribir una proporción de ocho maneras distintas, a saber:

$$(1) \quad \frac{3}{4} = \frac{6}{8} \quad \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \quad (5)$$

$$(2) \quad \frac{3}{6} = \frac{4}{8} \quad \frac{6}{3} = \frac{8}{4} \quad (6)$$

$$(3) \quad \frac{4}{3} = \frac{8}{6} \quad \frac{8}{4} = \frac{6}{3} \quad (7)$$

$$(4) \quad \frac{4}{8} = \frac{3}{6} \quad \frac{8}{4} = \frac{6}{3} \quad (8)$$

En estas distintas formas hay proporción, pues el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

Las igualdades (1) y (2) manifiestan que, en una proporción, se pueden alternar los medios.

Las igualdades (1) y (8) hacen constar que, en una proporción, se pueden alternar los extremos.

En fin las igualdades (1) y (3) manifiestan que, en una proporción, se pueden invertir los términos.

434. PROPIEDAD.—En toda proporción se puede agregar o quitar a cada antecedente su consecuente, y resulta todavía una proporción.

Sea la proporción $\frac{12}{8} = \frac{9}{6}$; demostremos que

$$\frac{12+8}{8} = \frac{9+6}{6} \quad \text{y} \quad \frac{12-8}{8} = \frac{9-6}{6}$$

1º Si se agrega una unidad a cada una de las razones, resulta la igualdad:

$$\frac{12}{8} + 1 = \frac{9}{6} + 1.$$

Reduciendo a quebrado impropio, se tiene:

$$\frac{12+8}{8} = \frac{9+6}{6}. \quad (1)$$

2º Restando una unidad de cada razón, tendremos del mismo modo:

$$\frac{12}{8} - 1 = \frac{9}{6} - 1$$

$$\frac{12-8}{8} = \frac{9-6}{6}. \quad (2)$$

Esta propiedad puede también enunciarse del modo siguiente: *En toda proporción, la suma o la diferencia de los dos primeros términos es al segundo, como la suma o la diferencia de los dos últimos es al cuarto.*

435. Consecuencias. I.—En las proporciones (1) y (2) alternemos los medios:

$$\frac{12+8}{9+6} = \frac{8}{6} \quad (3) \quad \text{y} \quad \frac{12-8}{9-6} = \frac{8}{6}. \quad (4)$$

Luego, en toda proporción la suma o la diferencia de los dos primeros términos es a la suma o a la diferencia de los dos últimos, como el segundo término es al cuarto.

II.—De las proporciones (3) y (4) se deduce que

$$\frac{12+8}{9+6} = \frac{12-8}{9-6}. \quad (5)$$

Así pues, en toda proporción, la suma de los dos primeros términos es a la suma de los dos últimos, como la diferencia de los dos primeros es a la diferencia de los dos últimos.

III.—Si en la proporción (5) se alternan los medios, resulta:

$$\frac{12+8}{12-8} = \frac{9+6}{9-6}. \quad (6)$$

Luego, en toda proporción, la suma de los dos primeros términos es a su diferencia, como la suma de los dos últimos es a su diferencia.

436. PROPIEDAD.—En una serie de razones iguales, la suma de los antecedentes es a la suma de los consecuentes como un antecedente es a su consecuente.

Sean las razones iguales $\frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{10}{5}$; demostremos que

$$\frac{4+6+10}{2+3+5} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{10}{5}.$$

Llamando q el valor común de las razones dadas, tendremos:

$$\frac{4}{2} = q, \quad \frac{6}{3} = q; \quad \frac{10}{5} = q;$$

de donde

$$\begin{aligned} 4 &= q \times 2 \\ 6 &= q \times 3 \\ 10 &= q \times 5 \end{aligned}$$

Sumando estas 3 igualdades, y sacando q como factor común, resulta:

$$4+6+10 = q \times (2+3+5).$$

Dividamos los dos miembros de esta igualdad por $2+3+5$:

$$\frac{4+6+10}{2+3+5} = q.$$

luego: cada uno es

Pero q es el valor común de cada una de las razo-

$$\frac{4 + 6 + 10}{2 + 3 + 5} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{10}{5}$$

III. Magnitudes proporcionales

437. Magnitudes directamente proporcionales.—Dos magnitudes variables son *directamente proporcionales* cuando, haciéndose una de ellas 2, 3, 4..., m veces mayor o menor, la otra se hace también 2, 3, 4..., m veces mayor o menor.

Son directamente proporcionales:

- El salario de un obrero y la duración de su trabajo;
- El precio de una mercancía y su peso, si esta mercancía se vende según el peso;
- El trabajo ejecutado y el número de obreros empleados en él;
- El camino recorrido por un móvil que marche siempre con igual velocidad, y el tiempo; etc.

438. Magnitudes inversamente proporcionales.—Dos magnitudes variables son *inversamente proporcionales* cuando, haciéndose la primera 2, 3, 4..., m veces mayor o menor, la segunda se hace 2, 3, 4..., m veces menor o mayor.

Son inversamente proporcionales:

- El número de obreros y el tiempo que emplean en ejecutar un trabajo dado;
- La velocidad de un tren y el tiempo empleado para recorrer un espacio dado;
- El largo y ancho de una pieza de tela en que se ha empleado igual cantidad de hilo; etc.

439. Nota.—Sucede a menudo que una cantidad es directamente proporcional a una o más, e inversamente proporcional a otras.

Así, el tiempo que se emplea en construir una casa es *directamente proporcional* a las dimensiones de las paredes, e *inversamente proporcional* al número de operarios que trabajen, y al número de horas de trabajo diario.

CAPÍTULO II

REGLA DE TRES

440. Definiciones.—Llámase *regla de tres* un problema en que, dados los valores correspondientes de varias magnitudes directa o inversamente proporcionales, se trata de buscar una de ellas, cuando se conocen todas las demás; o en otros términos:

Regla de tres es una operación por medio de la cual se busca el cuarto término de una proporción, de la cual se conocen los otros tres.

La regla de tres es *simple* cuando cada término de la proporción está representado por un solo número. o sólo se consideran dos especies de magnitudes.

Es *simple y directa* cuando las dos magnitudes son *directamente* proporcionales.

Es *simple e inversa* cuando las dos magnitudes son *inversamente* proporcionales.

La regla de tres es *compuesta* cuando se aplica a más de dos magnitudes.

Las reglas de tres pueden resolverse por el método de *reducción a la unidad* o por las *proporciones*.

Regla de tres simple y directa

441. PROBLEMA.—Un ciclista ha recorrido 150 kilómetros en 5 horas; ¿cuántos recorrerá en 7 horas?

Disposición de los datos

150 km.	5 horas
x	7 —

1º Método de reducción a la unidad.—Si en 5 horas el ciclista recorre 150 kilómetros, en una ho-

ra, recorrerá un número de km. 5 veces menor, o 150

—, y en 7 horas, un número 7 veces mayor, o 5

$$\frac{150 \times 7}{5}$$

Luego $x = \frac{150 \times 7}{5} = 210 \text{ km.}$

2º Método de las proporciones.—Ya que las horas y los kilómetros son magnitudes *directamente* proporcionales tenemos la proporción:

$$\frac{150}{x} = \frac{5}{7} \text{ o } x = \frac{150 \times 7}{5} = 210 \text{ km.}$$

442. REGLA.—En una regla de tres simple y directa, el valor de la incógnita es igual al valor de la magnitud de la misma especie, multiplicado por la razón directa de los otros dos números, esto es, por la relación del segundo con el primero.

Regla de tres simple e inversa

443. PROBLEMA.—Si 12 obreros se tardan 30 días en acabar una obra, ¿cuántos obreros serán menester para acabar la misma obra en 24 días?

Disposición de los datos

12 obreros	30 días
x	24 —

1º Método de reducción a la unidad.—Si para acabar la obra en 30 días se necesitan 12 obreros, para acabarla en *un* día, se necesitarán 30 veces más obreros, o 12×30 , y para acabarla en 24 días, 24 veces menos, o 12×30 .

24

Luego, $x = \frac{12 \times 30}{24} = 15 \text{ obreros.}$

2º Método de las proporciones.—Siendo los obreros y los días magnitudes *inversamente* proporcionales, tenemos la proporción:

$$\frac{12}{x} = \frac{24}{30} \text{ o } x = \frac{12 \times 30}{24} = 15 \text{ obreros.}$$

444. REGLA.—En una regla de tres simple e inversa, el valor de la incógnita es igual al primer valor de esta magnitud, multiplicado por la razón inversa de los otros dos números, esto es por la relación del primero con el segundo.

Regla de tres compuesta

445. PROBLEMA.—Para hacer 180 metros de una obra, 15 obreros han trabajado 12 días, a razón de 10 horas por día; ¿cuántos días de 8 horas necesitarán 32 obreros, para hacer 600 metros de la misma obra?

Disposición de los datos

15 obreros	10 horas	180 met.	12 días
32	8	600	x

1º Método de reducción a la unidad.—15 obreros, trabajando 10 horas por día, para hacer 180 metros necesitan 12 días. *Uno* solo, en las mismas condiciones, necesitará 15 veces más tiempo, y 32 obreros, 32 veces menos o

$$12 \times \frac{15}{32}$$

Si en vez de trabajar 10 horas por día, los obreros trabajan sólo una hora, se necesitará un número de días 10 veces mayor, y si trabajan 8 horas, un número 8 veces menor, o

$$12 \times \frac{15 \times 10}{32 \times 8}$$

Este es el tiempo empleado para hacer 180 metros; para hacer un metro, se necesitará un tiempo 180 veces menor, y para hacer 600 metros, 600 veces mayor, o

$$\text{Luego: } x = 12 \times \frac{15 \times 10 \times 600}{32 \times 8 \times 180} = 23 \text{ días } \frac{7}{16}$$

2º Método de las proporciones.—Consideremos primero solamente los obreros, y llamemos x' los días que necesitarán para hacer el trabajo, en el supuesto de que las demás magnitudes queden fijas. La proporción evidentemente será *inversa*, y tendremos:

$$\begin{array}{r} 12 \text{ d} \\ x' \end{array} \quad \begin{array}{r} 15 \text{ ob.} \\ 32 \end{array} \quad \begin{array}{r} 12 \\ x' \end{array} \quad \begin{array}{r} 32 \\ 15 \end{array} \quad \begin{array}{r} 15 \\ 32 \end{array} \quad \begin{array}{l} x' = 12 \times \frac{15}{32} \end{array} \quad (1)$$

Conocido el número de días x' , consideremos ahora el número de horas que trabajan diariamente, y es claro que se modificará el número de días. Llamemos x'' este nuevo número de días. Las razones son también *inversas*, y tendremos:

$$\begin{array}{r} x' \\ x'' \end{array} \quad \begin{array}{r} 10 \\ 8 \end{array} \quad \begin{array}{r} x' \\ x'' \end{array} \quad \begin{array}{r} 8 \\ 10 \end{array} \quad \begin{array}{r} 10 \\ 8 \end{array} \quad \begin{array}{l} x'' = x' \times \frac{10}{8} \end{array} \quad (2)$$

Por fin, si comparamos los días con la cantidad de trabajo, y si los llamamos x , como la proporción en este caso es *directa*, tendremos:

$$\begin{array}{r} 180 \\ 600 \end{array} \quad \begin{array}{r} x'' \\ x \end{array} \quad \begin{array}{r} 180 \\ 600 \end{array} \quad \begin{array}{r} x'' \\ x \end{array} \quad \begin{array}{r} 600 \\ 180 \end{array} \quad \begin{array}{l} x = x'' \times \frac{600}{180} \end{array} \quad (3)$$

Multipliquemos miembro por miembro las igualdades (1), (2) y (3):

$$x' \times x'' \times x = 12 \times \frac{15}{32} \times x' \times \frac{10}{8} \times x'' \times \frac{600}{180}$$

Simplifiquemos:

$$x = 12 \times \frac{15 \times 10 \times 600}{32 \times 8 \times 180} = 23 \text{ días } \frac{7}{16}$$

446. REGLA.—En una regla de tres compuesta, el valor de la incógnita es igual al producto del número que es de la misma especie que la incógnita, por las razones directas de las magnitudes que le son directamente proporcionales, y por las razones inversas de las magnitudes que le son inversamente proporcionales.

PROBLEMAS

768. Seis obreros ganan \$ 7,68; ¿cuánto ganarán: 1º 10 obreros, 2º 36 obreros?

769. Por 17 $\frac{2}{3}$ días de trabajo, he pagado a mi dependiente \$ 25,44; ¿cuánto le pagaré: 1º por 1 día; 2º por 45 $\frac{1}{2}$ días; 3º por 89 $\frac{1}{3}$ días?

770. Si 60 metros de tela importan lo mismo que 15 de paño, ¿cuántos metros de aquella valdrán lo mismo que 75 de éste?

771. Durante 20 días de trabajo Héctor ha ganado \$ 144; ¿cuánto habría ganado si hubiera trabajado 6 días más?

772. Suponiendo que 5 duraznos cuestan lo mismo que 7 manzanas, ¿cuántas frutas de éstas costarán lo mismo: 1º que 35 duraznos; 2º 280 duraznos?

773. Si 3 hombres pueden concluir un trabajo en 51 días, ¿cuántos deberán añadirse a éstos para concluirlo: 1º en 17 días; 2º en 9 días?

774. Habiendo hecho bancarrota, Néstor conviene con sus acreedores en pagarles \$ 0,64 por cada peso; ¿cuánto recibirán todos ellos sobre una deuda de \$ 2 563,50?

775. Dos piezas de paño de igual calidad cuestan la una \$ 335 y la otra \$ 390; preguntase la longitud de cada una, sabiendo que la 2ª tiene 11 metros más que la 1ª.

776. He comprado 4950 cuadernos con la condición de recibir 6 más en cada ciento; ¿cuántos debe darme el vendedor?

777. Al revender ciertas mercaderías por \$ 5 600, pierdo \$ 4,50 por cada \$ 100; ¿en cuánto las había comprado?
778. Si una docena de plumas de acero importa $61\frac{1}{4}$ centavos, ¿cuánto costarán: 1° 10 $\frac{3}{4}$ gruesas; 2° 16 $\frac{1}{6}$ gruesas; 3° 25 $\frac{2}{3}$ gruesas?
779. ¿Cuántos metros de paño debe vender un comerciante para realizar una ganancia de Bs. 850, si gana Bs. 50 por cada 100 metros?
780. Dos números son entre sí como 5 es a $7\frac{1}{2}$, y el menor es 164,50; ¿cuál es el mayor?
781. Se trata de mandar hacer un capote para cada uno de los soldados de un batallón de 1000 hombres: en cada capote entran $3\frac{3}{4}$ metros de un paño de $1\frac{7}{8}$ metros de ancho; el forro mide $1\frac{1}{4}$ de ancho; ¿cuántos metros de este último serán menester para forrar todos los capotes?
782. Para atraer la bendición de Dios sobre mis negocios, me propongo dar \$ 5 a los pobres siempre que gane \$ 150; ¿cuánto habré ganado al ascender mi limosna a \$ 100?
783. Para empapelar una sala, han sido menester 20 rollos de papel de 0^m60 de ancho; ¿cuántos rollos habrían sido necesarios, a tener cada uno 0^m75 de ancho?
784. Al respirar, un hombre vicia por día $7^m\frac{1}{2}$ de aire, qué cantidad de aire vicia en 15 horas?
785. Un hombre de 1^m70 de estatura da 0^m60 de sombra; ¿cuál es la altura de un campanario que en el mismo momento da 24^m60 de sombra?
786. En una plaza hay 1500 hombres provistos de víveres para 6 meses; ¿cuántos habrá que despedir, para que los víveres duren dos meses más, dando a cada hombre la misma ración?
787. ¿Cuántos hombres son menester para concluir una obra en 9 días, si 36 hombres pueden concluirla en 20?
788. Se han pagado \$ 36 por el transporte de 450 kg. a 450 km. ¿a qué distancia se habrán transportado 2250 kg. por la misma suma?
789. Veinticuatro hombres han necesitado 15 días para concluir 1575 metros de una obra; ¿cuántos días hubieran necesitado 16 operarios?
790. En 6 días, 16 obreros han construido una pared de 18 metros de largo, 6 de alto y 95^m de espesor; ¿cuánto se hubieran tardado, siendo sólo 12 los obreros?
791. Nicéforo se tarda 9 días $\frac{2}{3}$ para tejer $69^m\frac{11}{15}$ de tela; ¿cuánto se tardará para tejer $52^m\frac{1}{5}$?

792. Un tejedor ha labrado $41^m\frac{5}{24}$ de tela en 5 días $\frac{3}{4}$; ¿cuál es la longitud de la pieza, si necesita el tejedor 9 días $\frac{1}{4}$ para la tejedura de toda ella?
793. La destreza de dos obreros está en razón de 7 a 12. ¿Cuántos metros de una obra puede hacer el segundo mientras el primero hace 175?
794. La suma de dos números es 490; su relación es $\frac{3}{7}$; ¿cuáles son estos números?
795. Dos números están en la relación de 2 a 5; si se añade 175 a uno de ellos, y 115 al otro, ambos se hacen iguales; ¿cuáles son estos números?
796. Dos números son entre sí como 4 y 9, su diferencia es 1205; ¿cuáles son estos números?
797. Se hacen disolver 250 gramos de azúcar en 5 litros de agua; ¿cuántos litros de agua debe añadirse a esta mezcla para que un litro de la nueva mezcla no contenga más que 8 gramos de azúcar?
798. Con \$ 28 800 pueden mantenerse 500 hombres durante 6 meses, dándoles a cada uno 32 centavos diarios; ¿a cuánto debe reducirse la ración para que los fondos duren 2 meses más?
799. Quince albañiles trabajaron juntos en la construcción de un puente, durante 12 días, e hicieron los $\frac{3}{4}$ de él, después de esto se retiraron 7 de ellos; ¿en cuánto tiempo la concluyeron los restantes?
800. Para tejer $46\frac{1}{4}$ metros de liencillo, han sido menester 11 obreros que trabajaron 10 $\frac{2}{3}$ horas por día; ¿cuántos obreros que trabajan 8 $\frac{4}{5}$ horas por día, serán necesarios para tejer 41 $\frac{5}{8}$ metros del mismo liencillo?
801. Una plaza fuerte tiene 13500 hombres de guarnición, vituallados para 8 meses; el comandante recibe orden de despedir tal número de hombres que los víveres puedan durar 4 meses más, dándoles la misma ración; ¿cuántos hombres deberá despedir el comandante?
802. Un agrimensor que ha trabajado durante 20 días, 8 horas diarias, ha recibido \$ 120; ¿cuántas horas habrá empleado diariamente en otro trabajo de la misma especie, que ha durado 30 días, y por el cual ha recibido \$ 225?
803. Andando 14 horas por día, un viajero camina 1500 km. en 20 días; ¿cuántos km. caminará en 14 días, andando con la misma velocidad, sólo 12 horas por día?
804. Para cavar un pozo se han empleado 10 hombres que han trabajado durante 84 días y 13 horas por día; ¿cuántos días serían menester a 15 hombres para el mismo trabajo, si se ocupan 12 horas diarias?

805. Cuatro caballos, cuya fuerza respectiva está representada por 150 kg., tiran de un coche que pesa 1640 kg.: ¿cuántos caballos serían menester para tirar del mismo coche, si su fuerza estuviera representada por 100 kg.?

806. Una pared de 60 metros de largo, 6 de alto y 75 cm. de espesor, ha sido construida en 12 días por 9 hombres que trabajan 12 horas por día; pregúntase qué altura tendrá otra pared que debe ser construida en 18 días por 16 hombres que trabajen 13 horas por día, si ha de tener 65 metros de largo y 1 metro de espesor.

807. Se sabe que en 12 días 11 obreros, que trabajan 10 horas $1/2$ por día, han hecho $152^{m}46$; como aún quedaban $80^{m}85$, 4 obreros los han concluido en 15 días, trabajando 12 horas $1/4$ por día; ¿cuáles obreros han sido más diestros?

808. Dos artesanos que trabajan juntos han ganado \$ 352: el 1º, que ha trabajado durante 30 días y 12 horas por día, ha recibido \$ 132; ¿cuántos días de 9 horas $1/2$ de trabajo ha debido emplear el 2º para ganar lo demás?

809. Si se conviene en que la gran muralla del Imperio Chino haya tenido 2600 km. de longitud, $6^{m}50$ de latitud y 6 m. de altura, ¿qué espesor tendría un muro de $2^{m}50$ de altura que se pudiera construir con estos materiales, alrededor de la tierra?

CAPITULO III

REGLA DE INTERES

447. **Definiciones.**—Regla de interés es una operación por medio de la cual se calcula la ganancia que produce una suma prestada, con arreglo a un tanto por ciento y un tiempo determinados.

448. En una regla de interés, se consideran el *capital*, el *interés* o *rédito* el *tanto por ciento* y el *tiempo*.

Capital es la suma prestada; el que presta un capital se llama *prestamista*.

Interés o rédito es el beneficio que saca el prestamista.

Tanto por ciento es el interés que se paga por cada \$ 100 o 100 pesetas, etc., que se han recibido en presta-

mo, durante la unidad de tiempo, que por lo regular es un año.

Tiempo es el número de años de meses o de días que queda impuesto un capital.

El año se considera como de 360 días, y los meses de 30 días. Sin embargo, para valuar el tiempo que ha transcurrido entre dos fechas, se cuentan todos los días, incluso el primero, y excluso el último.

449. **Interés simple.**—El interés se llama *simple* cuando, al fin de cada año, no se acumula al capital para devengar interés en los años siguientes.

450. **Interés compuesto.**—El interés se llama *compuesto* cuando, al fin de cada año, el interés se agrega al capital para devengar nuevos intereses.

En este capítulo, sólo trataremos del *interés simple*, dejando el *interés compuesto* para la *Parte comercial*.

451. **Nota.**—Los problemas de interés no son otra cosa que reglas de tres compuestas, y se resuelven según la regla dada (446).

Para resolver cualquiera de los cuatro casos de la regla de interés por medio de las proporciones, se admite que los intereses son directamente proporcionales a los capitales y al tiempo de colocación.

El interés se representa por **I**; el capital, por **C**; el tanto por **T**; y el tiempo, por **t**.

452. **CALCULO DEL INTERES.**—Problema.—¿Qué interés producirá un capital de \$ 12.000, colocado al 5% durante 4 años?

Disposición de los datos

Capital,	Tanto e interés.	Tiempo.
\$ 100	\$ 5	1 año
12 000	x	4

1º Reducción a la unidad.—Si \$ 100, en 1 año, producen

\$ 5 de interés, 1 peso producirá 100 veces menos, o $\frac{5}{100}$,

y \$ 12 000, 12 000 veces más, o $\frac{5 \times 12\,000}{100}$
 eso en 1 año; en 4 años, 4 veces más o $\frac{5 \times 12\,000 \times 4}{100}$,

Luego $x = \frac{5 \times 12\,000 \times 4}{100} = \$ 2\,400$.

2º *Por la cuarta proporcional*.—Tenemos (446):

$$x = 5 \times \frac{12\,000}{100} \times \frac{4}{1} = \$ 2\,400.$$

453. REGLA.—Para encontrar el interés, cuando se conoce el capital, el tanto y el tiempo, basta multiplicar la centésima parte del capital por el tanto por ciento y el tiempo expresado en años y fracción de año.

$$I = \frac{CTt}{100} \quad (1)$$

454. CALCULO DEL CAPITAL.—Problema.—¿Cuál es el capital que, impuesto al 6% ha producido \$ 1 593,40 en 4 años 3 meses 12 días?

Disposición de los datos

Capital.	tanto e interés.	tiempo.
\$ 100	\$ 6	360 días
x	1 593,40	1 542

1º *Reducción a la unidad*.—Si \$ 6 de interés, en 360 días, provienen de un capital de \$ 100, 1 peso de interés provendrá

vendrá de un capital 6 veces menor, o $\frac{6}{100}$,

y \$ 1 593,40, de un capital 1 593,40 veces mayor, o

$$\frac{100 \times 1\,593,40}{6};$$

Eso en 360 días; en 1 día, se necesitará un capital 360 veces mayor, o $\frac{100 \times 1\,593,40 \times 360}{6}$,

y en 1 542 días, un capital 1 542 veces menor, o

$$\frac{100 \times 1\,593,40 \times 360}{6 \times 1\,542}$$

Luego $x = \frac{100 \times 1\,593,40 \times 360}{6 \times 1\,542} = \$ 6\,200$.

2º *Por la cuarta proporcional*.—El capital y los intereses son directamente proporcionales; el capital y el tiempo lo son inversamente; luego (446):

$$x = 100 \times \frac{1\,593,40}{6} \times \frac{360}{1\,542} = \$ 6\,200.$$

455. REGLA.—Para encontrar el capital, conociendo el interés, el tanto y el tiempo de colocación, se multiplica el interés por 100, y se divide este producto por el producto del tanto por el tiempo expresado en años y fracción de año.

De la fórmula (1) se puede sacar el valor de C.

$$I = \frac{CTt}{100} \text{ o } CTt = 100I$$

$$C = \frac{100I}{Tt} \quad (2)$$

456. CALCULO DEL TANTO.—Problema.—¿A qué tanto deben imponerse \$ 2 580, para que den un interés de \$ 40 en 124 días?

Disposición de los datos

\$ 2 580	124 días	\$ 40
100	360	x

1º *Reducción a la unidad*.—Si \$ 2 580, en 124 días producen \$ 40 de interés, 1 peso, en el mismo tiempo, producirá

2 580 veces menos, o $\frac{40}{2\,580}$,

y \$ 100, 100 veces más, o $\frac{40 \times 100}{2\,580}$

Si en 124 días resulta este interés, en 1 día resultará 124

$$\text{veces menos, o } \frac{40 \times 100}{2580 \times 124}$$

$$\text{y en 360 días, 360 veces más, o } \frac{40 \times 100 \times 360}{2580 \times 124}$$

$$\text{Luego } x = \frac{40 \times 100 \times 360}{2580 \times 124} = 4,5\%.$$

2º *Por la cuarta proporcional.*—Siendo el interés directamente proporcional al capital y al tiempo, tendremos (446):

$$x = 40 \times \frac{100}{2580} \times \frac{360}{124} = 4,5\%.$$

457. REGLA.—Para encontrar el tanto cuando se conocen el capital, el interés y el tiempo, se multiplica el interés por 100, y se divide el producto por el capital multiplicado por el tiempo expresado en años y fracción de año.

De la fórmula (1) se saca el valor de T.

$$I = \frac{CTt}{100} \text{ o } CTt = 100I$$

$$\text{y } T = \frac{100I}{Ct} \quad (3)$$

458. CALCULO DEL TIEMPO.—Problema.—¿Durante cuánto tiempo deben imponerse a intereses \$ 4950 al 6% para que produzcan \$ 782?

Disposición de los datos

Bs. 100	Bs. 6	1 año
4950	782	x

1º *Reducción a la unidad.*—Si \$ 100 para producir \$ 6 de interés tardan 1 año, 1 peso tardará 100 veces más, o 1 X 100,

$$\text{y } \$ 4950, 4950 \text{ veces menos, o } \frac{1 \times 100}{4950}$$

Se tarda este tiempo para producir \$ 6 de interés; para pro-

$$\text{ducir 1 peso, se tardará 6 veces menos, o } \frac{1 \times 100}{4950 \times 6}$$

$$\text{y para producir } \$ 782, 782 \text{ veces más, o } \frac{1 \times 100 \times 782}{4950 \times 6}$$

$$\text{Luego } x = \frac{1 \times 100 \times 782}{4950 \times 6} = 2 \text{ años } 7 \text{ meses } 18 \text{ días.}$$

2º *Por la cuarta proporcional.*—El capital y el tiempo son inversamente proporcionales; el interés y el tiempo lo son directamente; luego (446):

$$x = 1 \times \frac{100}{4950} \times \frac{782}{6} = 2\text{a. } 7\text{m. } 18\text{d.}$$

459. REGLA.—Para encontrar el tiempo, cuando se conoce el capital, el interés y el tanto, se multiplica el interés por 100, y se divide el producto por el capital multiplicado por el tanto.

De la fórmula (1) se saca el valor de t.

$$I = \frac{CTt}{100} \text{ o } CTt = 100I$$

$$\text{y } t = \frac{100I}{CT} \quad (4)$$

460. **Caso particular.**—Este caso consiste en buscar el capital líquido o sólo el interés, cuando se conocen estos dos términos juntos, o *monto*, y todos los demás términos.

Para resolver los problemas de este género, hay que efectuar dos operaciones distintas: 1º buscar el interés de \$ 100 por el tiempo dado, y añadir este interés a \$ 100; 2º calcular el capital pedido.

EJEMPLO.—¿Cuál es el capital que, impuesto en 9 años al 8%, da un monto de \$ 860?

$$1^\circ \text{ Interés de } \$ 100 \text{ en } 9 \text{ años.} \text{—Este interés es igual a } 8 \times 9 = \$ 72.$$

2º *Cálculo del capital.*—Agregando \$ 72 a \$ 100, resultará un número de la misma especie que \$ 860.

Disposición de los datos

Monto.	Capit. líquido
\$ 100 X 72	\$ 100
860	x

Si \$ 172 provienen de un capital líquido de \$ 100, 1 peso bolívar provendrá de un capital de 172 veces menor, o $\frac{100}{172}$

$$\text{y } \$ 860, \text{ provendrá de } \frac{100 \times 860}{172}$$

$$\text{Luego } x = \frac{100 \times 860}{172} = \$ 500.$$

461. Nota.—Si en la fórmula (1) $I = \frac{Crt}{100}$ hace-
mos $\frac{T}{100} = r$, (la letra r representa el tanto o rédito

de un peso) y sustituímos este valor, tenemos:

$$I = Crt; \text{ de donde: } C = \frac{I}{rt}; r = \frac{I}{Ct}; t = \frac{I}{Cr}.$$

Añadiendo C a ambos miembros de la igualdad $I = Crt$, resulta:

$$C + I = C + Crt = C(1 + rt)$$

Poniendo el monto, $M = C + I$, esto es, el *capital aumentado de sus intereses*, se podrá escribir:

$$M = C(1 + rt) \quad (5)$$

Esta fórmula es muy útil en los problemas de *descuento*.

Métodos abreviados para el cálculo del interés.—Véase la *Parte comercial* (528).

PROBLEMAS

810 Búsqese los intereses:

1. De \$ 796,28 en 3 años,			
2° 750,75 " 4 años, 8 meses,			al 5"
3° 972,40 " 1 año, 7 meses, 18 días,			al 7"
4° 336 " 5 meses, 15 días,			al 5"
5° 1 560 desde el 9 de abril, hasta el 10 de Sbre.,			al 5 ½%
6° 1 728,19 " 7 de mayo de 1888, hasta el 17 de jul. de 1889,			al 5 ¼%.

811. Búsqese el capital:

1° que al 4%, produce \$ 2 048 de intereses en 5 años 4 meses	
2° » 5¼% » 288 » 3 » 5 » 18 días.	
3° » 5¾% » 1 451,52 » 3 » 5 » 17 "	

812 Búsqese el tiempo en que han sido colocados los capitales siguientes:

1° \$ 625 al 6 % para dar \$ 262,50 de interés.	
2° 1 779 » 5 % » 296,50 »	
3° 2 178 » 4 1/6% » 632,25 »	

813. ¿A qué tanto deben colocarse los capitales siguientes:

1° \$ 978,20, para alcanzar \$ 48,91 de interés en 1 año.	
2° 1 290 » » 19,99 ½ » » 124 días.	
3° 675 » » 142,31 ¼ » » 44 meses	

814. He comprado una casa en \$ 7 356, y la arriendo en \$ 295; ¿a qué tanto por ciento he impuesto mi dinero?

815. ¿Qué negocio es más ventajoso entre colocar \$ 3 374 al 4 ½%, o comprar una quinta que se puede arrendar en \$ 151,83?

816. Andrés ha impuesto los 4/5 de su capital al 4%, y el resto al 5%; cada año saca con que pagar los jaeces y el alimento de su caballo, gasto que asciende a \$ 117,60; ¿qué suma ha colocado en todo?

817. Si Braulio impuso 1 756,75 a intereses, el 29 de Julio de 1908, ¿cuál fué el monto debido el 12 de Febrero de 1911, al 7%?

818. Anselmo ha impuesto al 5% cierto capital; al cabo de 4 años recibe, tanto por el capital como por los intereses, la suma de \$ 10 305; ¿cuál fue dicho capital?

819. Indalecio ha impuesto \$ 13 200 a intereses, parte al 5¼%, y parte al 6½%, y ha recibido por los intereses al fin

del año, \$ 805,50; ¿qué parte del capital fue impuesta a cada uno de los tantos señalados?

820. Quintín ha impuesto a réditos una suma de dinero al $4\frac{1}{2}\%$, y en 10 años le ha producido \$ 900; ¿cuál fue dicha suma?

821. Un dependiente, habiendo hecho algunos ahorros, quiere gozar de un rédito anual de \$ 140; ¿qué capital necesita para ello, si lo impone al 5%?

822. Pedro pide prestada la suma de \$ 4 690, perteneciente a un menor de 15 años 3 meses 20 días de edad; se sirve de ella hasta que el dueño tenga 21 años; ¿qué cantidad deberá entonces a éste, al 6% de interés simple?

823. Una docena de silletas importa \$ 60; ¿en cuánt debe revenderse para que el dinero se halle colocado al 5%?

824. Cristóbal vende por \$ 350 un piano que le costó \$ 280; ¿a qué tanto por ciento impone su dinero?

825. Marcos impone la mitad de su capital al 6%, la tercera parte al 5%, y lo demás al 4%, y resulta así un rédito anual de \$ 1 600; ¿cuál es este capital?

826. Antonio dice que la ganancia que ha obtenido durante los 9 años de sus negocios equivale al precio de 3 659 m. de paño estimado a \$ 2,08 el metro, y desea saber qué beneficio anual le ha resultado, habiendo impuesto su capital al 5%?

827. Fulgencio ha hecho una imposición de \$ 35 680 en el Banco, y saca mensualmente un rédito de \$ 223; ¿cuál es el tanto por ciento anual del interés que recibe?

828. Cirilo impone \$ 4 000 a intereses, una parte al 4%, y la otra al 3%; la 1ª parte le produce \$ 104 de interés anual más que la 2ª; ¿cuáles son estas dos partes?

829. Hilario ha vendido una hacienda por \$ 14 150, con las condiciones siguientes: el comprador le paga \$ 4 000 al contado, \$ 4 375 al cabo de 6 meses, \$ 3 125 al cabo de 10 meses, y el resto al cabo de 1 año 3 meses, con los intereses al 7%; ¿a cuánto asciende todo lo que le ha pagado el comprador?

830. Habiendo ahorrado Mario, durante los 6 años de su tráfico, un capital de \$ 2 965,10, desea saber al cabo de cuánto tiempo recibirá \$ 889,53, suponiendo que ha impuesto su capital al 5%.

831. Vicente tiene empleado en sus negocios un capital de \$ 21 840 que le produce un $12\frac{1}{2}\%$ al año; pero por motivos

de salud, deja el tráfico y presta su dinero al $7\frac{1}{2}\%$; ¿cuánto pierde a causa de este cambio en 2 años 5 meses 10 días?

832. ¿Cuál es el capital cuyas $\frac{4}{5}$ partes impuestas al 6%, y el resto al 7%, dan \$ 4 340 de interés?

833. Una suma de dinero impuesta durante 8 meses vale, junto con sus intereses, \$ 1 277,20; la misma, impuesta durante 1 año 3 meses, al mismo tanto %, vale con los intereses simples \$ 1 309,75; ¿cuál es la suma impuesta, y cuál el tanto del interés?

834. El capital de \$ 480 000 junto con sus intereses, vale al cabo de 3 años 7 meses \$ 583 200; pregúntase a qué tanto fue impuesto este capital.

835. ¿Qué suma debo imponer en este momento para recibir dentro de 3 meses 18 días el valor de \$ 875 de monto, siendo el tanto al 5%?

836. El 1º de Julio, un comerciante coloca en el Banco la suma de \$ 2 476 al 3% anual. Si el comerciante saca su dinero el 25 de Octubre siguiente, ¿qué suma recibirá?

837. Ambrosio ha comprado una casa por \$ 9 000; paga a buena cuenta \$ 2 500. Pregúntase qué suma debe imponer al 5% para pagar los intereses de lo que debe todavía, si el vendedor le cobra sólo el 4% de interés al año.

838. Una quinta, por la que se paga anualmente un rédito de \$ 49, ha sido comprada por \$ 18 600; ¿cuánto produce por 100, si se arrienda en \$ 700 por año?

839. Braulio impone un capital de \$ 5 800 durante 4 años; al cabo de este tiempo debe recibir, por el capital y los intereses simples, \$ 6 278; ¿a qué tanto impuso su dinero?

840. Ramiro impone cierta suma al 3,5%; al cabo de 8 años 3 meses saca esta suma y la impone con los intereses producidos al 5,5%; ¿qué suma había impuesto al 3,5%, sabiendo que recibe ahora un rédito anual de \$ 200?

841. Un rentero impone la $\frac{1}{3}$ parte de su capital al 6%, y lo demás al 4%; ¿en qué relación se encuentran los intereses anuales producidos por ambas sumas impuestas?

842. Debo los intereses de \$ 1 000 en 6 meses al 5%; ¿durante cuánto tiempo debo prestar \$ 920 al 4% para compensar los intereses que debo?

843. Un capital impuesto a cierto tanto en 1 año y 5 meses valdría, con sus intereses, \$ 4 497,50. Al cabo de 3 años y 2 meses valdría \$ 4 865. Hállese el capital y el tanto.

844. La fortuna de Filiberto está dividida en dos partes: la 1ª que es los $\frac{2}{3}$, da \$ 4,75%; la 2ª da \$ 360. Como los réditos anuales de Filiberto son \$ 1 200, se pregunta: 1º cuánto % da la 2ª parte; 2º cuál es la fortuna de Filiberto.

845. Patricio impone la $\frac{1}{5}$ parte de su capital al 5%, los $\frac{2}{3}$ del resto al 4,5% y lo demás al 5,5%. Si el rédito anual asciende a \$ 907,72, ¿cuál es el capital total y el valor de cada una de las imposiciones?

846. Los $\frac{3}{7}$ de un capital se han impuesto al 4%, los $\frac{3}{5}$ del resto al 5%, y lo demás al 5,5%. Al cabo de 4 años se sacan, tanto por el capital como por los intereses simples, \$ 1 967,29; ¿cuál es el capital y cuáles las sumas impuestas a cada tanto?

847. La diferencia entre la fortuna de dos individuos es de \$ 1 181,82. El uno ha impuesto su capital al 5%, el otro ha comprado un fondo de comercio que le produce el 12% neto. Siendo iguales los intereses de ambos, ¿cuál es la fortuna de cada uno?

848. Tres personas han impuesto juntas una suma de \$ 2 400; al cabo de 8 años han sacado, por capital e intereses reunidos, la 1ª \$ 1.008, la 2ª \$ 1.152, y la 3ª \$ 1.296; pregúntase a qué tanto impusieron la suma y cuál es la imposición de cada una.

RESUÉLVANSE POR LOS MÉTODOS ABREVIADOS
LOS PROBLEMAS SIGUIENTES:

849. Búsquese (por el método de las partes alícuotas del capital) el interés de las sumas siguientes:

- 1ª de \$ 2 000 al 6% en 118 días;
- 2ª de \$ 5 400 al 5% en 150 —
- 3ª de \$ 4 800 al $4\frac{1}{2}\%$ en 95 —

850. Búsquese (por el método de las partes alícuotas de los días) el interés de \$ 2 850:

- 1ª al 6% en 146 días;
- 2ª al 5% en 45 —
- 3ª al 4% en 120 —

851. Búsquese (por los divisores fijos) el interés de \$ 5 400 en 150 días al 6%, 5%, $4\frac{1}{2}\%$ y 4%.

852. Calcúlese (por el método del 6%) el interés de \$ 4 700, al $4\frac{1}{2}\%$, en 112 días.

853. Calcúlese al 3% el interés total de las sumas siguientes:

- \$ 4 275 colocados
- \$ 24 850 —
- \$ 5 000 —
- \$ 1 245 —

854. Calcúlese el interés de \$ 15 420, al 5% por 34 días.

855. ¿Cuál es el interés de \$ 4 500 durante 62 días al 5%?

856. Se ha impuesto la suma de \$ 3 784,70 el 7 de Octubre; ¿qué interés se sacará el 4 de Abril siguiente, siendo el tanto al 6%? (Los meses con su número propio de días).

857. Ildefonso toma prestados \$ 2 000 al 5% el 30 de Mayo; ¿qué suma debe volver, con capital e intereses, el 2 de Agosto siguiente?

858. Un comerciante pide prestadas al 6% las cantidades siguientes: \$ 2 800 durante 140 días, \$ 1 850 durante 42 días, y \$ 2 000 durante 3 meses; ¿qué intereses debe pagar?

CAPITULO IV

REGLA DE DESCUENTO

462. **Definiciones.**—*Descuento*, en general, es una rebaja que se hace sobre una suma que quiere cobrarse antes de su vencimiento.

En el comercio, el *descuento* es la rebaja que hace un banquero por un *documento de comercio* (letra, pagaré), que paga antes de su vencimiento.

463. Por *vencimiento* de una letra, pagaré, etc., se entiende el *cumplimiento del plazo en que deben ser pagados*.

Ejemplo.—Fulgencio tiene un pagaré de \$ 400, con plazo de 3 meses; queriendo procurarse dinero, se dirige a un banquero que toma el pagaré y entrega al portador \$ 400, *menos el descuento*.

En este ejemplo, Fulgencio, poseedor o *tenedor* del documento, ha vendido o *negociado* el pagaré; el banquero, *comprador* del documento, ha *descontado* el mismo pagaré.

464. En los documentos comerciales se consideran dos valores: el *nominal* y el *efectivo*.

El valor nominal es la suma inscrita en el documen-

to, esto es, la que debe ser pagada al vencimiento del plazo.

En el ejemplo anterior, \$ 400 es el valor *nominal*.

El valor efectivo o actual es la suma pagada antes del vencimiento, esto es, la que se diera en cambio del documento si fuese negociado actualmente.

En el mismo ejemplo, el valor *efectivo* es \$ 400 menos el descuento que ha cobrado el banquero.

465. El descuento de los documentos comerciales se calcula proporcionalmente a la suma y al tiempo indicados en ellos; si sólo se dice que el descuento está, v. gr., al 6%, se entiende que es para un año.

A más del descuento, los banqueros, para cubrir sus gastos de escritura y sus riesgos, suelen cobrar un *derecho de comisión* proporcional al valor nomi-

nal del efecto. Este derecho puede variar de $\frac{1}{8}$ a $\frac{1}{2}$ %.

En fin, si el efecto es pagadero en otra ciudad que aquella en que se hace el descuento, el banquero hace otra rebaja, llamada *cambio de plaza*, que puede va-

riar de $\frac{1}{20}$ a 2%.

466. Clases de descuentos.—Hay dos clases de descuentos: el descuento *comercial* y el descuento *racional*.

I. Descuento comercial

467. Definición.—*Descuento comercial* es el interés simple del valor nominal del documento, el cual valor se considera como capital.

Conviene observar que el *descuento comercial* y el *interés* se parecen sólo en el modo de calcularse: la suma que cobra el banquero sobre el importe del do-

cumento no es un interés, sino una remuneración determinada por el uso.

Los problemas de descuento comercial se resuelven como los de interés por medio de la fórmula.

$$I = \frac{CTt}{100} \text{ o } Crt \quad (461)$$

y de las que de ella se deducen; I representa aquí el descuento, C el valor nominal del efecto, T el tanto por ciento, t el tiempo en años, y r el tanto por 1 peso.

468. CALCULO DEL DESCUENTO Y DEL VALOR ACTUAL.—Problema.—¿Cuál es el descuento comercial y el valor actual de una letra de \$ 1487, pagadera dentro de 30 días al 6%?

Disposición de los datos

\$ 100	\$ 6	360 días
1487	x	30

$$x = \frac{6 \times 1487 \times 30}{100 \times 360} = \$ 7,435.$$

Reducción a la unidad.—Si sobre \$ 100, por 360 días, se descuentan \$ 6, sobre 1 peso se descontarán 100 veces menos,

o $\frac{6}{100}$; y sobre \$ 1487, se descontarán $\frac{6 \times 1487}{100}$.

Por 1 día, en vez de 360, se descontará 360 veces menos, y por 30 días, 30 veces más, o $\frac{6 \times 1487 \times 30}{100 \times 360}$.

$$\text{Luego: } x = \frac{6 \times 1487 \times 30}{100 \times 360} = \$ 7,435.$$

El valor *actual* de la letra será:

$$\$ 1487 - 7,435 = 1479,565.$$

469. CALCULO DEL VALOR NOMINAL.—Problema.—¿Cuál es el valor nominal de una letra que, descontada por 8 meses, al 6% de descuento externo, da por valor \$ 768?

Hay dos operaciones:

1º Encontrar el descuento de \$ 100 por 8 meses, al 6%.

$$\begin{array}{r} 12 \quad 6 \\ 8 \quad x \end{array} \quad x = \frac{6 \times 8}{12} = \$ 4$$

2º Hallar el valor de la letra.

Disposición de los datos

$$\begin{array}{l} \$ 96 \text{ de valor actual} \\ 768 \end{array} \quad \begin{array}{l} \$ 100 \text{ de valor nominal} \\ x \end{array}$$

Si \$ 96 de valor actual provienen de \$ 100 de valor nominal, al 1 peso de valor actual provendrá de un valor nominal 96 veces menor, y 768 provendrá de $\frac{100 \times 768}{96}$.

$$\text{Luego: } x = \frac{100 \times 768}{96} = \$ 800.$$

470. Observación.—El descuento comercial no puede cobrarse sino sobre documentos de vencimiento corto, porque de otro modo saldrían resultados evidentemente erróneos; por ejemplo, el descuento de \$ 1 000 en 20 años al 5% sería $\frac{1\,000 \times 5 \times 20}{100} = 1\,000$;

por tanto esta suma nada valdría actualmente, lo que es inadmisibile.

II. Descuento racional

471. Definición.—*Descuento racional* es el interés simple del valor actual del documento, según el tanto convenido.

En el descuento racional, el *valor actual* es la suma que, colocada actualmente a intereses simples y al mismo tanto, llegará a ser en el momento del vencimiento, el *valor nominal*. Por consiguiente, en esta clase de descuento se debe considerar el valor nomi-

nal como un capital unido a sus intereses, o como el *monto*.

472. Este descuento se llama *racional*, porque la suma descontada, impuesta a intereses el día en que se hace el descuento, llega a ser, en el momento mismo del vencimiento, igual al valor nominal de la letra, lo que no sucede en el descuento comercial.

Así, en el descuento *comercial*, \$ 100 es una suma que debe *descontarse*; en el descuento *racional*, \$ 100 sería una suma *descontada*, y \$ 105, la suma que se debe descontar, supuesto el vencimiento de 1 año, y el tanto 5%.

Ya que en el descuento racional debe considerarse el valor nominal como un capital unido a sus intereses, si llamamos C el valor actual, I sus intereses, el valor nominal o *monto* será C + I o M; la fórmula (5) dada ya para los intereses, es $M = C(1 + rt)$ **(461)**

$$\text{de donde} \quad C = \frac{M}{1 + rt}$$

El interés simple de esta suma será el *descuento racional* del valor nominal M; tenemos pues:

$$I = \frac{Mrt}{1 + rt}$$

Observemos que Mrt sería el *descuento comercial* del valor nominal M; así pues, el *descuento racional* es el *cociente del descuento comercial por $1 + rt$* .

Este descuento no se usa en el comercio; por lo tanto nos contentaremos con indicar la marcha que se ha de seguir para calcularlo.

473. CALCULO DEL VALOR ACTUAL Y DEL DESCUENTO RACIONAL.—Problema.—¿Cuál es el valor actual y el descuento racional de una letra de \$ 2 500, pagadera en 120 días, al 6%?

Hay dos operaciones:

1º Encontrar el interés de \$ 100 en 120 días, al 6%.

$$\begin{array}{r} 360 \\ 120 \end{array} \quad \begin{array}{r} 6 \\ x \end{array} \quad \begin{array}{r} 6 \times 120 \\ x = \frac{\quad}{360} = \$ 2. \end{array}$$

2º hallar el valor actual de \$ 2 500.

Disposición de los datos

$$\begin{array}{r} \$ 102 \text{ valor nominal.} \\ 2\ 500 \end{array} \quad \begin{array}{r} \$ 100 \text{ valor actual} \\ x \end{array}$$

Si \$ 102 de valor nominal corresponden a un valor actual de \$ 100, 1 peso corresponderá a un valor 102 veces menor,

$$\text{Luego } x = \frac{100 \times 2\ 500}{102} = \$ 2\ 450,98 \text{ valor actual.}$$

$$\text{y } \$ 2\ 500, \text{ corresponderán a } \frac{100 \times 2\ 500}{102}.$$

El descuento racional es:

$$\$ 2\ 500 - 2\ 450,98 = \$ 49,02$$

474. Nota.—El descuento comercial es más elevado que el racional, y también menos exacto y menos equitativo. Sin embargo se suele emplear el descuento comercial por ser más rápido y fácil su cálculo.

475. COMPARACION DEL DESCUENTO COMERCIAL CON EL RACIONAL.—Ejemplo 1º.—Búsquese el descuento de una letra de \$ 5 300, pagadera en un año, al 6% anual.

Para el descuento comercial, se deben descontar \$ 6 sobre \$ 100; sobre \$ 5 300, se descontarán:

$$\frac{6 \times 5\ 300}{100} = \$ 318.$$

Para el descuento racional analizamos así: \$ 100 impuestos la 6% valen al cabo de un año \$ 106; y recíprocamente, una letra de \$ 106 pagadera en un año, representa un valor actual de \$ 100, y no debe sufrir sino \$ 6 de descuento.

En esto precisamente se diferencian los dos descuentos: en el comercial, se descuentan \$ 6 sobre \$ 100, y en el racional sólo se descuentan \$ 6 sobre \$ 106. Si sobre \$ 106 se descuentan 6, sobre \$ 5 300 se descontarán:

$$\frac{6 \times 5\ 300}{106} = \$ 300.$$

Como acabamos de ver, el descuento comercial es superior al racional, porque se compone del interés verdadero del valor actual de la letra, esto es, del descuento comercial, más el interés de este mismo interés. En efecto, calculemos el in-

terés de \$ 300 al 6%, y tendremos $\frac{6 \times 300}{100} = \$ 18$, que, añadidos a los \$ 300, que son el descuento racional, dan \$ 318, 318, esto es, el descuento comercial.

Ejemplo 2º.—Una letra de \$ 1 500 es pagadera al cabo de 90 días; si se quiere pagarla al contado, búsquese: 1º el descuento comercial, 2º el racional, siendo el tanto 6%.

Descuento comercial. Como el descuento comercial es el interés simple del valor nominal, será pues el interés de \$ 1.500

$$\text{al 6\% durante 90 días, o } \frac{6 \times 1\ 500 \times 90}{100 \times 360} = \$ 22,50.$$

Descuento racional. El descuento racional es el interés simple del valor actual. El valor nominal es igual al valor actual aumentado de los intereses de este último.

$$\text{Ahora bien, } \$ 100 \text{ en 90 días al 6\% dan } \frac{6 \times 90}{360} \text{ o } \$ 1,50;$$

por consiguiente, un valor actual de \$ 100 corresponderá a un valor nominal de \$ 101,50. Luego sobre una suma de \$ 101,50 hay \$ 1,50 de descuento, sobre \$ 1 500 el descuento será de

$$\frac{1,5 \times 1\ 500}{101,5} = \$ 22,16$$

Ejemplo 3º.—Se han dado \$ 1 800 en pago de una letra descontada al 5% por 2 años; ¿cuál era el valor nominal de la letra, suponiendo 1º el descuento comercial, 2º el racional?

Notemos primero que \$ 100 al 5% dan $5 \times 2 = \$ 10$ en 2 años.

Descuento comercial. Este descuento es el interés del valor nominal.

Cuando este valor es de \$ 100, el valor actual es de $100 - 10 = \$ 90$.

$$\text{Luego con } \$ 90 \text{ se pagan } \$ 100, \text{ con } \$ 1 \text{ se pagarán } \frac{100}{90}, \text{ y}$$

con \$ 1 800, $\frac{100 \times 1.800}{90} = \$ 2 000$, valor de la letra.

Descuento racional. El descuento racional es el interés del valor actual; cuando éste es de \$ 100, el valor nominal es de $100 + 10 = \$ 110$.

Luego con \$ 100 se pagan \$ 110, con \$ 1 se pagarán $\frac{100}{100}$ y

con \$ 1 800, $\frac{110 \times 1 800}{100} = 1 980$ valor de la letra.

Ejemplo 47.—Una letra de cambio pagadera a 36 días ha sido presentada a un banquero que, a más del descuento al 6%, ha cobrado una comisión de $\frac{1}{2}\%$. El banquero ha pagado \$ 2 749,42; ¿cuál era el valor nominal de la letra?

El descuento por 36 días será de $\frac{6 \times 36}{360}$ o 0,6. Si se añaden 0,5 de comisión, resultan por descuento total sobre \$ 100,

$$0,60 + 0,50 = \$ 1,10.$$

Por un valor nominal de \$ 100 se reciben sólo $100 - 1,1$ ó 98,9; por consiguiente, la letra valdrá tantas veces \$ 100

como lo indica el cociente $\frac{2749,42}{98,9}$, esto es:

$$\frac{2749,42 \times 100}{98,9} = \$ 2 780.$$

Descuento de facturas

476.—Aplicado a las facturas, el descuento es una simple rebaja arreglada por convenio de las partes, o por los usos del comercio relativos a la mercadería vendida.

El descuento de una factura se calcula por lo regular a un tanto % de su valor, sin hacer caso del tiempo.

Decir que una factura de \$ 4 560, por ejemplo, es pagadera, bien a 6 meses plazo, bien al contado, con un descuento del 3%, quiere decir que el comprador, queda libre de pagar 6 meses después de la fecha indicada en la factura (en cuyo

caso debe pagar los \$ 4 560 íntegros), o de pagar inmediatamente, con una rebaja del 3%, esto es, $\frac{4 560 \times 3}{100} = \$ 136,80$;

en este caso, satisface al acreedor pagándole \$ 4 560 — 136,80 = \$ 4 423,20.

III. Vencimiento común de pagos

477. Objeto de esta regla.—Esta regla tiene por objeto hallar la fecha en que debe efectuarse un solo pago, en vez de hacer varios en distintos tiempos, o buscar cuánto debe diferirse un pago para compensar los adelantos que se han hecho, sin que resulte pérdida o beneficio para el cobrador ni el pagador.

478. Problema I.—Un obrero debe \$ 24 pagaderos como sigue: \$ 4 al cabo de 2 meses, \$ 8 al cabo de 5 meses, y \$ 12 al cabo de 8 meses. Se conviene con su acreedor en hacerle un solo pago; ¿en qué tiempo debe efectuarlo para que haya compensación?

OPERACIÓN

$$\$ 4 \times 2 = \$ 8$$

$$8 \times 5 = 40$$

$$12 \times 8 = 96$$

$$24 \quad 144$$

$$\$ 144 : 24 = 6 \text{ meses}$$

La razón de esta operación es que se supone que el dinero aprovecha en manos del poseedor en proporción del tiempo que lo tiene a su disposición. Así es como se gana, por ejemplo, tanto con \$ 2 en 3 meses, como con \$ 6 en 1 mes. Por esto, en este ejemplo, multiplico 4 por 2, y me da \$ 8, que, por la misma razón, producirán durante 1 mes tanto como los \$ 4 durante 2 meses.

Del propio modo multiplico las demás sumas por su tiempo respectivo; y como la suma de los productos se forma de la multiplicación de todas las sumas por los distintos tiempos, es evidente que al dividirla por la suma debida, debe encontrarse el tiempo medio del pago.

PROBLEMA II.—¿Cuál es el vencimiento medio de los 4 pagarés siguientes: el 1º de \$ 3 000 el 15 de Marzo; el 2º de \$ 2 500 el 18 de Abril; el 3º de \$ 5 000 el 1º de Mayo, y el 4º de \$ 3 400 el 25 de Junio?

OPERACIÓN

\$ 3 000 al 15 de Marzo	0 días	
2 500 al 18 de Abril	× 34 días =	85 000
5 000 a 1º de Mayo	× 47 días =	235 000
3 400 al 25 de Junio	× 102 días =	346 800
13 900		666 800

$$666\,800 : 13\,900 = 47 \frac{135}{139}, \text{ o sea } 48 \text{ días.}$$

El vencimiento buscado debe ser tal que un solo pagaré de \$ 13 900 en este vencimiento dé el mismo descuento que los 4 juntos, si fueran negociados en un mismo día.

Multiplicando cada suma por el tiempo de su crédito y sumando los productos, tenemos 666 800, cantidad que, dividida por la suma de los pagarés, \$ 13 900, da por cociente 47

$\frac{135}{139}$, o sea 48 días; el vencimiento medio caerá pues 48 días después del 15 de Marzo, esto es, el 2 de Mayo.

479. REGLA.—Para encontrar el vencimiento común de varias cantidades, se multiplica el valor de cada una por el tiempo que media entre la fecha de su vencimiento y la en que debía efectuarse el primer pago. El cociente, añadido a la fecha del primer vencimiento, da el vencimiento común.

480. PROBLEMA III.—Pablo compra \$ 180 de mercaderías a 8 meses plazo; al cabo de 4 meses paga \$ 30, y 2 meses después, \$ 40; ¿cuánto tiempo puede guardar lo demás para compensar los adelantos que ha hecho?

OPERACIÓN

Sumas adelantadas:		
$30 \times 4 = 120$	Suma debida	$180 \times 8 = 1\,440$
$40 \times 6 = 240$	Suma adelantada	70
70	Diferencia	110
360		1 080

$$1\,080 : 110 = 9 \frac{9}{11} \text{ meses.}$$

Según las convenciones, Pablo podía guardar \$ 180 durante 8 meses; luego habría sacado un interés igual al de 180×8 o \$ 1 440 en 1 mes; pero ha guardado \$ 30 durante 4 meses y \$ 40 durante 6 meses.

La primera suma le ha producido un interés igual al de 30×4 ó \$ 120 durante 1 mes, y la segunda, un interés igual al de 40×6 o \$ 240 durante 1 mes. Por lo tanto ha sacado un interés igual al de $120 + 240$ ó \$ 360 durante 1 mes.

De los \$ 110 que no ha pagado todavía es de donde ha de sacar los intereses restantes. Luego, el cociente de 1080 por 110 representará el número de meses durante los cuales Pablo puede guardar los \$ 110.

El cociente $9 \frac{9}{11}$ meses dice que este tercer pago podrá efectuarse 3 meses $\frac{9}{11}$ después del segundo.

PROBLEMA IV.—Sobre una suma de \$ 2 800 pagaderos el 20 de Mayo, se han dado a buena cuenta \$ 1 800 el 15 de Abril; se pregunta en qué época deberán pagarse los \$ 1 000 restantes para que haya compensación en los intereses?

El interés perdido por el deudor sobre los \$ 1 800 pagados el 15 de Abril, esto es, 35 días antes del vencimiento, se halla representado por $1\,800 \times 35 = \$ 63\,000$; y como los \$ 1 000 restantes deben producir al deudor un interés igual, encontraremos el número de días necesarios para esto, partiendo 63 000 por 1 000, esto es, 63 días; luego, los \$ 1 000 serán pagaderos 63 días después del 20 de Mayo, esto es, el 22 de Julio.

Si en vez de un solo pago efectuado el 15 de Abril, hubiera dado el deudor \$ 1 000 el 15 de abril, y \$ 800 el 30 del mismo mes, habríamos tenido por intereses de los pagos anticipados:

\$ 1 000 el 15 de Abril	× 35 días	35 000
800 el 30 de —	× 20 días	16 000
\$ 1 800		51 000

y por vencimiento del último pago, 51 000: 1 000, esto es, 51 días, que están por pagarse, después del 20 de Mayo, o sea el 10 de Julio.

481. REGLA.—Cuando de una suma pagadera a una fecha conocida se han adelantado uno o varios pagos, para encontrar el tiempo en que debe efectuarse el último pago, se multiplica cada pago anticipado por el tiempo que lo separa del vencimiento primitivamente fijado.

El cociente de la suma de estos productos por lo que se debe pagar aún, da el tiempo que se debe añadir a la fecha del primer vencimiento para obtener la fecha en que debe pagarse el resto de la deuda.

PROBLEMAS

DESCUENTO

859. ¿Cuál es el valor actual de las letras siguientes, según el descuento externo o comercial:

1º Del 16 de Julio de \$ 626,85, a 5 meses, descontada el 12 de Obre., al 4¾%.

2º Del 17 de Mayo, de \$ 1310,25, a 3 meses, descontada el 22 de Junio al 5½%.

3º Del 11 de Nbre., de \$ 525,90, a 7 meses, descontada el 4 de Mayo al 6%.

860. Patricio desea sacar \$ 5 000 del banco; ¿cuál debe ser el valor nominal de su letra, a 90 días, siendo el descuento de 6%?

861. Hernando compra mercaderías por \$ 1 486,90, y da en cambio de ellas su pagaré a 4 meses, con 7½% de descuento; ¿qué cantidad debe inscribir en el pagaré?

862. Con \$ 1 800 se ha pagado una letra descontada al 5% en 2 años; ¿cuál era el valor nominal de dicha letra según el descuento comercial?

863. He negociado en el banco el 12 de Marzo, al 6% una letra de \$ 705,60, pagadera el 28 de Junio; ¿qué suma he recibido?

864. Debo la suma de \$ 514,22, bajo las condiciones siguientes: \$ 208,32 pagaderos dentro de 10 meses, más \$ 123,24 pagaderos dentro de 18 meses, y el resto dentro de 22 meses; si logro poder pagar al contado con el descuento comercial del 4% anual, ¿qué suma debo desembolsar?

865. He comprado dos relojes en \$ 505, a 16 meses de plazo; pero habiéndolos pagado antes del vencimiento, he obtenido un descuento de \$ 18,05, al 5% anual; ¿en qué época hice el pago?

866. ¿Cuál es el valor nominal de una letra que, descontada por 211 días al 6%, se reduce a \$ 1 350,25?

867. ¿Cuál es la suma que, descontada por 1 año al 5%, queda disminuída de \$ 62?

868. ¿A qué tanto % anual debe descontarse una letra de \$ 900 para que resulte un descuento de \$ 36?

869. Una letra de \$ 1 000, descontada por 9 meses, se reduce a \$ 973,75; ¿cuál es el tanto del descuento?

870. ¿Cuál es el valor actual de \$ 117,60 pagaders al cabo de un año al 12% de descuento?

871. Una letra de \$ 139,94 es pagadera al cabo de 9 meses; ¿cuál es su valor actual, si el descuento es de 5% al año?

872. Cuál es el valor actual de un pagaré de \$ 429,98, debido dentro de 1 año 6 meses 1 día, al 5½%?

873. Una casa me ha costado \$ 2 964,12, y la he vendido por \$ 3 665,20, pagaderos al cabo de un año y medio; ¿cuál fuera mi ganancia si concedo un 8% de descuento, con tal que me paguen al contado?

874. He comprado \$ 5 464 de mercaderías a 15 meses plazo; pero si pago antes, me conceden un descuento del 5% anual; ¿en qué época deberé pagar para no desembolsar más que \$ 5 204?

875. Un negociante ha dado dos letras: la 1ª de \$ 243,16, pagadera el 6 de Mayo de 1911; la 2ª de \$ 178,64, pagadera el 25 de Sbre., del mismo año; ¿qué suma fué menester para descontar ambas letras el 11 de octubre de 1910, siendo el tanto del descuento al 7%?

876. He pagado \$ 370 por una suma que debía; ¿qué suma era ésta, sabiendo que me han concedido un descuento del 5¼%?

877. Qué es más ventajoso entre comprar harina a \$ 6,25 barril y a 6 meses plazo, o a \$ 6,50 a 9 meses plazo, debiendo ser el descuento al 8%?

878. ¿Cuál era el valor nominal de un pagaré que, descontado por 210 días al 6% anual, se ha reducido a \$ 640?

879. Un pagaré de \$ 721, descontado por 9 meses, se ha reducido a \$ 700; ¿cuál fue el tanto del descuento?

880. Una factura asciende a \$ 528; se concede una rebaja de 5½% al contado; ¿cuál es el precio neto de dicha factura?

881. Estoy debiendo la suma de \$ 2 571,10, a saber: \$ 800 pagaderos dentro de 10 meses, \$ 616 dentro de 9 meses, y lo demás al cabo de 12 meses; si pagando al contado, me conceden un descuento del 4% anual, ¿cuánto tendré que pagar?

882. El precio neto de un piano es de \$ 364; dos aficionados se presentan, y el uno ofrece \$ 400 con tal que le den el 12% de descuento; el otro, \$ 388 y pide el 8% de descuento. ¿Qué oferta es más ventajosa, y cuál es en ambos casos el beneficio o la pérdida?

883. Un mercader compra jabón en \$ 108 los 100 kg. ¿A cómo debe vender el kg. para realizar un beneficio de 19% sobre el precio de venta?

884. ¿A cómo sale al fabricante un reloj marcado \$ 400,

sabiendo que al hacer una rebaja de 10% sobre este precio, ese fabricante gana todavía 20%?

885. Un mercader compra un mueble por \$ 600; ¿a cómo debe venderlo, para que haciendo una rebaja de 8%, su beneficio sea todavía de 15% sobre el precio de compra?

886. ¿Cuál es el valor actual de una letra de \$ 1 100, pagadera dentro de un año, sabiendo que este valor, colocado hoy a intereses, vendría a ser al cabo de un año \$ 1 100, siendo el tanto 6%?

887. Se han recibido \$ 5 917 por dos letras de cambio que valen juntas \$ 5 970, y que se han descontado al 6%; la 1ª pagadera en 1 mes $\frac{1}{2}$, la 2ª en 2 meses 25 días; ¿cuál es el valor de cada una?

888. Búsquese el valor actual, según el descuento racional, de las letras siguientes, en la época en que han sido descontadas, a saber:

1º Del 3 de Febrero, de \$ 313,80, a 5 meses, descontada el 6 de junio, al 5%.

2º Del 2 de Abril, de \$ 618,45, a 4 meses, descontada al 30 de Mayo, al $4\frac{1}{2}\%$.

3º Del 14 de Junio, de \$ 4 682,70, a 3 meses, descontada el 2 de Agosto, al 6%.

889. La diferencia entre el descuento racional y el comercial de un pagaré descontado por 180 días, al 6%, es de \$ 5,40; ¿cuál es el valor nominal?

890. La diferencia entre el descuento racional y el comercial de un pagaré descontado por 200 días, al 6%, es de \$ 9,80; ¿cuál es su valor actual?

VENCIMIENTO COMÚN DE PAGOS

891. La suma de \$ 1 710 debe ser pagada en dos dividendos, la mitad al cabo de 6 meses, y lo demás dentro de 10; si se quiere hacer un solo pago, ¿cuándo deberá verificarse?

892. Veinticinco toneles de vino han costado \$ 1 125 pagaderos en dos plazos, a saber: \$ 525 dentro de 6 meses, y lo demás 3 meses después; el comprador desea hacer un solo pago; ¿cuándo deberá efectuarlo?

893. El 1º de Enero de 1908 dio un mercader tres libranzas: la 1ª de \$ 500, pagaderos al cabo de 30 días; la 2ª de \$ 400, pagaderos al cabo de 60 días, y la 3ª de \$ 600, pagaderos dentro de 90 días; ¿cuál ha sido el tiempo medio del pago?

894. ¿Dentro de cuanto tiempo habrá que pagar \$ 1 560 en vez

vez de pagar la mitad de la suma al cabo de 8 meses y lo demás al cabo de 10, para que la pérdida compense la ganancia?

895. El pago de una compra de \$ 18 000 debe hacerse como sigue: $\frac{1}{4}$ al cabo de 6 meses, $\frac{1}{5}$ al cabo de 8 meses y lo demás al cabo de 10. ¿Cuándo tendrá que verificarse un pago único?

896. Feliciano ha hecho el 15 de Mayo de 1910 una compra de varios artículos por \$ 8 000, cuya $\frac{1}{5}$ parte debería pagar al cabo de 6 meses, otra $\frac{1}{5}$ dentro de 8 meses, y lo demás al cabo de 10 meses; pero como desea hacer un solo pago, pregunta cuándo debe verificarlo.

897. Silverio debe \$ 1 895,20 por 2 368 galones de coñac, pagaderos dentro de 12 meses; pero como ha pagado 633 galones al cabo de 10 meses, se pregunta cuándo deberá pagar el resto.

898. He comprado a Celestino \$ 432 de mercancías, a 6 meses plazo. Al cabo de 1 mes le he dado \$ 75, y 5 meses después, \$ 200; ¿cuánto tiempo después de los 6 meses, deberé pagar el resto?

899. Vicente compra \$ 2 829,75 de café, y desea pagarlos en tres dividendos: el 1º es al 2º como 4 es a 5, y el 3º es igual a la mitad del 2º; el 1º debe satisfacerse al cabo de 4 meses; el 2º al cabo de 7 meses, y el 3º dentro de 1 año. Si paga \$ 975 al cabo de 6 meses, ¿durante cuánto tiempo puede guardar lo demás?

900. Un empresario ha construido una casa por \$ 24 140 pagaderos al cabo de 15 meses; pero como necesita fondos, el propietario le adelanta \$ 11 388 de 8 meses; ¿cuánto tiempo debe guardar el resto para compensar el adelanto que ha hecho?

901. Anselmo ha vendido \$ 8 400 de mercancías a 12 meses plazo, y ha recibido $\frac{1}{3}$ de esta suma al cabo de 5 meses; ¿en qué tiempo recibió los $\frac{2}{3}$ de la misma?

902. Eusebio debía \$ 150 pagaderos al cabo de 13 meses; ha pagado los $\frac{2}{3}$ antes del vencimiento, de modo que puede guardar el resto 2 años sin perjudicar a su acreedor; ¿cuánto pagó los $\frac{2}{3}$?

903. Un negociante debe 3 pagarés de igual valor, y vencibles, el 1º al cabo de 5 meses, el 2º al cabo de 9 meses y el 3º al cabo de 1 año 3 meses. Los paga dando al contado \$ 1 780, y firmando un pagaré de \$ 865 vencible al cabo de 3 meses; ¿cuál era el valor de los 3 pagarés, si el tanto del descuento es el 6%?

904. Julián compra mercancías por \$ 3 600 pagaderos al cabo

de 15 meses, pero habiendo pagado \$ 2 400 antes del vencimiento, guarda los \$ 1 299 restantes durante 3 años 9 meses; ¿en qué época hizo el primer pago?

905. ¿Cuál es el vencimiento medio de las cuatro letras siguientes: al 1º de \$ 500 pagaderos el 1º de Abril; la 2ª de \$ 640, el 4 de Junio; la 3ª de \$ 860 el 1º de Agosto; la 4ª de \$ 900, el 5 de Septiembre?

906. Una deuda de \$ 6 127,50 debe ser satisfecha por quintas partes: la 1ª al contado, la 2ª al cabo de 4 meses, la 3ª al cabo de 8 meses, la 4ª al cabo de 12 meses, y la 5ª al cabo de 15 meses; si el deudor quiere hacer un solo pago, ¿en qué época debe verificarlo?

CAPITULO V

REPARTIMIENTOS PROPORCIONALES REGLA DE COMPAÑIA

I. Repartimientos proporcionales

482. **Definición.**—Llámase regla de *repartimientos proporcionales* aquélla por medio de la cual se divide un número en partes proporcionales a otros números dados.

Los repartimientos proporcionales son *simples* cuando las partes buscadas son proporcionales a números simples; son *compuestos* cuando estas partes son proporcionales a los productos de varios números.

Repartimientos proporcionales simples

483. **PROBLEMA I.**—Divídase \$ 600 proporcionalmente a los números 3, 5 y 7.

Dividir \$ 600 proporcionalmente a 3, 5 y 7 es hallar tres números respectivamente proporcionales a 3, 5, 7, y cuya suma sea igual a 600.

Representemos por x, y, z los tres números, y tendremos:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{7}$$

Por consiguiente:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{7} = \frac{x+y+z}{3+5+7} = \frac{600}{15}$$

Lo que manifiesta que x, y, z son cuartas proporcionales:

$$x = \frac{600}{15} \times 3 = \$ 120.$$

$$y = \frac{600}{15} \times 5 = \$ 200.$$

$$z = \frac{600}{15} \times 7 = \$ 280$$

Reducción a la unidad.—Tenemos:

$$3 + 5 + 7 = 15$$

Si hubiera que repartir \$ 15, las partes serían 3, 5, 7; si el número que se debe repartir fuese \$ 1, las partes serían

$$15 \text{ veces menores, o } \frac{3}{15}, \frac{5}{15}, \frac{7}{15}$$

Pero como el número que se ha de repartir es \$ 600, las partes resultarán 600 veces mayores, o

$$\frac{3}{15} \times 600 = \$ 120; \quad \frac{5}{15} \times 600 = \$ 200; \quad \frac{7}{15} \times 600 = \$ 280.$$

484. **REGLA.**—Para dividir una cantidad en partes proporcionales a números dados, se multiplica el número que debe dividirse por cada uno de los números proporcionales, y se dividen los productos por la suma de dichos números.

485. **PROBLEMA II.**—Divídase el número 540 en partes propor-

cionales a los quebrados $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ y $\frac{5}{6}$.

Representemos por x, y, z , las tres partes, y tendremos:

$$\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{\frac{2}{3}} = \frac{z}{\frac{5}{6}}$$

Reduciendo los quebrados a un común denominador, resulta:

$$\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{\frac{2}{3}} = \frac{z}{\frac{5}{6}}$$

Estas razones no se alteran si multiplicamos los quebrados por el denominador común 12, suprimiéndolo, y resultará, como en el problema 1:

$$\frac{x}{6} = \frac{y}{8} = \frac{z}{10} = \frac{x+y+z}{6+8+10} = \frac{540}{24};$$

de donde: $x = \frac{540}{24} \times 6 = 135.$

$$y = \frac{540}{24} \times 8 = 180.$$

$$z = \frac{540}{24} \times 10 = 225.$$

486. REGLA.—Para dividir una cantidad en partes proporcionales a números quebrados, se reducen los quebrados a un común denominador, y se divide el número proporcionalmente a los numeradores.

487. Nota.—Cuando se ha de dividir un número en partes *inversamente proporcionales* a números dados, se buscan las razones inversas de estos números, y se procede como lo acabamos de ver.

EJEMPLO.—Un testador deja en herencia \$ 4 550 a cuatro sobrinos suyos, que tienen respectivamente 18, 15, 10 y 6 años, con la condición de que se dividan esta suma en partes inversamente proporcionales a la edad que tienen; ¿a cómo debe caberle a cada uno?

Las razones directas de las edades son evidentemente:

$$\frac{18}{1}, \frac{15}{1}, \frac{10}{1}, \frac{6}{1}$$

Pero como al mayor debe tocarle menor suma, las razones inversas serán:

$$\frac{1}{18}, \frac{1}{15}, \frac{1}{10}, \frac{1}{6}$$

Si llamamos v, x, y, z las partes respectivas, tendremos:

$$\frac{v}{18} = \frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{6}$$

o reduciendo los quebrados a un común denominador:

$$\frac{v}{90}, \frac{x}{90}, \frac{y}{90}, \frac{z}{90}$$

y suprimiendo los denominadores:

$$\frac{v}{5} = \frac{x}{6} = \frac{y}{9} = \frac{z}{15} = \frac{v+x+y+z}{5+6+9+15} = \frac{4550}{35};$$

de donde:

$$v = \frac{4550}{35} \times 5 = \$ 650; \quad x = \frac{4550}{35} \times 6 = \$ 780;$$

$$y = \frac{4550}{35} \times 9 = \$ 1170; \quad z = \frac{4550}{35} \times 15 = \$ 1950.$$

Repartimientos proporcionales compuestos

488. PROBLEMA 1.—Cuatro obreros han empleado 6 días de 10 horas en cierto trabajo; otros tres han empleado 5 días de 11 horas en el mismo trabajo; ¿qué suma recibirá cada grupo de obreros, si el trabajo se estima en \$ 180?

Solución

$$1^{\circ} \text{ grupo } 10 \times 6 \times 4 = 240 \text{ horas}$$

$$2^{\circ} \text{ — } 11 \times 5 \times 3 = 165 \text{ —}$$

$$\text{Total } 405 \text{ —}$$

Claro está que el producto de los días por las horas será el número de horas de trabajo; y el problema se reduce a una regla de repartimientos proporcionales simples, repartiendo los \$ 180 entre los dos grupos, según las horas de trabajo. Llamemos x, y las dos partes, y tendremos:

$$\frac{x}{240} = \frac{y}{165} = \frac{180}{405};$$

de donde: $x = \frac{180}{405} \times 240 = \$ 106 \frac{2}{3};$

$$v = \frac{180}{405} \times 165 = \$ 73 \frac{1}{3}$$

489. PROBLEMA II.—Repartir una gratificación de \$ 570 entre 3 servidores, en partes directamente proporcionales a sus años de servicio, e inversamente a su sueldo. El primero tiene 18 años de servicio, y \$ 2 000 de sueldo; el segundo, 15 años de servicio y \$ 1 800 de sueldo; el tercero, 12 años de servicio y \$ 1 500 de sueldo.

Para satisfacer las condiciones de los datos, se deben repartir \$ 570 proporcionalmente a 18, 15, 12 y a los quebrados

dos $\frac{1}{2000}$, $\frac{1}{1800}$ y $\frac{1}{1500}$; esto es, proporcionalmente a los

productos $\frac{18}{2000}$, $\frac{15}{1800}$ y $\frac{12}{1500}$

Simplifiquemos estos quebrados: $\frac{9}{1000}$, $\frac{1}{120}$ y $\frac{1}{125}$.

Reduzcamos a un común denominador:

$$\frac{27}{3000}, \frac{25}{3000} \text{ y } \frac{24}{3000}$$

El 1er. servidor recibirá: $\frac{570 \times 27}{76} = \$ 202,50;$

El 2º — — — $\frac{570 \times 25}{76} = \$ 187,50;$

El 3er. — — — $\frac{570 \times 24}{76} = \$ 180.$

Regla de compañía

490. Definición.—La regla de compañía tiene por objeto dividir entre varios socios la ganancia o pérdida que resulta de sus negocios.

Esta regla es la misma que la de los repartimientos proporcionales, aplicada a un caso particular.

491. Las ganancias y pérdidas deben repartirse pro-

porcionalmente a los capitales y al tiempo durante el cual han estado impuestos en el negocio.

La cantidad repartible entre los socios se llama *dividendo*; y la suma de las imposiciones, *capital social*.

492. PROBLEMA I.—Tres socios han ganado en sus negocios \$ 18 000; ¿qué parte le toca a cada uno, sabiendo que la imposición del primero fue de \$ 20 000; la del segundo de \$ 30 000, y la del tercero de \$ 36 000?

Representemos las ganancias por x , y , z , y tendremos:

$$\frac{x}{20\,000} = \frac{y}{30\,000} = \frac{z}{36\,000};$$

o simplificando $\frac{x}{10} = \frac{y}{15} = \frac{z}{18} = \frac{18\,000}{43};$

de donde: $x = \frac{18\,000}{43} \times 10 = \$ 4\,186 \frac{2}{43};$

$$y = \frac{18\,000}{43} \times 15 = \$ 6\,279 \frac{3}{43};$$

$$z = \frac{18\,000}{43} \times 18 = \$ 7\,543 \frac{38}{43}$$

493. PROBLEMA II.—Dos negociantes tratan de repartirse una ganancia de \$ 3 450; se desea saber cuánto le toca a cada uno, habiendo impuesto el primero \$ 3 000 durante 15 meses, y \$ 1 200 el segundo, durante 20 meses.

Como el primero impuso \$ 3 000 durante 15 meses, debe gozar del mismo beneficio que si hubiera impuesto

$$3\,000 \times 15 = \$ 45\,000 \text{ durante 1 mes}$$

y el segundo, $1\,200 \times 20 = \$ 24\,000$ " "

Por consiguiente: $\frac{x}{45\,000} = \frac{y}{24\,000} = \frac{3\,450}{69\,000};$

o simplificando, $\frac{x}{45} = \frac{y}{24} = \frac{3\,450}{69};$

de donde: $x = \frac{3\,450}{69} \times 45 = \$ 2\,250.$

$$y = \frac{3450}{69} \times 24 = \text{Bs. } 1\ 200.$$

PROBLEMAS

REPARTIMIENTOS PROPORCIONALES

907. Dividáanse \$ 810 en partes proporcionales a 3, 6 y 9.
908. Habiéndose reunido 3 jardineros para cultivar un jardín, han ganado juntos \$ 65: el 1º ha trabajado durante 15 días; el 2º, durante 12 días, y el 3º, durante 25 días; pregúntase qué parte de la ganancia le toca a cada uno en proporción del tiempo de su trabajo.
909. Queriendo gratificar un príncipe a 3 oficiales veteranos, les destina anualmente la suma de \$ 8 000; ¿cuánto le toca cada uno, sabiendo que deben recibir en proporción de su edad, y que el 1º cuenta 65 años; el 2º, 70 y el 3º, 75?
910. Divídase el número 255 en tres partes, de modo que la 1ª sea a la 2ª como 5 es a 4, y la 1ª a la 3ª como 4 es a 3.
911. Una persona da \$ 12 a 5 pobres repartiéndoselos proporcionalmente a los números siguientes: 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6; ¿qué suma recibe cada uno?
912. Repártanse \$ 21 500 entre tres personas de modo que la parte de la 1ª sea a la de la 2ª como 4 es a 5, y la de la 2ª a la de la 3ª como 7 es a 8.
913. Divídase el número 858 proporcionalmente a los quebrados: 3/4, 5/6, 4/5.
914. Divídase la suma de \$ 72 entre dos personas, de modo que la segunda tenga los 4/5 de lo que tuviere la primera.
915. Se trata de repartir \$ 360 entre tres personas, de modo que la 2ª tenga el triple de la 1ª; y la 3ª, la mitad de lo que tengan juntas la 1ª y la 2ª; ¿cuánto recibirá cada una?
916. Máximo muere dejando en su testamento una herencia de \$ 84 000 a un hermano que se halla en un país lejano, y del cual no ha tenido noticias mucho tiempo há. El tenor del testamento es el siguiente: "Si mi hermano tiene una hija, dejo para ella los 2/3 de la herencia, y 1/3 para el padre; pero si tiene un hijo, a éste le tocará el 1/3 de la herencia, y los 2/3 para el padre". Sucede que el hermano de Máximo tiene un hijo y una hija; ¿cómo deberá hacerse la repartición?
917. Repártanse \$ 494 entre tres personas de modo que la

parte de la 1ª sea a la de la 2ª como 2/3 es a 1/2, y la parte de la 2ª sea a la de la 3ª como 5/6 es a 4/5.

918. Un hacendado tiene en su corral 126 aves, de las cuales hay 2 veces más gallinas que patos, y 2 veces más patos que gansos; ¿cuántas aves hay de cada una de las tres especies?
919. En la puerta de una iglesia se encuentran habitualmente dos mendigos, a saber: una pobre mujer todos los días, y alternativamente un ciego y un cojo. Una señora caritativa envía a su hijo con 52 centavos, y le dice: "Si encuentras a la pobre mujer y al ciego, le darás a éste los 3/4 de la suma, y a la mujer 1/4; pero si está allí el cojo, no le darás a él más que 1/4 de la suma, y los 3/4 a la mujer" Sucede casualmente que aquel día los tres mendigos se hallan a la puerta de la iglesia; ¿qué limosna recibirá cada uno?
920. Tres obreros empleados en un taller han ganado \$ 1 240: el 1º ha trabajado durante 10 días de 8 horas de trabajo; el 2º, durante 9 días de 12 horas, y el 3º, durante 6 días de 10 horas; ¿cuál será la parte de cada uno, en proporción de su trabajo?
921. Dos maestros carpinteros han emprendido la construcción del entablado de una sala: el 1º ha empleado 8 oficiales durante 15 días, y el 2º, 10 durante 14 días; pregúntase qué parte le toca a cada uno, en proporción de su gasto, sobre \$ 7 500 destinados a esta obra.
922. Dos hacendados arriendan una dehesa en \$ 650; el 1º pone en ella 150 bueyes durante 180 días y 10 horas por día; y el 2º, 80 durante 260 días y 8 horas por día; ¿cuánto debe pagar cada uno?
923. Valerio al morir deja su fortuna a 6 parientes, 3 de los cuales son del 4º grado, 2 del 5º y 1 del 6º, con la condición de que el repartimiento se hará en razón inversa del grado de parentesco. Siendo de \$ 395 000 la suma que debe dividirse, ¿a cómo le cabe a cada uno?
924. Con \$ 750 se han comprado dos caballos que han sido pagados en razón directa de su fuerza, la cual es proporcional a los números 121 y 144, y en razón inversa de la edad que tienen, y que es proporcional a los números 5 4/9 y 6 1/4; ¿cuál es el precio de cada caballo?
925. Dos obreros quieren dividirse la suma de \$ 364 que han ganado; pregúntase cuál será la parte de cada uno, sabiendo que el primero ha trabajado 10 horas por día durante 18 días, y el segundo 11 horas diarias durante 25 días,
926. Doscientos noventa hectolitros 25 litros de vino deben

ser divididos en tres partes, siendo la menor y la mediana respectivamente los $\frac{7}{8}$ y los $\frac{15}{16}$ de la mayor. Calcúlese en litros cada una de ellas.

927. Un profesor quiere repartir 75 buenas notas a 4 alumnos por una oposición de ortografía; el 1º tiene una falta; el 2º dos; el 3º tres, y el 4º cuatro; ¿cuántas notas le corresponden a cada uno en proporción de su mérito?

928. Un testador deja \$ 11 100 a 2 sobrinos, 3 sobrinas y 5 primos, advirtiendo que la parte de cada primo es los $\frac{3}{4}$ de la de una sobrina, y que la de cada sobrina no es más que los $\frac{4}{5}$ de la de un sobrino; ¿cuánto le cabe a cada uno de los partícipes?

929. Divídase 156 en tres partes tales que la 1ª sea a la 2ª como 5 es a 4, y la 1ª a la 3ª como 7 es a 3.

930. En una fábrica se emplean hombres, mujeres y niños; se han pagado \$ 132 por 25 jornales de hombres, 21 de mujer y 26 de niño. Los precios son tales que 9 jornales de mujer cuestan lo mismo que 16 de niño, y 8 jornales de hombre tanto como 15 de mujer; ¿cuál es el jornal de cada hombre, mujer y niño?

931. Un rentista divide su capital en dos partes que son entre sí como 3 es a 4; la 1ª impuesta al 5% y la 2ª, al 4,50%; el rédito anual es de \$ 1 650; ¿cuál es el capital y cuáles las partes?

932. Feliciano divide su capital en tres partes, que son entre sí como los números 2, 5 y 8; la 1ª impuesta al 6%; la 2ª al 5%, y la 3ª, al 4%; esta última le produce anualmente \$ 2 400; ¿cuál es el capital?

933. Un banquero impone los $\frac{2}{5}$ de un capital al 5% y lo deja durante 18 meses; impone lo demás al 4,50% y lo deja durante 20 meses, ambas partes le producen \$ 2 250; ¿cuál es el capital total, y cuáles las partes?

REGLA DE COMPAÑÍA

934. Habiéndose asociado cuatro comerciantes han formado un capital de \$ 45 000, para el cual han contribuido de igual modo; al disolverse la sociedad se encuentran con una ganancia de \$ 26 877. Al 1º le tocan 13 partes; al 2º, 11; al 3º, 8, y al 4º, 7; ¿qué suma recibirá cada comerciante, tanto por su imposición como por la ganancia?

935. Cinco hacendados se han concertado para un negocio; el 1º ha puesto \$ 800; el 2º, \$ 100 más que el primero; el 3º \$ 100 más que el 2º, y así sucesivamente, aumentando siempre \$ 100; habiendo ganado entre todos \$ 1 800; ¿cuánto le toca a cada uno?

936. Tres negociantes han formado un capital de \$ 4 928, que les ha producido \$ 616: al 1º, le han cabido \$ 150; al 2º, \$ 206, y al 3º, \$ 260; ¿qué suma impuso cada uno?

937. Dos especuladores embarcaron 6 000 toneles de trigo para Cuba; en el trayecto un huracán obligó a echar 650 al mar, y resultaron 250 dañados; pregúntase cuántos toneles perdió cada uno de ellos, sabiendo que el 1º había embarcado 3 500.

938. Habiendo hecho bancarrota Fabio, resulta deudor de \$ 21 000 a Norberto, a Valeriano y a Vicente; el crédito del 1º y del 2º es como 2 es a 3, el del 2º y del 3º, como 4 es a 5; ¿qué suma le corresponde a cada acreedor?

939. Una compañía de 4 personas ha ganado, en 6 años, \$ 25 000 sobre un capital de \$ 54 980; la suma impuesta por la 1ª es a la de la 2ª como 3 es a 4; la de la 2ª a la de la 3ª como 6 es a 7; por último la de la 3ª es a la de la 4ª como 5 es a 6. Pregúntase cuál es la suma impuesta por cada persona, y cuál su ganancia.

940. Tres empresarios se han concertado para un negocio; el 1º ha impuesto \$ 4 000 por 3 años; el 2º, \$ 7 000 por 2 años, y el 3º \$ 4 500 por 4 años; si han realizado un beneficio de \$ 3 600, ¿cuánto recibirá cada uno?

941. Dos personas se han asociado para un negocio: la 1ª ha puesto \$ 2 300 por 2 años; y la 2ª \$ 1 500 por 18 meses; dígase qué parte de la ganancia de \$ 1 400 le corresponde a cada una de ellas.

942. La suma de las imposiciones de dos socios es de \$ 24 600, y la del 1º excede a la del 2º en \$ 2 400; ¿qué parte le toca a cada uno, sobre un beneficio de \$ 8 610?

943. Fabricio y Valentín han realizado un beneficio igual al 4% del fondo social; la parte del beneficio del 1º es de \$ 2 600 la del 2º, de \$ 1 840; calcúlese la suma impuesta por cada uno de ellos.

944. Marcelino ha puesto en un negocio \$ 1 260; Norberto, \$ 1 840, y Basilio, \$ 2 520; han realizado un beneficio de \$ 0,80 por peso; ¿qué parte del beneficio le toca a cada uno?

945. Tres personas han realizado un beneficio de \$ 600: la 3ª ha recibido por su parte \$ 150; la 1ª y la 2ª han recibido tanto por la suma que impusieron como por los beneficios \$ 540 y \$ 810; ¿cuál fue la suma impuesta y la ganancia de cada persona?

946. Tres sobrinos se reparten una herencia: el 1º toma los $\frac{5}{9}$ de ella; el 2º, los $\frac{2}{7}$, y el resto se divide en tres partes iguales. Después de la división han puesto sus capi-

tales en sociedad, y en 4 años han realizado \$ 18 144 de beneficios. Sabiendo que al 2º le tocaron \$ 19 200 por su parte de la herencia, se pregunta: 1º cuál fue la parte del 1º y 3º sobrino; 2º la ganancia de cada uno, y 3º a qué tanto % han impuesto su dinero.

947. Una empresa iniciada por tres personas ha producido \$ 915 de beneficio neto. Una de ellas recibió por su parte de la ganancia \$ 345; la otras dos recibieron tanto por su imposición como por su parte de la ganancia, respectivamente \$ 2.365 y \$ 3.905; ¿cuál fue la imposición de cada una?

948. Cuatro personas formaron una compañía para 3 años: la 1ª impuso al principio \$ 350, y 5 meses después \$ 2 400; la 2ª impuso al principio \$ 8 000, y al cabo de 20 meses sacó la mitad, y 5 meses después \$ 2 400; la 3ª impuso \$ 1 500 al principio, y \$ 5 000 al cabo de 2 años; la 4ª impuso al principio \$ 600, y cada 6 meses aumentaba su imposición de igual suma. Dígase cuánto le toca a cada una sobre la ganancia que es de \$ 80 000.

CAPITULO VI

TERMINO MEDIO

MEZCLA O ALIGACION — LIGACION

I. Término medio

494. **Definición.**—Regla del término medio es la operación por la cual se busca un número medio entre varios otros números de la misma especie.

495. Llámase *media aritmética* entre dos números la semisuma de estos números.

La media aritmética entre varias cantidades es el cociente de su suma por su número.

Así, la *media aritmética* entre los números 16 y 12 es:

$$\frac{16 + 12}{2} = \frac{28}{2} = 14.$$

La media aritmética entre los números 12, 27, 20, 23 es:

$$\frac{12 + 27 + 20 + 23}{4} = \frac{82}{4} = 20,5.$$

496. **PROBLEMA.**—Un obrero que ha trabajado durante 4 días, ha ganado el 1er. día \$ 0,90; el 2º \$ 1,50; el 3º \$ 2,75 y el 4º \$ 3,25; ¿cuál es el término medio de su ganancia diaria?

En los 4 días el obrero ha ganado:

$$\$ 0,90 + 1,50 + 2,75 + 3,25 = 8,40.$$

$$1 \text{ día ganará} \quad 8,40 : 4 = 2,10.$$

497. **REGLA.**—Para encontrar la media aritmética entre varios números, se suman estos números, y se divide el total por el número de ellos.

II. Mezcla o aligación

498. **Definición.**—Mezcla o aligación es una operación que tiene por objeto resolver los problemas referentes a la combinación o mixtura de varias sustancias.

Ocurren dos casos distintos en la regla de mezcla:

1º Buscar el precio medio de una mezcla, cuando se conocen las cantidades y los precios respectivos de las sustancias que la componen.

2º Determinar qué cantidad debe tomarse de cada una de las sustancias que componen la mezcla, cuando se conoce el valor de cada una de ellas y el precio medio de la mezcla.

499. 1er. CASO.—Problema I.—Un comerciante tiene vino a \$ 1, a \$ 2, a \$ 5 a \$ 6 botella; ¿a cuánto le sale cada una?

$$\text{Tenemos (495):} \quad \frac{1 + 2 + 5 + 6}{4} = \$ 3,5 \text{ la botella.}$$

PROBLEMA II.—Se han mezclado 80 litros de aceite a \$ 1,80; 95 lit. a \$ 2,10 y 120 lit. a \$ 1,90; ¿cuál es el precio medio del litro de estamezcla?

Disposición de la operación

80 lit. a \$ 1,80, importan	80 × 1,80 = \$ 144
95 — 2,10 —	95 × 2,10 = 199,50
120 — 1,90 —	120 × 1,90 = 228
295 — —	\$ 571,50

Ya que 295 lit. importan \$ 571,50, uno solo importará 295

$$\begin{array}{r} 571,50 \\ \hline 295 \end{array} = \$ 1,937.$$

veces menos, o

500. REGLA.—Para encontrar el precio medio de una mezcla, se busca el precio total, y se lo divide por el número de unidades que componen la mezcla.

501. 2º CASO.—Problema I.—Un especiero tiene té a 55 y a 80 cents. la libra; ¿cuánto debe tomar de cada calidad para poder vender la libra al precio medio de 70 cents.?

Operación

Después de haber escrito los precios de los objetos mezclados en una columna vertical, y el precio medio un poco a la derecha, entre el precio superior y el inferior, digo:

55	15 ganancia.
70	
80	10 pérdida.
—	
25	

Al vender en 70 cents. una libra que no cuesta más que 55 cents., se ganan 15 cents.; sobre 10 lbs. se ganan $15 \times 10 = 150$ cents.; al vender en 70 cents. una libra que importa 80, se pierden 10 cents.; y sobre 15 lbs. se pierden $10 \times 15 = 150$ cents. De este modo la ganancia es igual a la pérdida, y se puede formar la cantidad pedida tomando 10 lbs. de a 55 cents., y 15 lbs. de a 80 cents.

PROBLEMA II.—¿Qué cantidad debe mezclarse de un licor de a 24 cents. el litro con 100 lit. de licor de a 30 cents., para que pueda venderse el litro de mezcla en 26 cents. sin perder ni ganar?

Disposición de los datos

24	2 ganancia.
26	
30	4 pérdida.

Vendiendo en 26 cents. lo que importa 24, se ganan 2 cents. y vendiendo en 26 cents. lo que importa 30, se pierden 4 cents. Cuando se toman 2 lit. de a 30 cents., para que la ganancia compense a la pérdida, se deben tomar 4 lit. de a 24 cents.; si sólo se tomara 1 lit. de a 30 cents. debería tomarse una cantidad 2 veces menor de a 24 cents.; esto es, $\frac{4}{2}$; y como se toman 100 lit. de a 30 cents. deberá tomarse una cantidad 100 veces más de a 24 cents.; a saber $\frac{4 \times 100}{2} = 200$ litros.

Bastan estos dos ejemplos para dar a conocer la marcha que se ha de seguir.

502. REGLA.—Las dos cantidades buscadas son inversamente proporcionales a las diferencias de sus precios respectivos con el precio medio.

Si se quiere saber qué cantidad de sustancias deben mezclarse para tener una cantidad dada, basta dividir esta cantidad en la relación que se acaba de encontrar.

503. Nota.—Cuando se trata de mezclar más de dos sustancias sucede ordinariamente que el problema es *indeterminado*; esto quiere decir que admite varias soluciones, como en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO.—Baldomero tiene trigo de a \$ 18, \$ 19, \$ 20, \$ 50, \$ 21,50 y de a \$ 23 el hectolitro; quiere vender 650 hectolitros al precio medio de \$ 20, de modo que ni pierda ni gane; ¿cuántos debe vender de cada especie?

Disposición de los datos

Precios.	Diferencias.	
18	2	}
19	1	
20,50	0,5	}
21,50	1,5	
23	3	

20

$= 3 \text{ ganancia. } 3 \times 3 = 9$

$= 5 \text{ pérdida. } 5 \times 2 = 10$

$\frac{10}{19}$

Como al tomar un hectolitro de cada especie, el beneficio total en los precios inferiores es 3, y la pérdida total en los precios superiores es 5, si se toman cinco medidas de cada uno de los precios inferiores, y tres de cada uno de los precios superiores, el beneficio será igual a la pérdida.

Por consiguiente, si, sobre 19 medidas de mezcla, se necesitan 3 de cada uno de los precios superiores, sobre 650,

$$\text{se necesitarán: } \frac{3 \times 650}{19} = 102 \frac{12}{19}$$

Del mismo modo, si sobre 19 medidas de mezcla se necesitan 5 de cada uno de los precios inferiores, sobre 650 se necesitarán:

$$\frac{5 \times 650}{19} = 171 \frac{1}{19}$$

III — Ligación

504. Definición.—Regla de ligación es la misma regla de mezcla aplicada a la combinación de metales fundidos entre sí.

Cuando uno de los metales es precioso, como el oro, la plata, se lo llama metal *fino*.

La mezcla toma el nombre de *amalgama* cuando entra en ella el mercurio o azogue.

Dase el nombre de *liga* a la porción pequeña de cobre que se mezcla con el oro o la plata, cuando se bate moneda, para darle más consistencia.

Véanse los No^o 390, 391, 392 sobre lo que es *ley* de una ligación, y el modo de obtener el *peso del metal fino*, y el *peso total* de la ligación.

505. PROBLEMA I.—Se derriten juntamente 560 gramos de oro de 0,950 de ley, y 450 gramos de 0,580 de ley; ¿cuál es la ley de la nueva barra?

Ya que la ley de una ligación (390) es el cociente del peso del metal precioso por el peso total, se obtiene el peso del metal fino multiplicando el peso total de la ligación por la ley.

Los 560 gr. de la primera barra contienen pues:

$$560 \times 0,950 = 532 \text{ gr. de oro puro,}$$

y los 450 gr. de la segunda contienen:

$$450 \times 0,580 = 261 \text{ gr. de oro puro.}$$

Así pues, sobre 560 + 450, o 1010 gr. de ligación, hay 532 + 261 o 793 gr. de oro puro; la ley de la nueva barra

es de $\frac{793}{1010}$, o 0,785 por defecto.

506. PROBLEMA II.—Una barra de plata de 0,835 de ley pesa 1250 gramos. ¿Qué peso de otra barra de 0,950 de ley se le debe añadir para que resulte una barra de 0,900 de ley?

DISPOSICIÓN DE LOS DATOS

0,835	0,065		Se pueden mezclar 50 gr. de
	0,900		0,835 de ley con 65 gr. de 0,950
0,950	0,050		de ley. En efecto, al tomar
			50 gr. de la ley de 0,835, resul-
			tan 50 veces 0 gr. 065 de plata
			menos que lo que indica la ley
			de 0,900; y al tomar 65 gr.

de la ley de 0,950, resultan 65 veces 0 gr. 050 de plata más que lo que indica la ley de 0,900; luego hay compensación.

Si 50 gr. de 0,835 de ley exigen 65 gr. de 0,950 de ley, 1250 gr. exigirán:

$$\frac{65 \times 1250}{50} = 1625 \text{ gramos.}$$

507. PROBLEMA III.—Un platero tiene 5 barras de oro, cuya ley es: 1^o 0,675; 2^o 0,750; 3^o 0,805; 4^o 0,885, y 5^o 0,915; ¿qué cantidad debe tomar de cada una para formar otra barra que pese 758 gramos, y sea de 0,840 de ley?

Disposición de la operación

Tomando las milésimas por unidad, tenemos:

$$\begin{array}{r} 675 \\ 750 \\ 805 \end{array} \left. \begin{array}{l} 165 \\ 90 \\ 35 \end{array} \right\} = 290; 29 \times 2 = 58; \frac{12 \times 758}{94} = 96 \text{ gr } 766$$

$$\begin{array}{r} 885 \\ 915 \end{array} \left. \begin{array}{l} 45 \\ 75 \end{array} \right\} = 120; 12 \times 3 = 36; \frac{29 \times 758}{94} = 233 \text{ gr } 851$$

Tomando 1 gramo de cada una de las barras de ley inferior, tenemos que sus diferencias con la ley media dan:

$$165 + 90 + 35 = 290 \text{ milés.}$$

Tomando 1 gramo de cada una de las otras barras, tenemos un total de 45 + 75 = 120 milés., de sus diferencias con la ley media. Así pues, cuando se toman 120 gr. de cada una de las leyes inferiores, se deben tomar 290 gr. de cada una de las superiores. Para abreviar, dividamos 120 y 290 por 10, lo que da 12 y 29.

Cuando se toman 29 gr. de cada una de las barras de 0,885 y 0,915, se deben tomar 12 de cada una de las otras tres; y se toman por consiguiente 12 × 3 = 36 gr. de las leyes inferiores, y 29 × 2 = 58 de las superiores, formando así 94 gr. de ligación de 0,840 de ley.

Si para obtener 94 gr. de liga, se toman 12 gr. de cada una de las leyes inferiores, para obtener 758 gr. de liga, se tomarán:

$$\frac{12 \times 758}{94} = 96 \text{ gr } 766.$$

Del propio modo encontraremos que de cada una de las leyes superiores deberán tomarse 233 gr 851

508. PROBLEMA IV.—Una barra de plata pesa 3 500 gr. y tiene 0,815 de ley; ¿qué cantidad de plata pura se le debe añadir para darle la ley de 0,835?

Como la cantidad de cobre no varía, el que está contenido en la barra dada es los $\frac{1\ 000}{185}$ del peso total, y pesa por consiguiente

$$\frac{3\ 500 \times 185}{1\ 000} = 647\ \text{gr}\ 50.$$

En la nueva barra que se pide, el cobre debe representar los $\frac{165}{1\ 000}$ del peso total; luego los $\frac{165}{1\ 000}$ igualan a 647 gr

50; $\frac{1}{1\ 000}$ será $\frac{647,50}{165}$, y los $\frac{1\ 000}{1\ 000}$ serán:

$$\frac{647,50 \times 1\ 000}{165} = 3\ 924,24,\ \text{peso total.}$$

Por consiguiente, $3\ 924,24 - 3\ 500 = 424\ \text{gr}\ 24$, será la cantidad de plata que debe añadirse.

PROBLEMAS

Término medio

949. Un regimiento ha caminado durante 6 días como sigue: el 1º día 24 millas; el 2º, 29; el 3º, 26; el 4º, 30; el 5º, 22; el 6º, 25; ¿cuál es el término medio de su marcha diaria?

950. Para probar un cañón de artillería se han disparado 25 tiros; 10 de ellos han alcanzado a 2560 metros; 5 a 2590 m.; 6 a 2600 m., y 4 a 2550 m.; ¿cuál es el alcance medio de dicho cañón?

951. Ocho obreros durante 5 meses se han empleado en tres obras distintas: la 1ª era de 40 metros, la 2ª, de 50, y la 3ª, de 80; por la 1ª obra recibieron \$ 240; por la 2ª, \$ 200; por la 3ª, \$ 240. Se les propone otra obra de 350 metros, al precio medio de las tres primeras; ¿cuál será el precio de estos 350 metros, y la parte de cada uno?

952. Teodosio hace desmontar 4 hectáreas de terreno; como éste no ofrece en todas partes una misma dificultad, el precio había sido distinto: por la 1ª se pagan \$ 250; por la 2ª, \$ 175; por la 3ª, \$ 163,75, y por la 4ª, \$ 158,25; ¿cuál es el precio medio, y cuánto se ha gastado por todo?

953. Máximo compra 850 metros de tela a \$ 319; ha vendido 350 a \$ 3,56, 220 a \$ 3,70, y los demás a \$ 3,80; ¿cuánto ha ganado por metro, término medio?

954. Ramiro recibe \$ 136,40 por semana para pagar a 18 obreros que tiene a sus órdenes; ¿cuánto le quedará para él, al fin del año, si a 5 de los obreros les da \$ 1,60 por día; a 4 obreros, \$ 1,20; a 6 de ellos, \$ 0,60, y a los 3 restantes, \$ 0,40?

955. Víctor compra té de dos calidades: paga la menor parte a \$ 0,90 la libra, y lo demás a \$ 0,63; ¿cuál es el precio medio de la libra, sabiendo que la diferencia entre la cantidad de a \$ 0,90 y la de a \$ 0,63 es de 306 lbs., y que el cociente de ellas es 26?

2º Mezcla

956. Habiendo vaciado Dámaso los $\frac{3}{4}$ de un tonel de 240 litros, lo llena con vino de a \$ 0,35; ¿a cuánto le sale el litro de mezcla, sabiendo que el primero era de \$ 0,60 el litro?

957. Qué cantidad de agua se debe añadir a 25 lit. de vino de a \$ 0,60 el lit. para que la mezcla no valga más que \$ 0,50 el litro?

958. Un mercader tiene diversas especies de maíz a \$ 1,20 \$ 1,60, \$ 2,40, \$ 3, \$ 3,60; quiere vender 650 hl. a \$ 2, de modo que no pierda ni gane; ¿cuántos debe vender de cada especie?

959. Fulgencio tiene 3 barriles de vino: el 1º contiene 230 lit. a \$ 0,35, el lit.; si mezcla estos vinos, añadiendo 3º, 195 lit. a \$ 5,00 el lit.; si mezcla estos vinos, añadiendo 45 lit. de agua, ¿a cómo le sale el litro de mezcla?

960. Un consumidor pregunta qué cantidad de agua debe añadir a una botella de vino de a 75 cents. para que le salga sólo a 60.

961. Mauricio quiere comprar café a 48 cents., a 50 y a 60 la libra; ¿cuántas debe tomar de cada precio para completar 850 lbs. al precio medio de 58 cents. cada una?

962. ¿En qué proporción debe comprarse un líquido de a \$ 25 y \$ 19 el hl. para que salga al precio medio de \$ 21 cada uno?

963. Feliciano ha comprado 2 barriles de trementina en \$ 45,60; el 1º cuesta \$ 7,20 más que el 2º, y cada uno de ellos tiene 48 galones; le quieren comprar 70 galones al precio medio de \$ 0,45, ¿cuántos debe vender de cada barril?

964. Esperidión ha comprado 48 lbs. de té, que sale al precio medio de \$ 0,60 la lb.; resulta que treinta de ellas importan \$ 0,75; ¿cuál era el precio de cada una de las demás?

965. Crescencia quiere comprar 646 lbs. de cuatro especies distintas de queso: la 1ª importa \$ 0,13; la 2ª \$ 0,23; la 3ª, \$ 0,25, y la 4ª, \$ 0,29; ¿cuántas debe tomar a cada calidad para quelalibrable salga a \$ 0,19?

966. Vicente tiene tabacos de a \$ 50, \$ 36, \$ 30 y \$ 28 el ql.; ¿qué cantidad debe tomar de cada especie para formar 20 qq. a \$ 32 cada uno?

967. Anastasio ha vendido 7 kg. de azúcar y 2 de café por 24 fr. 50; en otra ocasión, vendió 5 kg. del mismo azúcar y 8 del mismo café por 40 fr. 60; ¿cuánto importa el kg. de cada uno de estos artículos?

968. Las sustancias que entran en la composición del vidrio son las siguientes, según sus proporciones: 1º arena. 100 partes; 2º sulfato de sosa, 44; 3º carbón en polvo, 5; 4º cal apagada, 6; 5º pedazos de vidrio, 20; ¿qué peso de cada sustancia será menester para 832 kg. de arena?

969. ¿Cuánto aceite a \$ 2,40 el kg. debe mezclarse con 100 kg. a \$ 3, para poder vender el kilog. a \$ 2,65 sin perder ni ganar?

970. El mismo problema si se quiere ganar \$ 0,10 por kg.

971. Un comerciante tiene vinos a \$ 27, a \$ 32 y a \$ 36 el hectolitro; ¿cuántos hectolitro deben tomarse de cada precio para formar una mezcla de 350, que puedan venderse a \$ 345 cada uno, ganando el 15%?

972. Romualdo tiene vinagre a \$ 0,72, \$ 0,67, \$ 0,65, \$ 0,50 y \$ 0,45 el litro; quiere formar una mezcla de 480 litros, de modo que pueda venderlos a \$ 0,60 sin perder ni ganar; ¿cuánto debe tomar de cada calidad, sabiendo que deben entrar sólo 50 lit. a \$ 0,72 en esta mezcla?

973. Sinforiano ha comprado 80 hectol. de trigo a \$ 24, y 49 hectol. a \$ 21; si mezcla ambas especies, ¿cuál será el precio medio del hectol., y cuál la ganancia del mercader si revende su trigo a \$ 4,90 el doble decalitro?

974. Norberto saca los $\frac{4}{5}$ de un barril de vino que contiene 228 litros, y vuelve a llenarlo con vino de a \$ 0,45. ¿A cómo sale un litro del vino mezclado, sabiendo que el primero era de a \$ 0,60?

975. Patricio compra 3 barriles de vino para su uso: el 1º contiene 250 litros a \$ 0,35 c/u; el 2º 228 lit. y cuesta \$ 90, y el 3º 195 lit. a \$ 0,45 c/u. Si mezcla estos vinos y agrega 40 lit. de agua, ¿a cómo le saldrá el litro de mezcla?

976. A 215 lit. de un vino que importa a \$ 0,40 c/u, se añaden 5 lit. de alcohol, a \$ 2,50 el litro; ¿en cuánto debe venderse el litro de mezcla para ganar el 20% sobre el precio de compra?

977. Valentín tiene 150 hectol. de trigo a \$ 21, y 140 a \$ 26; ¿cuántos deben tomarse de cada precio para formar 250 hectol. al precio medio de \$ 23?

978. Un especiero tiene aceite a \$ 0,95, a \$ 0,85, a \$ 0,75 y a \$ 0,65 el litro; quisiera ganar en término medio \$ 0,10 por litro. ¿Cuántos litros debe tomar de cada especie para formar una mezcla de 240 lit. al precio medio de \$ 0,80?

979. Fernando tiene coñac a \$ 0,70, a \$ 0,80, a \$ 0,90 y a \$ 1,10 el litro; quiere formar una mezcla que pueda vender a \$ 1 el litro ganando \$ 0,14 por litro; ¿cuánto tomará de cada calidad para 1 litro de mezcla?

3º — LIGACION

980. Un platero tiene dos barras de plata: la una de 0,920 de ley, y la otra de 0,840; si liga un peso igual de cada una de las barras, ¿cuál será la ley de la nueva aleación?

981. Si se ligan dos barras de plata, la una de 27 kg. 50 de peso y 0,940 de ley, y la otra de 8 kg. 75 de peso y 0,870 de ley; ¿qué ley tiene la nueva barra?

982. Si se ligan 3 kg. 200 de plata pura y 5 de una aleación que tiene 0,650 de ley, ¿qué ley tiene la nueva liga?

983. Se derriten tres barras de plata, de 0,750, 0,840 y 0,950 de ley respectivamente, que pesan la 1ª 5 kg., la 2ª 3 kg 800 y la 3ª 3 kg. 500; ¿cuál es la ley de la aleación que resulta?

984. Un platero tiene dos barras de oro de 95 decagramos cada una, la 1ª de 0,920 y la 2ª de 0,750 de ley; ¿cuántos gramos de la 2ª deben añadirse a la 1ª para reducirla a la ley de 0,840?

985. ¿Qué cantidad de cobre debe añadirse a una barra de plata que pesa 635 gr. y tiene 0,920 de ley para que resulte una aleación de 0,835 de ley?

986. ¿Qué cantidad de oro puro debe añadirse a una barra

de oro de 548 gr. y de 0,840 de ley, para que resulte una barra de 0,900 de ley?

987. ¿Qué cantidad de dos barras de plata de 0,800 y de 0,950 de ley respectivamente, debe alearse para acuñar 225 piezas de 1 duro?

988. ¿Qué cantidad de plata de 0,920, 0,850, 0,740 y de 0,720 de ley es menester para formar 4 kg 65 de aleación, de 0,800 de ley?

989. Una barra de plata de 0,875 de ley pesa 2340 gr.; preguntase qué cantidad de cobre se le debe añadir para reducirla a la ley de 0,835.

990. Con los mismos datos, se pregunta qué cantidad de plata debería quitarse de la barra, para reducirla también a 0,835 de ley.

991. Con tres barras de 0,720, 0,840 y 0,950 de ley se trata de formar una aleación de 0,900 de ley que pese 5100 gr.; ¿qué cantidad debe tomarse de cada barra?

CAPITULO VII

REGLA CONJUNTA

509. Definición.—La *regla conjunta* tiene por objeto determinar la relación de igualdad o equivalencia que hay entre una cantidad dada y otra cantidad unida a la primera por una serie de relaciones conocidas.

510. REGLA. Para resolver una regla conjunta, se representa por x la cantidad buscada y se escribe primero la igualdad que expresa el objeto de la cuestión; debajo se escriben las demás igualdades dadas por las relaciones conocidas, con la condición de que el primer miembro de una igualdad exprese unidades de la misma especie que las del segundo miembro de la igualdad precedente, hasta llegar a tener en el segundo miembro las mismas unidades que en el primer miembro de la primera igualdad; multiplicando miembro por miembro, haciendo caso omiso de la naturaleza de las unidades, resulta una igualdad de la cual se deduce el valor de x .

511. EJEMPLO 1.—Si 20 lbs. de los Estados Unidos equivalen a 12 lbs. de España; y 15 lbs. de España, a 20 lbs. de Dinamarca; y 40 lbs. de Dinamarca, a 60 lbs. de Rusia; ¿cuántas lbs. de Rusia equivalen a 100 lbs. de los Estados Unidos?

Operación

x lbs. de Rusia = 100 lbs. de los EE. UU.
 20 lbs. de los EE. UU. = 12 lbs. de España
 15 lbs. de España = 20 lbs. de Dinamarca
 40 lbs. de Dinamarca = 60 lbs. de Rusia

Multiplicando miembro por miembro, tendremos:

$$x \times 20 \times 15 \times 40 = 100 \times 12 \times 20 \times 60;$$

$$\text{De donde } x = \frac{100 \times 12 \times 20 \times 60}{20 \times 15 \times 40} = 120 \text{ lbs.}$$

512. EJEMPLO II.—Cálculase el peso de la moneda de oro alemana de 10 marcos, sabiendo que el marco vale exactamente $\frac{1}{3}$ thaler de Prusia, que estas dos monedas tienen 0,900 de ley, y que la relación del oro a la plata es de 15,5 a 1. Se sabe además que con 500 gramos de plata pura se acuñan 30 monedas de 1 thaler.

En cuanto al peso, tenemos:

x gramos de moneda = 10 marcos en oro
 15,5 marcos en oro = 1 marco en plata.
 3 marcos en plata = 1 thaler
 30 thalers = 500 gr. de plata pura.
 9 gr. de plata pura = 10 gramos de moneda.

Multiplicando y reduciendo, resulta:

$$x \times 15,5 \times 3 \times 30 \times 9 = 10 \times 1 \times 1 \times 500 \times 10;$$

$$\text{De donde } x = \frac{10 \times 1 \times 1 \times 500 \times 10}{15,5 \times 3 \times 30 \times 9} = 3 \text{ gr. 982.}$$

PROBLEMA

992. Cuando 100 lbs. de los EE. UU. valen 95 de Italia, y 19 lbs. de Italia equivalen a 25 de Persia; ¿cuántas lbs de los EE. UU. son menester para igualar a 50 lbs. de Persia?

993. ¿Cuánto costarán 150 gruesas de plumas, suponiendo que 12 gruesas de plumas valen como 6 litros de vino; 9 litros de vino valen lo mismo que 4 kg. de café; 15 kg. de café, lo mismo que 5 pañuelos; y 8 pañuelos importan 40 francos?

994. Expresar en federicos de Prusia el valor de 60 duros de España, sabiendo que 10 duros de España importan 47

chelines de Inglaterra; que 65 chelines de Inglaterra valen 33 florines de Holanda; y 40 florines de Holanda, lo mismo que 21 rublos de Rusia; y 156 rublos de Rusia, lo mismo que 30 federicos de Prusia.

995. Como 10 libras esterlinas de Inglaterra valen 102,15 florines de Viena, y 50 florines valen 100 marcos de Alemania, y 81 marcos importan 100 francos, se pregunta a cuántos francos equivalen 200 libras esterlinas.

996. Si 11 metros igualan a 12 yardas, y con 314 francos se compran 58 m. de paño, y 32 francos valen 25 chelines ¿cuántas yardas se podrán comprar con 55 chelines?

997. ¿Cuánto costarán 16 varas de tela, sabiendo que 6 varas equivalen a 5 met., que 8 m. importan 27 francos, y que 1 franco vale \$ 0,20?

998. Si con \$ 37 se compran 87 cámaras, y si 48 valen 15 dolares americanos, y 24 dolares igualan a 5 libras esterlinas; ¿cuántos galones americanos podrán comprarse con 35 lib. esterlinas, sabiendo que 81 galones equivalen a 19 cántaras?

999. ¿Qué suma necesitaría un Gobierno para pagar el sueldo de 7 generales, suponiendo que el de 4 generales es igual al de 9 coroneles, el de 5 coroneles al de 8 comandantes, el de 6 comandantes al de 10 capitanes, el de 12 capitanes al de 16 oficiales, el de 10 oficiales al de 15 sargentos, el de 3 sargentos al de 4 cabos, el de 2 cabos al de 3 soldados, si el de un soldado es de \$ 12?

CAPITULO VIII

METODO DE FALSA POSICION

513. Definición.—*Método de falsa posición*, o mejor dicho de *falsa suposición*, es el procedimiento por medio del cual se determina la incógnita de un problema por medio de una o más hipótesis.

Los problemas de falsa posición se resuelven con mucha facilidad por el álgebra.

514. El método de falsa posición es de dos especies: *simple* y *compuesto* o *doble*.

La falsa posición es *simple* cuando se supone un solo número para encontrar el verdadero, y *doble* cuando son dos los números supuestos.

515. REGLA.—Para resolver la falsa posición simple, se supone un número cualquiera en lugar de la incógnita; se hacen con el número supuesto todas las operaciones indicadas en el problema; con el número que así resulte y los demás datos conocidos formúlese la proporción siguiente:

El resultado obtenido es al número que se da en el problema como el número supuesto es al incógnito.

EJEMPLO.—Una persona ha vendido $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$ de una pieza de paño, y le sobran todavía 6 metros; ¿cuál era la longitud de dicha pieza?

Operación.

Número supuesto, 12 m., divisible por los denominadores.

$$\begin{array}{r} 1 \\ \hline = 4 \\ 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12 - 9 = 3; \\ \\ 3 \quad 12 \\ \hline = \frac{12}{6} = x; \\ 6 \quad x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \hline = 2 \\ 6 \quad \hline 9 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12 \times 6 \\ x = \frac{12 \times 6}{3} = 24 \text{ m.} \end{array}$$

Supongo que la longitud de la pieza era de 12 mets., número con el cual puedo ejecutar las operaciones indicadas; sumando las partes tomadas de 12, resultan 9; ahora bien, restando 9 de 12 encuentro 3 en lugar de 6 que dice el problema. Entonces, planteo la proporción como lo indica la regla, y resultan 24 metros.

Nota.—También puede resolverse este problema y muchísimos otros sin la falsa posición, conforme a los que van analizados en las lecciones referentes a los números quebrados.

516. REGLA.—Para resolver la falsa posición doble, se supone primero un número, con el cual se observan todas las condiciones expresadas en el problema; si el resultado da el número que se busca, la operación queda terminada; si el resultado no fuere el pedido, se busca la diferencia que hay entre los resultados encontrados. Se supone otro número con el cual se hacen las mismas operaciones indicadas, y se busca también la diferencia que hay entre los resultados; las diferencias en ambas suposiciones se llaman errores.

En seguida se restan los dos errores, y por último, se plantea la proporción siguiente:

La diferencia de las suposiciones es a la diferencia de los errores como x (o el número que se debe aumentar o disminuir a la 1ª suposición) es al primer error.

EJEMPLO.—Un profesor quiere repartir entre algunos de sus alumnos cierto número de naranjas, pero con la condición de que ellos mismos encuentren cuántos alumnos deben ser recompensados así, y cuántas naranjas les destina. Dícesle, pues, que si les da 7 a cada uno, le sobrarán 9; y si les da 10 a cada uno, le faltarán 6; cuántos serán los alumnos recompensados, y cuántas las naranjas que les destinó el profesor?

Primera suposición, 12 alumnos.

$$\begin{array}{l} 7 \times 12 = 84; \quad 84 + 9 = 93 \\ 10 \times 12 = 120; \quad 120 - 6 = 114 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 7 \times 12 = 84; \\ 10 \times 12 = 120; \end{array}} \right\} \text{Error 21.}$$

Segunda suposición, 10 alumnos.

$$\begin{array}{l} 7 \times 10 = 70; \quad 70 + 9 = 79 \\ 10 \times 10 = 100; \quad 100 - 6 = 94 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 7 \times 10 = 70; \\ 10 \times 10 = 100; \end{array}} \right\} \text{Error 15.}$$

Diferencia de los errores: $21 - 15 = 6$.

Diferencia de las suposiciones: $12 - 10 = 2$.

$$\text{Proporción: } \frac{2}{6} = \frac{x}{21}; \quad x = \frac{21 \times 2}{6} = 7$$

Debe restarse 7 de 12, 1ª suposición; $12 - 7 = 5$ al.

Comprobación.

$$7 \times 5 = 35; \quad 35 + 9 = 44 \text{ naranjas.}$$

$$10 \times 5 = 50; \quad 50 - 6 = 44 \text{ —}$$

517. Claro está que cada número supuesto da una diferencia tanto mayor cuanto más dista este número del verdadero. También es evidente que la diferencia

que hay entre los dos errores no proviene sino de la diferencia de los dos números supuestos, y que esta diferencia de los errores es tanto mayor, cuanto más distan entre sí los dos números supuestos: hay, pues, la misma relación entre la diferencia de los errores y la de los números supuestos, que entre la que ha producido uno de los números, y la diferencia que hay de este mismo número al verdadero.

EJEMPLO.—Queriendo recompensar un capitán a algunos de sus soldados que se habían distinguido en una acción, les destinó cierto número de pesos; de modo que en la repartición, cuando cada uno tomaba 8, sobraban 45, y cuando tomaban cada uno 11, faltaban 27; preguntase cuál era el número de los soldados y qué suma les repartió el capitán.

Primera suposición, 14 soldados.

$$\begin{array}{l} 8 \times 14 = 112; \quad 112 + 45 = 157 \\ 11 \times 14 = 154; \quad 154 - 27 = 127 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 8 \times 14 = 112; \\ 11 \times 14 = 154; \end{array}} \right\} \text{Error 30.}$$

Segunda suposición, 18 soldados.

$$\begin{array}{l} 8 \times 18 = 144; \quad 144 + 45 = 189 \\ 11 \times 18 = 198; \quad 198 - 27 = 171 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 8 \times 18 = 144; \\ 11 \times 18 = 198; \end{array}} \right\} \text{Error 18.}$$

Diferencia de los errores: $30 - 18 = 12$.

Diferencia de las suposiciones: $18 - 14 = 4$.

$$\text{Proporción: } \frac{4}{12} = \frac{x}{30}; \quad x = \frac{4 \times 30}{12} = 10.$$

Debe añadirse 10 a la 1ª suposición, lo que da $14 + 10 = 24$ soldados.

Comprobación.

$$\begin{array}{l} 8 \times 24 = 192; \quad 192 + 45 = \$ 237 \text{ repartidos} \\ 11 \times 24 = 264; \quad 264 - 27 = \$ 237 \text{ —} \end{array}$$

PROBLEMAS

1000. Un negociante que tiene vino a \$ 100 y a \$ 120 el hectolitro, quiere hacer una mezcla de 30 hl. que pueda vender \$ 105 el hl. ¿Qué cantidad debe tomar de cada clase?

1001. ¿Qué cantidad debe tomarse de 2 ligas de 0,920 y 0,750 de ley para obtener otra de 500 g. y de 0,840 de ley?

1002. Ignacio quiere pagar una deuda de 147 ptas. con 39 monedas, de 5 y de 2 ptas. ¿Cuántas monedas de cada clase tendrá que dar?

1003. Habiendo perdido un jugador la mitad de su dinero, volvió al juego, y perdió $\frac{1}{2}$ de lo que le quedaba; repitió lo mismo por tercera y cuarta vez, hasta que no le quedaron más que \$ 6; ¿cuánto dinero tenía al principiar el juego?

1004. Tres personas tienen juntas 150 años: la 3ª tiene el duplo de la edad de la 2ª, y la 2ª tiene el triple de la 1ª; ¿cuál es la edad de cada una?

1005. Dos números cuya suma es 70 se hallan en cierta relación, la cual resulta inversa si se añade 14 al primero y si se quita 14 al segundo; ¿cuáles son estos números?

1006. La relación de la edad de un padre con la de su hijo es de 9 a 5; ¿qué edad tienen ambos, si el padre cuenta 28 años más que su hijo?

1007. Un holgazán pasó su vida del modo siguiente, desde los 18 años: los $\frac{3}{8}$ de ella, durmiendo; $\frac{1}{16}$ comiendo y bebiendo; $\frac{1}{4}$ paseándose; los $\frac{3}{16}$ jugando; $\frac{1}{16}$ en su silla poltrona, y el resto, que son 2 años, trabajó; ¿qué edad tuvo al morir?

1008. Feliciano se conviene con un peón en darle 12 cents. por cada día que trabaje, con tal que él le dé 15 por cada día que no trabaje, a causa del perjuicio que le ocasiona; sucede que al cabo de 63 días no le queda nada por recibir al peón, pero tampoco tiene nada que dar a su patrón; se pregunta cuántos días ha trabajado.

1009. Un niño que tenía cierto número de manzanas las reparte del modo siguiente: da a uno de sus discípulos la $\frac{1}{4}$ parte del número total, más una manzana y $\frac{1}{2}$; a otro los $\frac{2}{7}$ del número total, más $\frac{6}{7}$ de manzana; por último, a otro la $\frac{1}{8}$ parte del número total, más $\frac{3}{4}$ de manzana, y le quedan 3 para él; ¿cuántas manzanas tenía el niño, y cuántas dio a cada uno de sus discípulos?

1010. Un maestro propone 9 problemas a su alumno, y le promete 6 buenas notas por cada problema bien resuelto pero debiendo devolverle 3 el alumno por cada problema errado; resulta por fin que el maestro y el alumno no se deben nada; ¿cuántos fueron los problemas bien resueltos?

1011. Luis dice a Antonio: "Dame 5 de tus chinas, y tendremos ambos el mismo número"; Antonio le responde: "Dame tú 10 de las tuyas, y tendré el duplo de las que te quedan;" ¿cuántas chinas tiene cada uno?

1012. Preguntaron a un individuo qué suma tenía en el bolsillo, y contestó: "Si a la suma que tengo añadís su mitad, cuarto y quinto, resultarán \$ 78". ¿Qué suma tenía?

1013. Una liebre perseguida por un perro lleva ya adelantados 90 saltos, y da 5 saltos mientras el perro da 4; y como 7 saltos de la liebre igualan a 5 del perro, ¿cuántos tendrá que dar éste para alcanzarla?

1014. Un padre de familia reparte la suma de \$ 3 900 entre sus 3 hijos: el primero recibe 3 veces más que el segundo, y éste la mitad de lo que corresponde al tercero. Dígase lo que recibe cada uno.

1015. La suma de dos números es 47, su cociente 5, y el residuo de su división también 5; ¿cuáles son estos números?

1016. Una familia constaba de varios niños y niñas; alguien les preguntó cuántos eran, y la niña mayor respondió que tenía tantas hermanas como hermanos; pero el niño mayor dijo que tenía dos veces más hermanas que hermanos. ¿Cuántos niños y niñas había?

1017. Tres toneles llenos de aguardiente, contienen: el primero, 40 litros más que el segundo; el tercero, tanto como los otros dos juntos. Dígase la capacidad de cada uno, sabiendo que los tres juntos contienen 440 litros.

PARTE COMERCIAL (1)

CAPITULO I EFECTOS DE COMERCIO

518. Definición.—Llámanse *efectos* o *documentos de comercio* los valores transmisibles que sirven para el arreglo de las operaciones a plazo.

Fuera del caso de la venta al por menor, raras veces se verifica en metálico el pago de las mercaderías compradas.

Cuando el comprador no quiere o no puede librarse inmediatamente, suscribe al vendedor un *pagaré a la orden*, o le autoriza a que gire contra él una *letra de cambio*.

Estos efectos son *transmisibles por endoso*, y pagaderos en metálico a una fecha llamada *fecha del vencimiento*.

El plazo suele estar comprendido entre uno y seis meses, a contar desde el día del giro.

Los efectos de comercio son garantizados por el crédito del comerciante o del banquero que los ha suscrito o aceptado. Hasta el día del vencimiento, *puedese hacer circular dichos efectos*, pudiendo los portadores entregarlos en cambio de numerario o de mercaderías, en una palabra, *negociarlos*.

Los documentos de giro llevan un *timbre* que corresponde a la cuantía de la cantidad girada

519. Ventajas de los efectos de comercio.—Las principales ventajas son las siguientes:

1º Permiten al deudor demorar el pago de sus obligaciones, sin privar al acreedor de la suma que le es debida;

2º Evitan los gastos y riesgos del transporte de metálico;

(1) Para más detalles, véase nuestra obra: *Contabilidad Comercial*.

3º Disminuyen la circulación de numerario, pues con los efectos se saldan las deudas lo mismo que con el dinero.

520. Principales efectos de comercio.—Los principales efectos de comercio son: la *letra de cambio*, el *pagaré a la orden* y el *cheque*.

Letra de cambio

521. Definición.—La *letra de cambio* es un efecto transmisible por el cual una persona manda a otra pague a la orden de sí misma o de un tercero, una cantidad determinada, en un tiempo también determinado.

La letra de cambio se llama también *remesa*, *trata*.

El que crea el documento y ordena que se pague se llama *girador*; el a quien va dirigida la letra es el *girado*; y el *tenedor* es la persona a cuyo orden debe hacerse el pago.

522. Forma de la letra de cambio.—La letra de cambio, para que surta efecto en juicio, ha de contener:

- 1º La designación del lugar y fecha del giro;
- 2º El vencimiento;
- 3º El nombre del tenedor;
- 4º La cantidad en letras y números que se manda pagar, expresada en moneda efectiva;
- 5º La expresión del valor recibido;
- 6º El nombre girado y su domicilio;
- 7º La firma del girador.

523. Endoso.—El *endoso* es la transmisión de la propiedad de una letra a favor de otro o a su orden. El endoso se extiende en el dorso de la letra en la forma siguiente:

Páguese a la orden de Librería Voluntad, valor recibido.

Caracas, 10 de Febrero de 1945
Emilio Ramos.

Modelo de una Letra de cambio.

Nº 512 Barranquilla, 12 de Mayo de 1910 Por \$ 1600

A Quince días vista... se servirá
p. pagar por esta primera de cambio a la orden
del Sr. D. José Fernández la cantidad de

~~Abil recibidos p. p. p.~~
valor recibido en efectivo que sentará V. en
cuenta mía según aviso de S. S. S.

A D. Juan González
Cartagena, 100 Bolívar. Pablo Zelaya

PABLO ZELAYA

ENDOSOS / Páguese a la orden de
D. Rodrigo Masidival,
valor recibido en mercaderías
Medellín, 20 de Mayo de 1910.
José Fernández

Páguese a la orden de
D. Ignacio Salazar,
valor en cuenta
Calamar, 24 de Mayo de 1910.
Rodrigo Masidival.

Recibi.
Cartagena, 27 de Mayo de 1910.
Ignacio Salazar

Modelo de un Pagaré.

Nº 12

Por Plas 400

Pagaré por todo el día diez y ocho de julio
 próximo a D. Enrique Arboleda o a su orden
 la cantidad de cuatrocientos pesetas
 valor recibido de dicho señor en mercaderías
 que tengo a mi entera satisfacción.

Bilbao, 17 de Mayo de 1910
 Santiago Dupont
 25, Plaza Elíptica.

SANTIAGO DUPONT

ENDOSOS

Pague a la orden de
 D. Mariano Zepeda
 valor en cuenta
 San Sebastián, 15 Santiago.
 Enrique Arboleda.

Recibi
 Bilbao 18 de Julio de 1910.
 Mariano Zepeda

524. Vencimiento.—El vencimiento de una letra de cambio puede fijarse por uno de estos términos:

- 1º *A la vista*; en cuyo caso debe pagarse en el acto de su presentación.
- 2º *A uno o más días vista*, el día en que se cumplan los señalados contándolos desde el día siguiente al de la aceptación.
- 3º *A día fijo o determinado*, es el mismo día.

Vale o pagaré a la orden

525. Definición.—El *vale o pagaré a la orden* es un documento por el cual un deudor se compromete a pagar una cantidad a la orden del acreedor, en una fecha determinada.

526. Forma del pagaré.—El pagaré contiene:

- 1º El nombre específico de *pagaré*;
- 2º La época del pago;
- 3º El nombre de la persona a cuya orden se habrá de hacer el pago;
- 4º La cantidad en letra;
- 5º El origen y especie del valor que represente;
- 6º La fecha de la expedición;
- 7º La firma y la dirección del que contrae la obligación de pagar.

Los vales que hayan de pagarse en distinto lugar del de la residencia del pagador, indicarán un domicilio para el pago.

El *endoso* y el *vencimiento*, como para la letra de cambio.

Cheque

527. Definición.—Llámase *cheque* un documento por el cual el librador manda al librado pague al portador parte o todos los fondos que tiene deposita-

Modelo de un Cheque a la orden.

Nº 84—Barcelona, doce de Julio de 1910

Pagos 2.000

Credit Lyonnais

PARIS - BARCELONA

Páguese a la orden de D. José Gámez

la suma de Dos mil pesetas.

J. M. Valeriano

Nº F. 8756



dos y disponibles en poder del librado, que suele ser un banquero.

Las sociedades de crédito, así como los banqueros, suelen remitir a toda persona que hace un depósito de fondos, una libreta de cheques.

Cuando esta persona quiere sacar fondos o efectuar un pago, escribe en uno de estos cheques preparados al efecto:

- 1º El nombre del *tenedor*, o sea de la persona a quien se debe pagar;
- 2º La suma en letras y números.
- 3º La fecha de su expedición.
- 4º La firma del librador.

El cheque puede ser al *portador*, esto es, pagadero a cualquier persona que lo presentare. Si es *a la orden*, puede transmitirse por endoso.

El cheque siempre es *a la vista*. El portador puede presentarlo al cobro inmediatamente después de girado.

CAPITULO II

METODOS ABREVIADOS PARA EL CALCULO DEL INTERES Y DEL DESCUENTO

528. Cálculo del tiempo.—En las cuestiones comerciales y de banco se considera el año como de 360 días, y los meses de 30; sin embargo para el tiempo de colocación, que no excede nunca de 3 o 6 meses, se cuenta el número exacto de días.

Para encontrar fácilmente el número de días comprendidos entre dos fechas, se usa de la tabla de los días:

TABLA

Que indica el número de días que hay desde cualquier fecha de un mes, hasta la misma fecha de cualquier otro del mismo año.

Desde un día cualquiera del mes de	HASTA EL MISMO DIA DEL MES DE											
	Enero.	Febrero.	Marzo.	Abril.	Mayo.	Junio.	Julio.	Agosto.	Septiembre.	Octubre	Noviembre.	Diciembre.
Enero	365	31	59	90	120	151	181	212	243	273	304	334
Febrero	334	365	28	59	89	120	150	181	212	242	273	303
Marzo	306	337	365	31	61	92	122	153	184	214	245	275
Abril	275	306	334	365	30	61	91	122	153	183	214	244
Mayo	245	276	304	335	365	31	61	92	123	153	184	214
Junio	214	245	273	304	334	365	30	61	92	122	153	183
Julio	184	215	243	274	304	335	365	31	62	92	123	153
Agosto	153	184	212	243	273	304	334	365	31	61	92	122
Septiembre	122	153	181	212	242	273	303	334	365	30	61	91
Octubre	92	123	151	182	212	243	273	304	335	365	31	61
Noviembre	61	92	120	151	181	212	242	273	304	334	365	30
Diciembre	31	62	90	121	151	182	212	243	274	304	335	365

Para encontrar, por ejemplo, cuántos días hay desde el 15 de Marzo hasta el 15 de Octubre, busco el mes de Marzo en la hilera vertical de la izquierda, y el de Octubre en la fila horizontal de encima, y en el punto de unión de ambas líneas, leo 214, que es el número buscado.

Del propio modo, para buscar cuántos días hay desde el 10 de Junio hasta el 16 de Noviembre, debo averiguar primero la diferencia que hay entre el 10 de Junio y el 10 de Noviembre, como ya queda indicado, y encuentro 153 días, a los que debo añadir los 6 que faltan del 10 al 16 de Noviembre; luego, la diferencia exacta es de 159 días.

En los años bisiestos debe añadirse 1 día más al mes de Febrero.

Cuando el tiempo pedido pasa de 1 año, se deberán añadir 365 días más por cada año de aumento.

Método de los divisores fijos

529. En la fórmula $I = \frac{C T t}{100}$ (453) substituyamos

el valor de t en días, o sea $\frac{n}{360}$, representando n el tiempo de colocación.

$$I = \frac{C T n}{36\ 000} \quad \text{o} \quad I = \frac{C r n}{360} \quad (461)$$

Cuando el tanto es submúltiplo de 360, como, por ejemplo, 12, 10, 9, 6, etc. se simplifica la fórmula, y viene a ser:

$$I = \frac{C n}{3\ 000} \dots \frac{C n}{3\ 600} \dots \frac{C n}{4\ 000} \dots \frac{C n}{4\ 500} \dots \frac{C n}{6\ 000} \dots \frac{C n}{7\ 200} \dots$$

Los números 3 000, 3 600, 4 000, etc., se llaman *divisores fijos*.

El numerador constante $C n$, producto del capital por el número de días, se llama *número*.

Si se designa el número $C n$ por N , y el divisor fijo por D , tendremos la fórmula general:

$$I = \frac{N}{D}$$

530. REGLA.—El interés producido por un capital durante cierto número de días se encuentra dividiendo el número por el divisor fijo correspondiente al tanto dado.

531. Divisores fijos.—Para encontrar el divisor fijo, se parte 36 000 por el tanto del interés.

Así, al 2% el divisor fijo es	18 000
— 3	12 000
— 4	9 000
— 4½	8 000
— 5	7 200
— 6	6 000
— 8	4 500
— 9	4 000
— 10	3 600
— 12	3 000

Aplicación.—Búsqese el interés de \$ 5 400 durante 150 días al 12%, 10%, 5%, 4½%.

$$C n = 5\ 400 \times 150 = 810\ 000.$$

El interés al 12%	será	$\frac{810\ 000}{3\ 000} = \$ 270$
— 10%	—	$\frac{810\ 000}{3\ 600} = 225$
— 6%	—	$\frac{810\ 000}{6\ 000} = 135$
— 5%	—	$\frac{810\ 000}{7\ 200} = 112,50$
— 4½%	—	$\frac{810\ 000}{8\ 000} = 101,25$

532. Cálculo simultáneo de varios intereses.

—El método de divisores fijos es ventajoso sobre todo cuando se tiene que calcular el interés de varias sumas impuestas por tiempos diferentes y al mismo tanto, como ocurre en las cuentas corrientes y en las facturas de descuento, porque entonces basta *dividir la suma de los números por el divisor fijo correspondiente al tanto*.

Ejemplo.—Cálculése el interés total al 3% de las sumas siguientes:

\$ 2.300	impuestos del	4 de Febrero	al 16 de Mayo.
\$ 750,60	—	2 de Marzo	al 6 de Octubre.
\$ 5.500	—	10 de Mayo	al 4 de Julio.
\$ 1.425,40	—	15 de Junio	al 10 de Nobre.

Solución

Capitales	Días	Números
2 300	101	232 300
750	215	161 250
5 500	55	302 500
1 452	148	215 296

Total de los números: 911 346

El interés total será:

$$I = \frac{911\ 346}{12\ 000} = \$ 75,94.$$

533. Notas.—I. En el cálculo de los números no se tiene en cuenta la parte decimal de las sumas.

Para simplificar el cálculo del interés, los banqueros suprimen las dos últimas cifras de las sumas antes de multiplicarlas por el número de días, pero suprimen también las dos últimas cifras del divisor. Así haremos a continuación.

II.—Cuando el tanto no da divisor fijo exacto, por ejemplo para el $3\frac{1}{2}\%$, se calcula primero al 3% , y se añade al resultado $\frac{1}{6}$, porque $\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ de 3; para el $4\frac{3}{4}\%$ se calcula al 5% el interés, y de él se resta $\frac{1}{20}$, etc.

III.—Si se cuenta el año de 365 días, el método de los números para n días es también aplicable a los tantos 10% y 5% que dividen exactamente a 365; pero el divisor fijo es entonces 3 650 para el primero, y 7 300 para el segundo.

Método de las partes alicuotas

Parte alicuota, submúltiplo y divisor son expresiones equivalentes.

534. 1º Partes alicuotas del número de días necesarios para producir un interés igual a $\frac{1}{100}$ del capital.

En la fórmula $I = \frac{Cn}{3\ 000} \dots \frac{Cn}{3\ 600} \dots \frac{Cn}{6\ 000}$ (529) podemos reemplazar los divisores fijos por

$$100 \times 30, \quad 100 \times 36, \quad 100 \times 60, \text{ etc.}$$

en que las cantidades 30, 36, 60, etc. son respectivamente iguales al cociente de 360 por el tanto, o sea 360

—, y tendremos:

$$I = \frac{Cn}{100 \times 30} \dots \frac{Cn}{100 \times 36} \dots \frac{Cn}{100 \times 60} \dots$$

Si hacemos n igual a $\frac{360}{T}$, tendremos $I = \frac{C}{100}$;

entonces, según el tanto, un capital cualquiera producirá un interés igual a la 100^{a} parte de este capital, en 30, 36, etc. días. De donde se deduce la regla siguiente.

535. REGLA.—Para encontrar el interés de una suma durante n días al 12% , 10% , 9% , 8% , 6% , etc. se deben tomar las partes alicuotas de 30, 36, 40, 45, 60, etc. días que son necesarias para formar los días dados n ; las partes alicuotas correspondientes al centésimo del capital darán el interés buscado.

Ejemplo.—Búsquese el interés:

- 1º De \$ 2 650 al 12% en 166 días;
- 2º — — 10% en 188 —
- 3º — — 9% en 224 —

1º *Intereses de \$ 2 650, al 12% en 166 días:*

En 30 días,	\$ 2 650	producen.....	\$ 26 50
En 120 días	—	— 4 veces	26,50 o 106,00
En 40 — —	—	— 1	de 106 o 35,33
En 6 — —	—	— 3	de 26,50 o 5,30
		— 1	
		— 5	

Luego, en 166 — \$ 2 650

2º *Intereses de \$ 2 650, al 10% en 188 días:*

En 36 días,	\$ 2 650	producen.....	\$ 26,50
En 108 días	—	— 3 veces	26,50 o 79,50
En 72 — —	—	— 2 veces	26,50 o 53,00
En 8 — —	—	— 1	de 53 o 5,68
		— 9	
Luego, en 188 —	\$ 2 650	— \$ 138,38

3º *Intereses de \$ 2 650, al 9% en 224 días:*

En 30 días,	\$ 2 650	producen.....	\$ 26 50
En 200 días	—	— 5 veces	26,50 o 132,50
En 20 — —	—	— 1	de 132,50 o 13,25
En 4 — —	—	— 10	de 13,25 o 2,65
		— 1	
		— 5	

Luego, en 224 — \$ 2 650 — \$ 148,40

536. 2º Partes alicuotas del capital que produce \$ 1 de interés por día.

$$\text{Si en la fórmula } I = \frac{Cn}{3\ 000} \dots \frac{Cn}{3\ 600} \dots \frac{Cn}{6\ 000} \dots$$

7 200

— (529) aconteciere que C sea igual al divisor C n

fijo correspondiente al tanto, tendremos que $I = n$; entonces el capital 3 000, 3 600, 6 000, etc., produce \$ 1 de interés por día. De donde se deduce la siguiente regla.

537. REGLA.—Cuando el capital cuyo interés se busca está en relación simple con el divisor fijo, se tomarán de este último las partes alicuotas que sean necesarias para formar el capital cuyo interés se pide, y las correspondientes partes alicuotas de los días, consideradas como bolívars darán el interés pedido.

Ejemplos Búsquese el interés:

- 1º De \$ 1 500 al 12% en 118 días;
- 2º — \$ 2 400 al 9% en 150 —
- 3º — \$ 4 000 al 6% en 95 —

1º *Intereses de \$ 1 500 al 12% en 118 días:*

\$ 3 000 en 118 días dan \$ 118

\$ 1 500 dan la $\frac{1}{2}$ de 118, o \$ 59

2º *Intereses de \$ 2 400 al 9% en 150 días:*

\$ 4 000 en 150 días dan \$ 150

\$ 2 000 dan la $\frac{1}{2}$ de 150, o 75

\$ 400 dan la $\frac{1}{5}$ parte de 75, o 15

Luego, \$ 2 400 dan \$ 90

3º Intereses de \$ 4 000 al 6% en 95 días:

\$ 6 000 en 95 días dan \$ 95

\$ 3 000 dan la $\frac{1}{2}$ de 95, o 47,50

}
\$ 1 000 dan la $\frac{1}{6}$ parte de 95, o .. \$ 15,83

Luego, \$ 4 000 dan \$ 63,33

538. Nota.—Cuando el tanto no divide exactamente a 360, los métodos de los números y de las partes alícuotas no son directamente aplicables. Se puede entonces buscar el interés a uno de los tantos submúltiplos de 360, y deducir de él el interés al tanto pedido.

Se encontrará, por ejemplo, el interés al $5\frac{1}{2}\%$, tomando el interés al 5%, y añadiéndole su décima parte; o calculándolo al 6%, y restando de éste su $\frac{1}{12}$.

Método del 6%

539. El cálculo del interés al 6% se hace con mucha rapidez; pues, por el método de los divisores, el divisor 6 000 es simple, y las partes alícuotas de 6 000 se encuentran muy fácilmente, ya que:

$$\frac{6\ 000}{2} = 3\ 000, \quad \frac{6\ 000}{3} = 2\ 000, \quad \frac{6\ 000}{4} = 1\ 500,$$

$$\frac{6\ 000}{5} = 1\ 200, \quad \frac{6\ 000}{6} = 1\ 000, \quad \frac{6\ 000}{10} = 600, \quad \text{etc.}$$

Conociendo el interés al 6%, se encontrará el interés:

al 1%, tomado el $\frac{1}{6}$ de aquel interés.

» 2%, » $\frac{1}{3}$ »

» 3%, » $\frac{1}{2}$ »

al 4%, restando $\frac{1}{3}$ de aquel interés.

» $4\frac{1}{2}\%$, » $\frac{1}{4}$ »

» 5%, » $\frac{1}{6}$ »

» 7%, añadiendo $\frac{1}{6}$ »

etc.

Ejemplo.—Hállese el interés de \$ 3 400 por 116 días, al $4\frac{1}{2}\%$, al 5% al 3%.

Por medio de uno de los métodos precedentes, se puede calcular el interés al 6%; este interés es igual a \$ 66,73.

$$\text{El interés al } 4\frac{1}{2}\% \text{ será } 66,73 - \frac{66,73}{4} = \$ 49,30$$

$$\text{El interés al } 5\% \text{ será } 66,73 - \frac{66,73}{6} = \$ 54,77.$$

$$\text{El interés al } 3\% \text{ será } \frac{66,73}{2} = \$ 32,86.$$

540. Nota.—El método de las partes alícuotas del capital se usa poco, por ser difícil la división del capital en partes alícuotas del divisor. El método por las partes alícuotas del tiempo es muy generalizado.

Pero los calculadores en los bancos suelen combinar el método de las partes alícuotas del tiempo con el de las partes alícuotas del tanto, calculando el interés al 6% por el método de las partes alícuotas del tiempo, y pasando al interés real por el método de las partes alícuotas del tanto.

Ejemplo.—Calcular el interés de \$ 4 685 al $4\frac{1}{2}\%$, por 75 días.

Interés al 6% por 60 días		\$ 46,85
" " 15 "	($\frac{1}{4}$ de 46,85)	11,71
	<hr/>	58,56
Interés al 4 $\frac{1}{2}$ %: al 3%	($\frac{1}{2}$ de 58,56)	\$ 29,28
" " 1 $\frac{1}{2}$ %	($\frac{1}{2}$ de 29,28)	14,64
Interés de \$ 4 685:		\$ 43,92

Factura de descuento

541. Definición.—Llámase *factura de descuento* la nota detallada que acompaña los documentos de crédito que se descuentan en un Banco.

La factura que va a continuación manifiesta que los días se cuentan de la fecha de la negociación a la del vencimiento, y que el descuento se ha calculado por los divisores fijos, del mismo modo que el interés. Al descuento se han añadido el cambio y la comisión. Por lo tanto, en el presente caso, el banquero D. V. García no remitirá al portador sino 8 839,32 ptas.

Factura de los efectos presentados por **D. Pablo Dubón** al banquero **D. Víctor García**, para su negociación y cobro, al descuento del 6% en el día de la fecha, 17 de Mayo de 1944.

Clase de efectos	Sumas	Vencimientos	Días	Números
Letra	5 000 "	2 junio.	16	800
—	800 "	17 —	31	248
Pagaré	2 550 50	25 —	39	975
Letra	560 "	5 julio.	49	245
	8 910 50			2 268
			2 268	
		37,80 Descuento al 6%:	$\frac{2 268}{60} = 37,80$	
	71 18	11,11 Cambio 1/8%		
		22,27 Comisión 1/4%		

8 839,32 ptas. Líquido a pagar.

Valencia 17 de mayo de 1911.

NOTA.—Hoy día, por la concurrencia, son pocos los Bancos que cobran un derecho de comisión.

Descuento de facturas

542. Ya hemos dicho (476) que el descuento de facturas se calcula a un tanto % convenido. Pero puede suceder que un parroquiano, por causa de sus muchos negocios con una casa de comercio tenga, a más del descuento ordinario, otro descuento o sobrerrebaja. No se debe confundir esta sobrerrebaja con el primer descuento.

En efecto, éste se calcula sobre el importe de la factura, y aquélla, sobre el mismo importe, pero descontado. Es lo que vamos a poner de manifiesto en los ejemplos siguientes:

EJEMPLO.—¿Cuál ha de ser la valoración para que resulte un beneficio neto de 10%?

$$10 \times 100 = 1000; \frac{1000}{100 - 10} = 11 \frac{1}{9}$$

Luego, hay que valorar de 11 1/9 para obtener un 10% de beneficio neto.

2º Para calcular el beneficio %, conociendo los precios de compra y de venta, hay que restar el precio de compra del precio de venta, multiplicar la diferencia por 100, y dividir el resultado por el precio de venta.

EJEMPLO.—¿Cuál será el beneficio % realizado sobre mercancías compradas en \$ 100 y vendidas en \$ 120?

$$(120 - 100) 100 = 2000; \frac{2000}{120} = 16 \frac{2}{3}\%$$

El beneficio % será de 16 2/3.

3º Para encontrar el precio de venta, conociendo el precio de compra y el tanto % del beneficio neto que se quiere realizar, hay que multiplicar por 100 el precio de compra y dividir el producto por 100 menos el tanto del beneficio.

EJEMPLO.—Hállese el precio de venta de una mercancía comprada en \$ 60, si se quiere realizar un 20% de beneficio.

$$\frac{60 \times 100}{100 - 20} = 75.$$

El precio de venta será de 75.

4º Para encontrar cualquier beneficio neto, se multiplica por 100 la valoración correspondiente a este beneficio, y se divide el producto por la valoración más 100.

EJEMPLO.—Hállese el beneficio neto que corresponde a la valoración de 15%.

$$\frac{15 \times 100}{15 + 100} = 13 \frac{1}{23}\%$$

El beneficio neto será de $13 \frac{1}{23}\%$.

(Para más detalles, véase, *Guía del vendedor*, Hachette.)

CAPITULO III

CUENTAS CORRIENTES CON INTERES

545. **Cuentas corrientes.**—*Cuenta corriente es el estado detallado de las deudas recíprocas de dos personas.*

Las cuentas corrientes son *sin interés* o *con interés*.

Para saldar una cuenta *sin interés*, basta hacer la diferencia de las sumas del débito y del crédito.

546. **Cuentas corrientes con interés.**—Generalmente las cuentas corrientes son *con interés*. Cuando un comerciante está en relación de negocios con un banquero, éste le abre una *cuenta corriente de depósito* y le entrega una libreta de cheques.

En estas cuentas, se calculan los intereses devengados por todas las sumas del débito y del crédito.

Cada una de las cuentas personales ocupa dos páginas del libro de las cuentas corrientes: la izquierda llamada *Debe*, y la derecha, *Haber*. En el *Debe* se anotan todas las cantidades entregadas; en el *Haber* se anotan las cantidades recibidas.

Para hallar la verdadera situación de la cuenta se hace el *balance de las sumas, con sus intereses*, del *Haber* y del *Debe*.

Se suelen calcular los intereses por los *divisores fijos*. Este es el procedimiento que empleamos en las cuentas corrientes adjuntas.

CUENTA CORRIENTE

MÉTODO HAMBURGÜÉS

D. José Cordero

Debe s/ cuenta corriente al 6 % anual,
cerrada el 31 de Agosto.

Haber

VENCIMIENTOS	DÍAS	DEBE O HABER	SUMAS		DÍAS	NÚMEROS	
						DEBE	HABER
Febrero	5	H	600	»	4		2 400
—	9	D	500	»			
—	9	H	100	»	28		2 800
Marzo	9	H	700	»			
—	9	H	800	»	40		8 000
—	49	D	1 200	»			
—	19	D	400	»	36	14 400	
Abril	24	D	800	»			
—	24	D	1 200	»	20	24 000	
Mayo	14	H	2 000	»			
—	14	H	800	»	21		16 800
Junio	4	H	1 600	»			
—	4	H	2 400	»	43		31 200
—	17	D	1 400	»			
		H	1 000	»	75		75 000
		Interés H	46	30		38 400	136 200
		Saldo II	1 016	30	207		
Septiembre	1	H	1 016	30			

Recibido de Cordero \$ 700, valor 9 de Marzo.

El 9 de Marzo el saldo de 100 valdrá \$ 100, más los intereses del 9 de Febrero al 9 de Marzo, esto es, de 28 días. El número 2 800 se escribe en el Haber.

Y así sucesivamente.

El último saldo manifiesta que debo a Cordero \$ 1 000, valor 17 de Junio.

Pero como la fecha del cierre es el 31 de Agosto, a más de \$ 1 000, tendré que pagar los intereses del 17 de Junio al 31 de Agosto, o sea de 75 días. Asiento en la columna del Haber el número $1\,000 \times 75$ o 75 000.

Hago el balance de los números:

Numeros del Haber 136 200
— — Debe 38 400

Saldo acreedor 97 800

Divido 97 800 por 6 000, divisor fijo que corresponde al 6%, y resultan \$ 16,30 de interés acreedor.

Luego el 31 de Agosto debo a Cordero \$ 1 016,30.

Sumando los días encuentro 207 que representa el número cabal de días entre el 5 de Febrero y el 31 de Agosto, lo que prueba que no ha habido equivocación al contar los días que median entre los varios vencimientos.

Nota.—El método hamburgüés se usa sobre todo cuando el interés no es recíproco, esto es, cuando el tanto del *Debe* no es el mismo que el del *Haber*.

En este caso, después de haber formalizado la cuenta como lo acabamos de decir, se calculan separadamente los intereses del *Haber* y del *Debe* y se hace la diferencia de resultados.

En la presente cuenta, supongamos que el interés del *Debe* sea al 6% y el del *Haber* al 5%. Tendremos:

Interés del Haber $\frac{136\,200}{7\,200} = \$ 18,91$
7 200
38 400
— — Debe $\frac{38\,400}{6\,000} = \$ 6,40$
6 000
Diferencia acreedora \$ 12,51

Saldo acreedor: $1\,000 + 12,51 = \$ 1\,012,51$

Este método es el único que da un resultado exacto cuando el interés no es recíproco.

CAPITULO IV CAMBIO

549. Definición.—*Cambio*, en su acepción más general, es el trueque o permuta de una cosa por otra, o también la permuta de monedas de un país por las de otro; pero en término de banco, *cambio* es una operación que tiene por objeto la cesión de fondos o permuta de créditos en monedas de un país por monedas de otros países, o la liquidación de las deudas de comerciantes de distintos países.

Para liquidar una deuda en lugar distinto al en que el deudor reside, ya porque el transporte del numerario, sea difícil o por ser caro, ya porque éste pudiera faltar, se sustituye por letras de cambio, cheques, mandatos a la orden, etc., con lo cual se evita el transporte de las monedas.

Hay dos clases de cambio: el cambio *interno o nacional*, y el cambio *externo, extranjero o internacional*.

550. Cambio nacional.—Llámase cambio *nacional* el que se hace entre plazas de una misma nación; como entre Madrid y Barcelona, entre Bogotá y Medellín.

551. Cotización de los cambios.—Los tipos de cotizaciones del cambio nacional se indican con las expresiones de *cambio a la par*, *cambio con premio* y *cambio con daño*.

Se dice que el cambio entre dos plazas está *a la par* cuando se hace sin premio, porque entonces el tomador de la letra entrega al tenedor un valor equivalente al que está expresado en la misma.

Como, por ejemplo, entregando \$ 100 de moneda en Madrid, recibimos una *letra* de igual valor pagadera en Barcelona.

El cambio está *a beneficio* cuando un efecto sobre una plaza determinada nos cuesta más en metálico en la plaza de nuestra residencia.

El cambio está *a daño* cuando el mismo efecto nos cuesta menos en metálico en la plaza de nuestra residencia.

Las expresiones *a beneficio* y *a daño* afectan siempre el papel, esto es, se refieren al tenedor o vendedor; por lo tanto, el comprador con beneficio pierde en realidad, ya que da más dinero que el representado por el efecto; y el que compra con daño, gana.

El que compra *a la par* ni pierde ni gana, y esto suele acontecer con los efectos a corto plazo.

Precio corriente del cambio es el valor que se paga en una plaza por una letra o libranza, según la suma girada sobre otra plaza.

Según la abundancia o escasez del dinero o del papel, hay beneficio o daño en el cambio para las respectivas partes contratantes.

552. Cambio extranjero.—Cambio *exterior o extranjero* es el que se efectúa entre plazas de distintos países; como entre Panamá y Nueva York, entre México y Londres.

Cambio directo es el que se hace entre dos plazas que directamente tienen cambio abierto o convenido, sin intermedio de una tercera como el que tiene el Ecuador, con Londres, París, Burdeos, Hamburgo, Nueva York, San Francisco, Panamá, Valparaíso, etc.

Cambio indirecto es el que se hace entre dos plazas que no tienen directamente cambio abierto o conocido, por lo cual es indispensable valerse de otra tercera plaza, que tenga cambio abierto conocido con las dos primeras.

553. Principio del cambio extranjero.—Para demostrar este principio supongamos un *Inglés* com-

prador de vinos de Jerez; representamos el primero por I, y el vendedor de vinos españoles por E. Por otra parte, supongamos también que otro *Español* E' compre tejidos a otro *Inglés*, I'

Supuestas iguales las dos deudas, el comprador I pagará a su compatriota vendedor I', *por cuenta* del comprador de tejidos E'; el comprador de tejidos E' pagará a su compatriota vendedor E *por cuenta* del comprador de vinos I.

Así, se liquidan ambas deudas sin necesidad de transporte de metálico.

Este ejemplo da una idea completa de la operación de cambio, pues las complicaciones que pueden ocurrir, porque los créditos, no siendo iguales no salden las deudas, podrán afectar el papel, sin afectar este principio fundamental.

554. Cotización de las monedas extranjeras.

—El precio de los cambios extranjeros se determina en razón de dos términos, de los cuales el uno es siempre *fijo*, y el otro *variable*. El término fijo se llama *el cierto*, y el término variable se llama *el incierto*.

Cuando se dice que una plaza da el cierto a otra, entendemos que da una cantidad fija e invariable de moneda nacional por una cantidad variable de moneda extranjera, según el estado de la oferta y la demanda. La cantidad fija será *el cierto*, y la variable *el incierto*.

Por ejemplo, en el cambio de Ecuador con Londres, esta plaza da £ 1 por S 10, *más o menos*. La libra esterlina es el término *fijo*, es *el cierto*; y el sucre es el término *variable*, es *el incierto*, puesto que habrá que dar más o menos sucres, según esté la balanza de los cambios entre Londres y el Ecuador. *El fijo* es, pues, siempre conocido para el cambista; *el incierto* es el que se trata de determinar para las operaciones de cambio; por esto, en las cotizaciones se indica sólo este último.

La variación del precio del cambio sobre o bajo la *par* del valor intrínseco de las monedas de cambio, da por resultado el *alza* o *baja* del precio de cambio.

El *alza* del cambio con España, por ejemplo, significa aumento del beneficio al papel o disminución del daño; la *baja*, por el contrario, es disminución del beneficio o aumento del daño.

La cotización de las monedas extranjeras o de los valores que en el comercio las sustituyen, se hace en las Bolsas, publicándose cada día los cambios en los *Boletines* oficiales o particulares.

555. Arbitrajes.—Llámase *arbitraje* la operación que tiene por objeto determinar el medio más ventajoso de efectuar el pago de una deuda o el cobro de un crédito sobre plazas extranjeras.

Pueden ser los arbitrajes sobre mercaderías, valores mobiliarios y fondos públicos, monedas y metales preciosos, letras de cambio, etc.

El arbitraje es *simple* o *compuesto*.

ARBITRAJE SIMPLE.—El arbitraje es *simple* o *directo* cuando sólo tiene lugar entre dos plazas.

Ejemplo 1º—Martín de París debe 100 marcos a *Deutsch de* Berlín. Si París gira a la vista sobre Berlín a fr. 123 $\frac{1}{4}$, y Berlín sobre París a Rm. 80,05 8 días vista 3%, ¿cuál será la forma de pago más ventajosa para Martín?

Hagamos que las cotizaciones estén a la vista.

París cotiza a Berlín fr. 123,25.

Berlín cotiza a París:

$$\text{Rm. } 80,05 + \frac{80,05 \times 8 \times 3}{36\,000} = \text{Rm. } 80,104.$$

Si Martín paga con una remesa sobre Berlín, comprará un documento de Rm. 100 por fr. 123,25.

Si gira sobre Berlín, pagará:

$$\begin{array}{r} \text{fr. } x \\ \text{Rm. } 80,104 \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{Rm. } 100 \text{ vista.} \\ \text{fr. } 100 \\ 100 \times 100 \\ x = \frac{\quad}{80,104} = \text{fr. } 124,83. \end{array}$$

Por lo tanto, a Martín le conviene más comprar una remesa sobre Berlín.

Ejemplo 2º—*Fernández de Barcelona debe £ 100 a Brown de Londres. Si en Barcelona el papel sobre Londres está al cambio de 26,20 y en Londres el papel sobre Barcelona se cotiza al cambio de 46, dígase el medio más ventajoso de efectuar el pago.*

En Barcelona, una letra sobre Londres costará
 $100 \times 26,20 = 2\,620$ ptas.

Si Brown libra a cargo de Fernández al cambio de 46, esto es 46 peniques por 5 pesetas, la letra será de:

$$\frac{5 \times 24\,000}{46} = 2\,608,70 \text{ ptas.}$$

46

Luego, a Fernández le conviene más este medio.

ARBITRAJE COMPUESTO.—El arbitraje es *compuesto* o *indirecto* cuando el cambio entre dos plazas se efectúa por mediación de otra en que existe el mismo valor.

Ejemplo.—*Dupuis de París debe a Gómez de Buenos Aires 2478 pesos oro. Pregúntase si para satisfacer la deuda le es más ventajoso tomar en París una letra sobre Buenos Aires al cambio de fr. 4,95 por peso oro, o comprar en París una letra en libras esterlinas sobre Londres, para enviarla a esa plaza a fin de obtener, con su negociación, una letra sobre Buenos Aires: Londres cotiza sobre Buenos Aires al cambio de 4,80 pesos oro por libra esterlina, y París sobre Londres a fr. 25,10 por libra esterlina:*

1ª combinación:
 $4,95 \times 2\,478 = \text{fr. } 12\,266,10.$

2ª combinación

fr. x	£ 2 478
\$ 4,80	£ 1
£ 1	fr. 25,10

$$x = \frac{2\,478 \times 25,10}{4,8} = \text{fr. } 12\,957,87$$

Luego, la 1ª combinación es más ventajosa.

Problemas de Cambio.—Los problemas de cambio tienen por objeto determinar la suma que se abona por el interés de una letra que debe recibirse o pagarse en lugar distinto de aquél en que se gira. Cuando estos problemas están complicados, se los suele resolver por la regla conjunta.

La regla de cambio presenta tres casos principales:

1º Dada la suma que se entrega al librador de la letra, y conociendo el tanto %, determinar el valor de la letra en la plaza a donde se remite.

Este caso acontece cuando la remesa se hace por cuenta de la persona que debe recibirla; y entonces el valor de la letra será igual a la suma entregada más el cambio, si hay premio, o menos el cambio, si hay pérdida.

2º Determinar lo que debe entregarse al librador de la letra para que éste pague en otra plaza una suma determinada, conociendo el tanto %.

Este caso ocurre cuando se hace la remesa por cuenta del que la envía, pagando éste el cambio de su bolsillo para que la cantidad sea entregada íntegra; y entonces, la suma que debe entregarse es igual a la suma determinada menos el cambio, si hay premio, o más el cambio, si hay pérdida.

3º Conocido el valor nominal de la letra y la suma por ella pagada, buscar a qué tanto % se ha tomado la letra.

Este caso puede ocurrir con cualquiera de los dos anteriores.

Nota.—En los problemas nos referimos a las monedas del Ecuador; en los demás Estados en que se adopte este libro, los profesores dictarán problemas relativos a las leyes y usos del país.

Ejemplo 1º—*¿Cuántos suces importan 210 libras esterlinas al 36% de cambio?*

Como al 36% cada £ 20 cuestan S 136, y en £ 210 hay $10\frac{1}{2}$ veces £ 20, basta multiplicar 136 por $10\frac{1}{2}$:

$$\begin{array}{l} 136 \times 10 = 1\,360 \\ 136 \times \frac{1}{2} = 68 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} 136 \times 10 \\ 136 \times \frac{1}{2} \end{array}} \right\} = \text{S } 1\,428.$$

Comprobación: $x = \frac{136 \times 210}{20} = \text{S } 1\,428$

Ejemplo 2º—*¿Cuántos suces se pagarán por una letra de 2250 francos al 40% de cambio?*

En 2250 francos hay $4\frac{1}{2}$ veces 500 francos, y como los S 100 al 4% valen 140, multiplico mentalmente 140 por $4\frac{1}{2}$, así:

$$\begin{array}{l} 100 \times 4 = 400 \\ 40 \times 4 = 160 \\ 140 \times \frac{1}{2} = 70 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} 100 \times 4 \\ 40 \times 4 \\ 140 \times \frac{1}{2} \end{array}} \right\} = \text{S } 630.$$

$$\text{Comprobación: } x = \frac{140 \times 2\,250}{600} = \frac{14 \times 225}{5} = S\,630.$$

Ejemplo 3º—¿Cuántos sures importan 4 100 marcos al 36% de cambio?

En 4 100 marcos hay 10 1/4 veces 400 marcos, que equivalen a S 100, y como el cambio es al 36%, multiplico mentalmente $136 \times 10 \frac{1}{4}$, así:

$$\begin{array}{r} 136 \times 10 = 1\,360 \\ 136 \times \frac{1}{4} = 34 \\ \hline = S\,1\,394 \end{array}$$

$$\text{Comprobación: } x = \frac{136 \times 4\,100}{400} = \frac{136 \times 41}{4} = S\,1\,394$$

Ejemplo 4º—Luis debe remitir \$ 2 500 chilenos a Valparaíso; ¿cuánto importará la letra que compre en Guayaquil, al 35% de descuento?

Como aquí se trata de descuento, \$ 100 chilenos importan 100 — 35 = \$ 65.

Para pagar \$ 100 en Valparaíso, deben darse \$ 65 en Guayaquil, para pagar \$ 2 500 se darán: $\frac{65 \times 2\,500}{100}$ o sea \$ 1 625.

Cotización de los cambios tomados del "Bulletin des Changes de Paris", 30 de Enero de 1911.

CHANGES	Chèque versement papier court	Papier a trois mois	Escompte a l'étranger pour 0/0
Londres	25 28 1/2. à 25 31 1/2	2520 1/2 à 25 32 1/2	4 1/2
Allemagne	123 15/32. à 123 19 32	1233/4. à 124	5
Belgique	1/32 p. à 9 32	100. à 100 1/4.	4 1/2
Espagne	462. à 467.	4611/2. à 466 1/2.	4 3/4
Hollande	208 15/16. à 209 7/16.	20815/16 à 209 7/16	3 3/4
Italie	99 1/2. à 99 3/4.	991/2. à 99 3/4.	5 1/2
New-York	518 1/8. à 519 1/8.	517 1/2. à 520 1/2.	6
Portugal	515. à 525.	512. à 522.	6
St-Petersbourg	266 1/4. à 268 1/4.	266. à 268.	5
Suisse	99 29/32. à 100 1/32.	9931/32 à 100 3/32.	4
Vienne	105 1/8. à 105 3/8.	1051/4. à 105 1/2.	5

Cambio medio de las monedas extranjeras de París durante el año 1909.

Naclones	Monedas	Par en Francos	Su valor al tipo medio de 1909
FRANCOS			
Alemania	1 marco	1,2345	1,23
Austria	1 corona	1,05	1,04
Bélgica	1 franco	1	0,996
Italia	1 lira	1	0,87
España	1 peseta	1	0,91
Inglaterra	1 libra	25,22	25,12
Holanda	1 florin (oro)	2,083	2,08
Portugal	1 mil reis (oro)	5,60	5,54
Rusia	1 rublo (oro)	2,667	2,62
Argentina	1 peso (oro)	5	4,96
Bolivia	1 boliviano (plata)	5	2
Brasil	1 mil reis (oro)	2,83	1,66 (mil reis)
Chile	1 peso (oro)	1,89	1,87
Colombia	1 peso oro	5,183	0,65. (peso p.)
Costa-Rica	1 colón (oro)	2,412	2,37
Cuba	1 dollar (oro)	5,18	5,14
Ecuador	1 sucre	5	2,39
Estados Unidos	1 dollar (oro)	5,18	5,14
Guatemala	1 peso (plata)	5	0,25 (peso p.)
Honduras	1 gurdo (oro)	5	2
México	1 peso (oro)	2,583	2,55
Nicaragua	1 peso (plata)	5	0,50 (peso p.)
Panamá	1 balboa	5,183	5,14
Perú	1 libra (oro)	25,22	24,70
Salvador	1 peso (oro)	5	1,50 (peso p.)
Uruguay	1 peso (oro)	5,36	5,40
Colombiana	1 bolivar (oro)	1	0,99
Japón	1 yen (oro)	2,583	2,56
Filipinas	1 peso (oro)	2,591	2,50
Marruecos	1 peso duro	5	3,30

PROBLEMAS

1018. De cuántas libras esterlinas, chelines y peniques será una letra sobre Londres, que al 40% importa en Guayaquil \$ 286,40?

1019. ¿Cuántos francos importarán en Francia \$ 448 libras desde Quito, al 45% de premio?

1020. ¿Cuántos sucres deberán entregarse en Guayaquil para que, al 40% de cambio, se reciban en Londres, £ 40, 18 chelines, 6 peniques?

1021. ¿Cuántos sucres debo pagar en Quito, para recibir en París 1 600 francos, estando el cambio al 40%?

1022. ¿Cuánto debo pagar de premio por una letra sobre Cuenca, valor de \$ 850, sabiendo que el cambio está al 3% de premio?

1023. ¿Cuántas libras, chelines y peniques importan el Liverpool \$ 691 remitidos desde Guayaquil, al cambio del 36%?

1024. ¿Cuántos francos importarán en París \$ 1 518 librados desde Loja al 50% de cambio?

1025. ¿Cuántos sucres deberán entregarse en Riobamba para que al cambio del 35%, se reciban en Inglaterra £ 129, 11 chelines, 3 peniques?

1026. ¿Qué cantidad debe entregarse en sucres para que en Francia importe 6 952,44 francos una letra girada desde Guayaquil, al 39% de cambio?

1027. Un comerciante de Esmeraldas entrega 140 arrobas de tabaco, a \$ 5 cada una, por una letra contra Johnson, de Londres, al 40%; ¿cuántas libras valdrá esta letra?

1028. ¿Cuánto debe darse en el Ecuador, por una letra de 3 000 francos girados contra Garnier, de París, al 44%?

1029. Ambrosio desea remitir la suma de \$ 1 500 a un hijo suyo que se educa en Nueva York; ¿cuál será el valor de la letra en dólares americanos, estando el cambio al 44%?

1030. ¿Cuánto vale en el Ecuador una letra de cambio sobre Londres, de £ 390, 10 chel., a 50% de premio?

1031. ¿Cuál será en Inglaterra el valor nominal de una letra por la cual se dan \$ 7 125,50, estando el cambio al 36%?

1032. ¿Cuántos francos me costará en París una letra de cambio de \$ 975,60, al 38% de descuento?

1033. Una letra de cambio de 44.064 francos, sobre París, cuesta \$ 11 456,64; ¿cuál es la prima del cambio?

1034. Se han pagado en Guayaquil \$ 20 700 por una letra de cambio de £ 3 000 sobre Inglaterra; ¿a qué tanto % ha sido comprada dicha letra?

1035. ¿Cuánto debo pagar en Quito por una letra contra Regnault, de Burdeos, de 5 000 fr. si está el cambio al 40%?

1036. He tomado una letra de 2.500 fr. sobre París, contra Bruño, y he pagado \$ 700; ¿cuánto he perdido %?

1037. Con \$ 700 he comprado una letra sobre Londres; ¿de cuántas libras esterlinas será esta, estando el cambio al 40%?

1038. ¿A cuánto % sale una letra de 200 libras esterlinas, por la que han pagado \$ 1 400?

1039. Pregúntase cuánto importará en Guayaquil una letra estando el cambio entre ambas plazas al 35%. importa Bs. 50?

1040. Pregúntese cuánto importará en Caracas una letra de £ 240, 15 chelines, 11 peniques, contra Brown, de Londres, estando el cambio entre ambas plazas al 13,50?

1041. Un comerciante de Londres gira a favor de otro de Quito una letra de £ 124, 16 chelines y 5 peniques; ¿qué suma debe entregar en Quito al aceptante, si el cambio se halla al 50%?

CAPITULO V

COMISION Y CORRETAJE

556. Llámase comisión el tanto % que se paga a un agente o *comisionista*, por la compra o venta de mercaderías, el cobro de deudas, o cualquiera otra operación comercial, por cuenta de otra persona llamada *comitente*.

Aplicada a los documentos comerciales, la *comisión* es un tanto por ciento que cobran los banqueros para cubrir sus gastos de escritura y sus riesgos.

La comisión que percibe el comisionista por la compra o venta de géneros suele ser de 2% sobre el valor

de la operación, pero varía según la clase de géneros, la responsabilidad del comisionista, etc.

Los banqueros perciben una comisión de $\frac{1}{8}$ a $\frac{1}{4}\%$ del valor nominal del efecto. Esta comisión puede variar con cada banco y con la naturaleza de su clientela.

557. Corretaje es el tanto % que se paga como premio y estipendio al *comisionista* o *corredor*, por su diligencia.

El corredor sirve de intermediario entre el vendedor y el comprador de mercaderías, letras, valores públicos, etc.

En los puertos hay *corredores intérpretes de buques*, que traducen los documentos de los buques extranjeros, e intervienen en los contratos de fletamiento, de seguros marítimos, etc.

El tanto por ciento cobrado por el corredor varía desde $\frac{1}{2}\%$ arriba, según la clase de operaciones, su responsabilidad, etc.

558. Producto neto de una venta, etc., es lo que resulta líquido en la suma, precio o valor, después de deducir la comisión y demás gastos.

PROBLEMA I.—Mi corresponsal en Burdeos ha comprado \$ 9375 de mercaderías para remitírmelas; deseo saber qué comisión le toca a él, al 3%

Disposición de la operación

$$\begin{array}{r} \$ 100 \\ 9375 \end{array} \quad \begin{array}{r} \$ 3 \text{ comisión} \\ x \end{array} \quad \begin{array}{r} 3 \times 9375 \\ x = \frac{\quad}{100} = \$ 281,25. \end{array}$$

PROBLEMA II.—Braulio remite \$ 4740 a su agente de La Guaira para la compra de arroz y de café; después de haber deducido su comisión al 2%, ¿cuánto gastará el agente para su comitente, y cuánto tomará por su comisión?

Disposición de la operación

$$\begin{array}{r} \$ 102 \\ 4740 \end{array} \quad \begin{array}{r} 100 \\ x \end{array}$$

$$x = \frac{100 \times 4740}{102} = \$ 4647,05 \frac{45}{51}$$

$$\text{Comisión} = 4740 - 4647,05 = \$ 92,94 \frac{45}{51}$$

Para tener una cantidad de la misma especie que \$ 4740, que representa el *monto*, sumo con el capital \$ 100 la comisión 2, lo que da \$ 102.

Para encontrar la comisión, resto \$ 4647,05 $\frac{45}{51}$ de 4740, y resultan \$ 92,94 $\frac{45}{51}$

PROBLEMA III.—Un agente ha vendido inmuebles al 4% de comisión, y ha remitido al dueño, como producto neto, la suma de \$ 10 095,36; ¿en cuánto ha vendido los inmuebles, y qué comisión le corresponde a él?

Disposición de la operación

$$\begin{array}{r} \$ 96 \\ 10\,095,36 \end{array} \quad \begin{array}{r} \$ 100 \\ x \end{array}$$

$$x = \frac{100 \times 10\,095,36}{96} = \$ 10\,516$$

$$\text{Comisión} = 10\,516 - 10\,095,36 = \$ 420,64$$

PROBLEMAS

1042. Búsquese la comisión: 1º sobre \$ 874 al 2 $\frac{1}{4}\%$; 2º sobre \$ 71,50 al 3 $\frac{1}{2}\%$; 3º sobre \$ 1 580,70 al 4 $\frac{3}{4}\%$; 4º sobre \$ 309,10 al 5 $\frac{1}{6}\%$; 5º sobre \$ 4 705,20 al 6%.

1043. ¿Qué suma pagaré por el corretaje: 1º de \$ 750 al

1/4%; 2º de \$ 1540,40, al 1/2%; 3º de \$ 3610,80 al 1 1/2%; 4º de \$ 823,50 al 3/4%; 5º de \$ 1560,70 al 1 1/4%?

1044. ¿Cuál será mi corretaje total por el cambio de las siguientes letras: 1º de \$ 590 a 26 cents. %; 2º de \$ 745,30 a 28 cents. %; 3º de \$ 1615,72 a 30 cents. %; 4º de \$ 4532,09 a 32 cents. %; 5º de \$ 87, 30 a 29 cents. %?

1045. Casimiro ha recibido \$ 63 por el cobro de una deuda de \$ 1575; ¿cuál es el tanto de su comisión?

1046. Carlos ha vendido una consignación de cascarillas por \$ 12 686. Pide \$ 66 por almacenaje, y 6 1/4% de comisión; ¿cuál fue el producto neto de la venta?

1047. Un arquitecto pide a Romualdo 3/8% por planos y diseños, y 12 1/2% por la dirección de los trabajos de la casa que acaba de hacer edificar, y que le cuesta \$ 24 000; ¿cuánto recibirá el arquitecto?

1048. Teniendo que cobrar una deuda de \$ 1570, Ildefonso transige con el deudor a razón de \$ 90%; ¿cuál es su comisión al 5 1/2%?

1049. He pagado a Raimundo \$ 5,46 por cambio de \$ 364 en plata de los Estados Unidos; ¿cuál es el tanto del corretaje?

1050. He comprado en Corinto un cargamento de 9 500 quintales de cacao, a \$ 12 ql., y los heremitado en seguida a mi agente de Panamá, quien los ha vendido a razón de \$ 15 cada uno; ¿qué beneficio he realizado después de haber pagado \$ 312 por varios gastos, y la comisión al 3 1/2%?

1051. Mi corresponsal del Callao ha tomado en pago de su comisión \$ 74,20, por 364 quintales de arroz a \$ 10,50 cada uno; ¿cuál es el tanto de su comisión?

1052. Se ha vendido un terreno en \$ 3925, y el dueño ha recibido por producto neto \$ 3866, 12 1/2; a qué tanto se ha calculado la comisión?

1053. Miguel cobra 1 1/2% por imposición de cierta suma a intereses, y ha realizado \$ 285 por su corretaje; ¿cuál es la suma impuesta?

1054. He recibido de Sinfioriano la suma de \$ 700 en plata; haber tomado 2% de comisión, he empleado lo restante en la compra de azúcares; ¿cuánto he pagado por estos últimos, para cambiarlos en oro he pagado 3 1/2%; y después de haber recibido ¿cuál es mi comisión?

1055. Un especulador ha recibido \$ 4112,50 por producto neto de una venta, después de deducida la comisión al 5%; ¿cuál era el valor de la propiedad vendida?

CAPITULO VI

SEGUROS — TRANSPORTES
CUENTAS DE ALMACENAJE
DERECHOS DE ADUANA

Seguros

559. **Definición.**— Por *seguro* o *aseguración* se entiende el contrato o escritura en que un capitalista o una sociedad se comprometen a pagar a un propietario las pérdidas que éste puede sufrir sobre sus mercaderías o caudales, que corren algún riesgo de mar o tierra.

560. **Asegurador y asegurado.**— Se da el nombre de *asegurador* al que responde, mediante cierto interés, del riesgo que pueden correr las mercaderías o caudales.

Llámase *asegurado* el que es protegido por la Compañía de seguros.

561. **Póliza.**— *Póliza de seguros* es el contrato escrito del asegurador y del asegurado.

562. **Prima.**— *Prima* o *premio de seguros* es el tanto por ciento que cobra el asegurador, al fin de cada año o al terminar un viaje, sobre el valor de los artículos que asegura.

563. **Clases de seguros.**— Según el objeto que los motiva, los seguros se dividen en *marítimos*, *terrestres*, *contra el incendio*, etc.

Aseguración marítima es una fianza contra los riesgos y daños que puedan recibir en el mar los caudales

o mercaderías embarcadas, y los buques en que se conducen.

Aseguración terrestre es una fianza contra los riesgos de incendio u otras contingencias, que pueden correr las casas, los almacenes, las cosechas, etc.

El valor de las propiedades, resguardado por la aseguración, es el que representa la *diferencia* entre la suma asegurada y la prima o premio que se paga.

En la aseguración terrestre se paga cada año; en la marítima, generalmente la prima se paga por el tiempo que dura el viaje.

A más de la prima, el asegurado debe pagar los gastos de póliza y timbre.

Problemas.—Los problemas de aseguración pueden considerarse como casos particulares de la regla de interés.

Ejemplo I.—¿Qué prima se pagará, al 2½% por la aseguración de mercaderías tasadas en \$ 4 500?

Disposición de la operación

$$\begin{array}{r} \$ 100 \qquad \qquad \$ 2,50 \\ 4 500 \qquad \qquad \qquad x \\ 2,50 \times 4 500 \\ x = \frac{\quad}{100} = \$ 112,50. \end{array}$$

Ejemplo II.—¿En qué suma debe asegurarse un troj al 2% de modo que se ponga a salvo la pérdida del trigo, valuado en \$ 1 617 con la prima?

Disposición de la operación

$$\begin{array}{r} \$ 100 - 2 \qquad \qquad \$ 100 \\ 1 617 \qquad \qquad \qquad x \\ 100 \times 1 617 \\ x = \frac{\quad}{98} = \$ 1 650. \end{array}$$

Como \$ 1 617 representan la diferencia que hay entre la suma, asegurada y el premio que se paga, debo buscar otro número de la misma especie, restando de 100 la prima estipulada, esto es, $100 - 2 = 98$. — La suma asegurada resulta de \$ 1 650.

COMPROBACIÓN

$\$ 1 650 \times 0,2 = \$ 33$ de premio; $\$ 1 650 - \$ 33 = \$ 1 617$, la suma resguardada.

Transportes.

564. Definición.—El *transporte* es un contrato por el cual una persona se compromete a conducir mercaderías de un lugar a otro, por un precio convenido.

565. Clases de transportes.—Los transportes se verifican por tierra, por mar, por ríos o canales y por aire.

Transporte terrestre es el que se verifica por tierra con toda clase de vehículos.

Transporte marítimo es el que se verifica por mar con toda clase de barcos.

Transporte aéreo es el que se verifica por aire por medio de aviones.

566. Documentos que acompañan a las mercaderías.—A las mercaderías transportadas por tierra las acompaña la *carta de porte*, la cual es un documento que expresa las condiciones del transporte, y que firman por duplicado el cargador y el porteador o empresario de transporte.

A las mercaderías transportadas por mar, las acompaña el *conocimiento*, el cual es un escrito que da el comandante de un buque mercante, y en el que declara tener embarcadas ciertas mercancías que entregará en el puerto y a la persona designados por el remitente.

El contrato de transporte marítimo, para que sea obligatorio, a más del conocimiento, ha de extenderse por duplicado en una *póliza de fletamento* en que se consignan las condiciones estipuladas entre el capitán de un barco y el fletador del mismo.

Cuentas de Almacenaje

567. Definición.—*Almacenaje* es el derecho que se paga por conservar las mercaderías en un depósito o almacén.

568. Cálculo del almacenaje.—Las *cuentas de almacenaje* contienen el número de artículos recibidos y entregados, con la fecha de cada transacción o ajuste.

El almacenaje se calcula ordinariamente por meses de 30 días, y a cierto precio por barril, fardo, cajón, etc.

El número de artículos sometidos al almacenaje durante un mes u otro tiempo convenido, se determina generalmente a un término medio.

569. Para encontrar el término medio de almacenaje durante un mes o cualquier otro tiempo, hay que escribir separadamente el número de artículos recibidos y el de los entregados, con sus respectivas fechas:

Multiplicar el número de artículos recibidos o entregados por los días transcurridos desde la fecha de cada recibo o entrega, hasta la fecha de la última entrega:

Del total de los productos de los recibos se resta el de los productos de las entregas, y la diferencia se divide por 30, o por el número de días convenido; el cociente dará el número de los artículos por los cuales debe pagarse el almacenaje durante el tiempo indicado.

Ejemplo.—¿Cuánto costará el almacenaje de harinas, a 6 cents. barril, que se han recibido y entregado como sigue: Recibido el 1º de Mayo de 1910, 1 000 barriles; en Mayo 26, 1 000 bbls. Entregado en Mayo 16, 500 bbls.; en Junio 1º, 1 000 bbls.; en Junio 12, 1 100, y en Julio 2, 400?

Operación.

1910		barriles	días	prod.	
Mayo 1º	Recibido	1 000	× 62	= 62 000	} = 136 000
— 26	—	2 000	× 37	= 74 000	
— 16	Entregado	500	× 47	= 33 500	
Junio 1º	—	1 000	× 31	= 31 000	} = 76 500
— 12	—	1 100	× 20	= 22 000	
Julio 2	—	400	× 0	= 0	
				Diferencia	59 500

$59\ 500 : 30 = 1\ 983$ barriles 34 que se deben pagar por 1 mes; $1\ 983,34 \times 0,06 = \$ 119$, importe del almacenaje.

El almacenaje que debiera pagarse por los 3 000 bbls. recibidos hasta la última fecha, equivale al que se pagaría por 136 000 en 1 día, si todos hubieran quedado depositados en el almacén durante todo el tiempo; pero como han sido entregados en distintas fechas, no debe pagarse sino por el tiempo medio que han permanecido en depósito, lo cual se conoce dividiendo por 30 días la diferencia que hay entre las sumas de los productos de los barriles recibidos y las de los entregados.

Nota.—Cuando el número de artículos puestos en almacenaje contiene un quebrado *menor que un medio*, se suele, en la práctica, prescindir del quebrado; pero si éste es *mayor que un medio*, se lo considera como un artículo completo.

Derechos de aduana

570. Definición.—Por *derechos de Aduana* se entiende el tanto que se paga, con arreglo a arancel o tarifa oficial, por la introducción de mercaderías.

571. Aduana.—En cada puerto de entrada (puertos *marítimos, fluviales o secos*) los gobiernos tienen una oficina pública, llamada *Aduana*, destinada para registrar los géneros y mercaderías, y cobrar los derechos que adeudan.

572. Cobro de derechos de Aduana.—Para el cobro de derechos de aduana, se atiende generalmente al peso de las mercaderías, por kilogramo, comprendido el del embalaje y de los fardos o cajones en que se transportan, y el del envase para los líquidos.

573. Llámase *tara* la parte de peso que se rebaja en los géneros o mercaderías por razón de la caja, saco o cosa semejante en que vienen incluidos o cerrados.

574. Peso bruto y peso neto.—Llámase *peso bruto* el de las mercaderías antes que se haya hecho la rebaja de la tara u otra deducción.

Peso neto es el peso real de las mercaderías después de hechas todas las rebajas o deducciones.

575. Dase el nombre de **aforo** al reconocimiento y valuación de los géneros de comercio para el pago de derechos.

Ejemplo.—¿A cuánto ascenderá una liquidación de Aduana, por 5 barriles de vino, de 45 kg. de peso bruto cada uno, y 8 cajas de coñac de 25 kg. cada una, si el vino paga \$ 0,10 por kg. y el coñac 0,25, pagando además los brls. a razón de 5 cents. cada uno por los derechos de piso, y las cajas a 3 cents.?

SOLUCIÓN

	Peso	Aforo
5 barriles de vino, de 45 kg. c/u.=225 kg.;	225	kg.×1,00=225,00
8 c/ de coñac, de 25 kg. c/u.=200	;200	kg.×4,50=900,00
		72,50
Piso de 5 barriles a 0,05		0,25
— — 8 cajas a 0,03		0,24
		72,99
Total de la liquidación \$ 72,99		

PROBLEMAS

ASEGUACIONES

1056. ¿Qué premio debe pagarse al 1 3/4% por la aseguración de una casa valuada en \$ 5 728?

1057. Una goleta, asegurada en \$ 5 000, al 2 1/4% ha sufrido naufragio; ¿qué parte de la pérdida se halla resguardada por la aseguración?

1058. Un almacén con sus mercaderías vale \$ 6 370; en qué suma debe asegurarse, al 2% para poder cubrir la propiedad y el premio?

1059. Pago anualmente \$ 45 por la aseguración de mi biblioteca, esto es, el 3% de la suma convenida en la póliza; ¿por cuánto estoy asegurado?

1060. Cervasio tiene \$ 12 000 en mercaderías, y las hace asegurar por los 4/5 de su valor, a los 3/4% de premio; si en un incendio no puede salvar más que \$ 2 000, ¿a cuánto asciende la pérdida actual que sufre?

1061. ¿En qué suma debe hacerse asegurar al 1 1/2% una casa estimada en \$ 8 274, para que no se pierda nada, si se destruye dicha casa?

1062. El premio de seguros de una casa, al 1 1/4%, es de \$ 50 ¿en cuánto está asegurada?

1063. Una compañía de seguros después de haber asegurado todas las casas de un barrio en \$ 36 000, al 2 1/2%, reasegura la mitad de ellas al 3%; ¿qué diferencia hay entre ambas primas?

1064. Un bergantín tasado en \$ 40 000 ha sido asegurado por los 3/4 de su valor al 11/2%, y el cargamento, estimado en \$ 36 000, a los 4/5%; ¿cuánto importa la aseguración?

1065. Máximo ha pagado \$ 1 450 de premio por la aseguración de un cargamento de algodón; siendo el tanto de aseguración el 2 1/2%; ¿cuál era el valor del cargamento?

1066. He pagado \$ 18 por una aseguración de \$ 1 200; ¿cuál ¿cuál es el tanto del premio?

1067. Un comerciante ha hecho asegurar un cargamento de 500 barriles de harina por el 80% de su valor, al 3 1/4%, y ha pagado \$ 107,25 de premio; ¿cuánto le había costado el barril?

1068. Mi casa estaba asegurada en \$ 45 000 durante 5 años. El 1er. año pagué \$ 1,50 por póliza y planos, y los 5/8% de premio; y cada uno de los otros años 1/2% de premio. Como la casa se quemó en el quinto año, pregunto cuál fué la pérdida de la aseguración, no habiéndose abonado ningún interés.

1069. Un hacendado había hecho asegurar su casa y sus cosechas, cuyo valor total ascendía a \$ 75 400. Han pasado 3 años 9 meses sin pagar el premio, cuyo tanto era el 1,40 por mil; ¿qué suma debe a la compañía?

Almacenaje

1070. Cuánto se pagará por el almacenaje de sal, a 25 cents. carga, recibida y entregada como sigue: el 6 de junio de 1910, 120 cargas; el 16 de junio, 140; el 26 de junio, 600; el 5 de julio, 300; el 16 de julio, 180; el 20 de julio, 160; todas las cuales han sido entregadas el 1º de agosto?

1071. ¿Cuál será el almacenaje de cascarilla, a 6 cents. fardo, por mes, recibido y remitido como sigue: Recibido el 1º de julio de 1910, 400 fardos, el 15 de julio, 350; el 26 de julio, 450. Remitido el 12 de julio, 200 fardos; el 20 de julio, 400; el 1º de agosto, 200, y el 8 de agosto, 400?

1072. Recibido y remitido a cuenta de Patricio varios bultos de algodón como sigue: Recibido el 1º de enero de 1911, 1 848 bultos; el 16 de enero, 96; el 1º de febrero, 240. Remitido el 12 de febrero, 800; el 1º de marzo 480; el 3 de abril, 320; el 10 de Abril, 250. Búsquese cuántos bultos quedan en el

almacén el 1º de mayo, y el importe del almacenaje hasta dicho día, a razón de 6 cents. por bulto y por mes.

1073. Recibido en almacenaje el 3 de julio de 1910, 256 barriles de vino, y el 15 de julio siguiente, 381 bbls. más; el 18 de julio, remitido 261 bbls., y el 26, 312; el 30 de julio, recibido 321 bbls., y el 8 de agosto, 163; el 16 de agosto, remitido 208 bbls., el 18, 103, y el 19, 115 bbls.; el 1º de 7bre., recibido 320 bbls.; el 2, 206, y el 7, 342; el 12 de 7bre., remitido 250 bbls.; el 18, 321; el 21, 133, y el resto el 27; ¿cuál ha sido el importe del almacenaje, a 60 cents. mensuales por barril?

Derechos de aduana

Nota.—En cada uno de los problemas siguientes debe recargarse el 20% para los partícipes, y el 10% para el pago de la deuda externa.

1074.—¿Qué derechos deben pagarse por las mercads. siguientes: 3 cajones de libros, de 10 kg. de peso c/u, a 2 cents. de aforo por kg.; — 2 cajas de floreros de loza, de 45 kg. c/u, a 5 cents.; — 2 cajas de instrumentos de física, de 27 kg. c/u, a 10 cents. — Piso de 3 cajones a 5 cents. — de 4 cajas, a 3 cents.?

1075. Un comerciante de Riobamba recibe de Londres: 10 piezas de lino de 30 kg. c/u. a \$ 5.00 de derechos; — 6 doc. de pañuelos de lino, de 4 kg. doc., a 45 cent. — 6 doc. de sombreros de fieltro, de 16 kg. doc., a \$ 51; — 10 doc. de medias de lana, de 5 kg. doc., a 50 cents.; pregúntase a cuánto ascenderán los derechos, según los aforos indicados?

1076. Liquidese la cuenta siguiente, calculando los derechos que por ella deben pagarse: 4 botes de aceite para máquinas, de 2,50 kg. c/u, a 0,05 de aforo; — 2 doc. de cajitas de betún de 3 kg. doc., a 0,25; — 6 botes de tinta de imprenta, de 1 kg. c/u, a 0,02. — Piso de 4 botes a 0,05; y de 2 botes a 0,03.

1077. Ubaldo recibe las mercads. siguientes, que le importan \$ 200; 1 cajón de pizarras para escribir, de 25 kg. de peso, a 0,02 el kg.; — 10 kg. de lápices de pizarra, a 0,02 el kg.; — 1 fardo de papel de escribir de 30 kg. a 0,10; — 2 500 sobres decartas, de 1/2 kg. a 0,10 kg.; — 6 gruesas de lápices de plomo, de 1/2 kg. la gruesa a \$ 1; — 190 cajas de

(1) Estos problemas se refieren al Ecuador; en los demás Estados, los profesores tendrán el cuidado de apropiarlos a las leyes y usos del país respectivo.

plumas de acero, de 50 kg. de peso, a 10 cents. ¿A cuánto cederá el valor total de ellas, después de pagados los derechos, si quiere el dueño ganar el 25% sobre el precio de compra, y si paga además por piso de 3 cajones y 1 fardo a 0,05 c/u, y por 2 cajas, a 0,03?

1078. Venancio Escobar ha importado de París: 5 relojes de pared de 9 1/2 kg. de peso c/u, a 0,25 de derechos; — 20 id. de bolsillo, de 1/10 kg. c/u, a \$ 1; — 400 tinteros de plomo, de 29 kg. en todo, a 0,05; — 1 armonio de 77 kg., a 0,05. — Piso de 3 B/ a 0,10; id. de 2 B/ a 0,03. Búsquese el monto de los derechos que adeuda.

1079. ¿Cuánto debe pagar Teófilo a su corresponsal de Guayaquil, por los derechos de las siguientes mercancías, que saca por su cuenta de la aduana?: 3 doc. de navajas de barba, de 2 kg. doc., a 0,50 de aforo; — 3 kg. de agujas y alfileres, a 0,10 kg.; — 6 doc. de cortaplumas, de 1,50 kg., a 0,50; 6 escopetas, de 3 kg. c/u, a \$ 1. — Piso de 1 B/, 0,10.

1080. ¿Cuál será el monto de una letra sobre Guayaquil, al al 3% de premio, a la orden de Orrantia y Cía., por los derechos que ellos pagan en lugar de S. Gómez de Quito, por las mercancías siguientes?: 12 cajas de cerveza, de 25 kg. c/u. a 0,05; — 6 id. de mistelas, de 25 kg. c/u, a 0,25; — 10 barriles de vino, de 45 kg. c/u. a 0,10. — Piso de 18 cajas a 0,05. id. de 10 brls. a 0,05.

1081. ¿Qué liquidación tendrá que formar el Interventor de la aduana, por los derechos que causan las mercancías siguientes?: 10 doc. de carteras, de 3 kg. doc., de \$ 1,50 de aforo; — 15 gruesas de cañutos para plumas, de 1 kg. la gr., a 0,50; — 3 000 cuadernos en blanco, de 32 kg. el mil, a 0,10 — Piso de 4 cajones a 0,05; — id. de 2 cajas a 0,03.

1082. Tres comerciantes reciben una remesa de 36 pares de botas, de 1,50 kg. el par, a 0,50 de derechos; — 36 pantalones de paño, de 1 kg. c/u, a 0,50; — 3 cajones de frazadas de algodón, de 55 kg. cajón, a 0,25; — 6 doc. de medias de algodón, de 2 kg. doc., a 0,25. — Piso de 3 B/ a 0,05; id. de 3 cajas, a 0,03. — ¿Cuánto le corresponde pagar a cada uno por los derechos?

1083. ¿Qué suma queda debiendo, C. Gómez de Cuenca por los derechos que causan las mercancías siguientes: 4 doc. de cajas de sardinas, de 2,50 kg. doc., a 0,25; — 4 kg. de nueces, a 0,05; 6 kg. de fideos, a 0,05; — 12 cajas de pasas, de 1/2 kg. c/u, a 0,05; — 3 kg. de almendras, a 0,05. — Piso de 2 cajones, a 0,05; id. de 2 cajas, a 0,03.

1084. Liquidese la cuenta siguiente, calculando los derechos que por ella se deben: 2 cajas de perfumería, de 2 kg. c/u, a 1,50 de aforo; — 4 doc. de peines, de 1 kg. en todo a 0,25; — 1 doc. de paraguas de seda, de 4 kg. en todo, a 0,50. — Piso de 1 \$/ 0.10.

CAPITULO VII
PROGRESIONES, LOGARITMOS
INTERESES COMPUESTOS
§ I.—Progresiones

576. **Definición.**—Llámase *progresión* una serie de términos tales, que la relación o razón de dos términos consecutivos es constantemente igual.

Hay dos clases de progresiones: las progresiones *aritméticas* o por diferencia, y las progresiones *geométricas* o por cociente.

Progresiones aritméticas

577. **Definición.**—Progresión *aritmética* es una serie de términos que aumentan o disminuyen en una cantidad constante, llamada *razón* de la progresión.

Una progresión aritmética es *creciente* o *ascendente* cuando la razón es positiva, y *decreciente* o *descendente* cuando la razón es negativa.

Ejemplos: $\div 2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16 \dots$
 $\div 96. 92. 88. 84. 80. 76. 72. 68 \dots$

que se leen: como 2 es a 4, es a 6, es a 8, etc.
como 96 es a 92, es a 88, es a 84, etc

La primera progresión es *creciente*; su razón es +2.
La segunda es *decreciente*; su razón es -4.

578. **Hallar un término cualquiera de una progresión aritmética.**—En la progresión aritmética *creciente*:

$\div 1. 5. 9. 13. 17. 21$

se encuentra un término cualquiera, el sexto por ejemplo, añadiendo al primero el producto de la diferencia común por el número de términos menos uno, o $1 + (4 \times 5)$, esto es, 21.

En la progresión aritmética *decreciente*:

$\div 50. 46. 42. 38. 34. 30. 26$

se encuentra un término cualquiera, el séptimo por ejemplo, restando del primer término el producto de la diferencia común por el número de términos menos uno, o $50 - (4 \times 6)$, esto es, 26.

579. **REGLA.**—Para hallar un término cualquiera de una progresión aritmética se multiplica la razón por el número de términos que hay antes de él, y se agrega este producto al primer término si la progresión es creciente, y se lo resta de él si es decreciente.

Llamando l al *enésimo* término de una progresión, a al primer término, y r a la razón, tendremos la fórmula:

$$l = a + (n - 1)r$$

Ejemplos: 1º Hallar el 25º número impar.

Los números impares forman una progresión:

$\div 1. 3. 5. 7. 9 \dots$

cuya razón es 2.

Luego, tendremos:

Término 25º = $1 + (2 \times 24)$ o sea 49.

2º Búsquese el 31º término de la progresión

$\div 75. 72. 69. 66 \dots$

Se tendrá:

Término 31º = $75 + (-3 \times 30)$ o sea -15.

580. **Suma de los términos de una progresión aritmética.**—Sea la progresión $\div 3. 6. 9. 12. 15. 18$.

Designando la suma por S , se tiene:

$$S = 3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 18$$

$$S = 18 + 15 + 12 + 9 + 6 + 3$$

Sumemos ordenadamente:

$$2S = 21 + 21 + 21 + 21 + 21 + 21$$

$$\text{Luego, } S = \frac{21 \times 6}{2} = \frac{(3 + 18)6}{2}$$

581. REGLA.—Para encontrar la suma de los términos de una progresión aritmética limitada, hay que multiplicar la semisuma de los extremos por el número de términos.

Llamando a y l a los términos extremos, y n al número de términos, tendremos la fórmula:

$$S = \frac{(a + l)n}{2} \quad (1)$$

Si en esta fórmula se sustituye el valor $a + (n - 1)r$ del *enésimo* término l , resultará:

$$S = \frac{[a + a + (n - 1)r]n}{2} \text{ o } \frac{n}{2}[2a + (n - 1)r]. \quad (2)$$

Por medio de esta fórmula se puede calcular la suma de los términos de una progresión, en función de a , n y r .

Ejemplos.—1º ¿Cuál es la suma de los términos de la progresión $\div 3.8.13.18\dots$, compuesta de 41 términos?

Busquemos primero el 41º término.

Este término es igual a $3 + (5 \times 40) = 203$.

$$\text{Luego (1)} \quad S = \frac{(3 + 203)41}{2} = 4223.$$

La fórmula (2) inmediatamente:

$$S = \frac{41}{2}(6 + 40) \times 5 = 4223$$

2º ¿Cuál es la suma de los 100 primeros números 1.2.3.4...100?

Estos números forman una progresión aritmética cuya razón es 1. Luego:

$$S = \frac{(1 + 100)100}{2} = 5050;$$

Progresiones geométricas

582. Definición.—Llámase *progresión geométrica* una serie de términos tales, que cada uno de ellos es igual al que le precede multiplicado por una cantidad constante, llamada *razón* de la progresión.

Una progresión geométrica es *creciente* cuando la razón es mayor que 1, y *decreciente* cuando la razón es un quebrado.

Ejemplos: $\div 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64\dots$

$$\div 81 : 27 : 9 : 3 : \frac{1}{3} : \frac{1}{9} \dots$$

que se leen:

Como 1 es a 2, es a 4, es a 8, etc.

Como 81 es a 27, es a 9, es a 3, etc.

La primera progresión es *creciente*; su razón es 2.

La segunda es *decreciente*; su razón es $\frac{1}{3}$.

583. Hallar un término cualquiera de una progresión geométrica.—En la progresión geométrica.

$$\div 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : 96$$

el segundo término es igual a 3×2 ; el terero igual a 3×2^2 ; el cuarto es 3×2^3 , etc. De donde se deduce la siguiente regla.

584. REGLA.—Para encontrar un término cualquiera de una pro-

progresión geométrica se multiplica el primer término por una potencia de la razón expresada por el número de términos que le preceden.

Representando por l el último término, o sea el que ocupa el lugar n , por a el primero, y por q la razón, tendremos:

$$l = aq^{n-1}.$$

Ejemplos.—1º Hallar el noveno término de la progresión $\div 1 : 2 : 4 : 8$

El 9º término $= 1 \times 2^8$, o sea 256.

2º Búsquese el 11º término de la progresión:

$$\div 27 : 9 : 3 : 1 : \frac{1}{3} \dots$$

El 11º término $= 27 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{10}$, o sea $\frac{1}{2187}$.

585. Suma de los términos de una progresión geométrica.—En la progresión geométrica

$$\div 2 : 6 : 18 : 54 : 162$$

la suma de los términos es:

$$S = 2 + 6 + 18 + 54 + 162 \quad (1)$$

Multipliquemos esta suma por la razón 3:

$$3S = 6 + 18 + 54 + 162 + 486. \quad (2)$$

Restemos la igualdad (1) de la igualdad (2):

$$\begin{array}{r} 3S = 6 + 18 + 54 + 162 + 486 \\ S = 2 + 6 + 18 + 54 + 162 \\ \hline 2S = + 486 - 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2S = + 486 - 2 \\ + 486 - 2 \\ \hline \text{Luego } S = \frac{970}{2} \end{array}$$

El numerador es la diferencia entre el producto del último término por la razón, y el primero; el denominador es la razón menos uno. De donde se deduce la siguiente regla.

586. REGLA.—Para hallar la suma de los términos de una progresión geométrica, hay que multiplicar el último término por la razón, restar del producto el primer término, y dividir la diferencia por la razón menos 1.

Si la razón es menor que 1, se multiplica el último término por esta razón; el producto se resta del primer término, y se divide la diferencia por 1 menos la razón.

Representando el primer término por a , por l el último, por q la razón, tendremos:

$$S = \frac{lq - a}{q - 1} \quad (1)$$

$$\text{y} \quad S = \frac{a - lq}{1 - q} \quad (2)$$

En la fórmula (1) sustituyamos l con su valor aq^{n-1} ; esta fórmula se convierte en la siguiente:

$$S = \frac{aq^n - a}{q - 1} = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q} \quad (3)$$

Por medio de esta fórmula se puede calcular la suma de los términos en función de a , de q y de n .

Ejemplos.—1º ¿Cuál es la suma de los nueve primeros términos de la progresión $\div 2 : 4 : 8 : 16 \dots$?

$$\text{La fórmula (3) da: } S = \frac{2(2^9 - 1)}{2 - 1} = 1022.$$

2º ¿Cuál es la suma de los términos de la progresión $\div 128 : 64 : 32 \dots$ compuesta de 12 términos?

La fórmula (3) da:

$$S = \frac{128 \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{12} \right]}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{128 \left(-1 \frac{1}{4096} \right)}{\frac{1}{2}} = \frac{256 \times 4095}{4096} = \frac{51}{61}$$

§ II.—Logaritmos.

587. Definición.—Llámanse *logaritmos* los términos de una progresión aritmética, que principia por cero, correspondientes a los de una progresión geométrica que principia por la unidad. Cada término de la progresión aritmética es el logaritmo del término correspondiente en la geométrica.

Estas dos progresiones pueden continuarse indefinidamente en ambos sentidos; la una contiene el término uno, la otra el término cero y estos dos términos deben corresponderse.

Sean las progresiones:

$$\begin{aligned} & \div 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 : 512 : 1024 : 2048 : 4096 \\ & \div 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 . 10 . 11 . 12 \\ & 0 \text{ es el logaritmo de } 1; 1 \text{ es el de } 2; 2 \text{ el de } 4; 5 \text{ el de } 32; \\ & 10 \text{ el de } 1024, \text{ etc.} \end{aligned}$$

588. De la definición anterior (587) parece inferirse que sólo los números que forman la progresión geométrica tienen un logaritmo. Sin embargo, si se interpolan muchos medios geométricos entre los varios términos de la primera progresión, e *igual número* de medios aritméticos entre los diferentes términos de la segunda, cada término de la progresión aritmética *será también el logaritmo del término correspondiente* de la progresión geométrica.

PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS.

589. 1ª PROPIEDAD.—El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores de este producto.

Sean las progresiones:

$$\begin{aligned} & \div 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 : 512 : 1024 : 2048 : 4096 \\ & \div 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 . 10 . 11 . 12 \end{aligned}$$

1º Hagamos el producto de 4 por 128.

Siendo los logaritmos de 4 y de 128, 2 y 7, los sumo: $2 + 7 = 9$; el número 9, que corresponde a 512, es el logaritmo de 512, y 512 es el producto de 4 por 128.

2º Hagamos el producto de 4 por 16 y por 64.

Los logaritmos de 4, de 16 y de 64 son 2, 4 y 6, cuya suma es 12, 12 que corresponde a 4096 es el logaritmo de este número, y 4096 es el producto de 4 por 16 y por 64.

590. 2ª PROPIEDAD. El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor.

$$\text{Sea } 7 = \frac{56}{8}; \text{ tenemos } 7 \times 8 = 56.$$

$$\begin{aligned} \text{Luego (589):} & \quad \log 7 + \log 8 = \log 56; \\ \text{de donde} & \quad \log 7 = \log 56 - \log 8. \end{aligned}$$

591. 3ª PROPIEDAD. El logaritmo de cualquier potencia de un número es igual al exponente de la potencia multiplicado por el logaritmo de dicho número.

$$\begin{aligned} \text{Sea } 5^3; \text{ tenemos } 5^3 &= 5 \times 5 \times 5 \\ \text{Luego (589) } \log 5^3 &= \log 5 + \log 5 + \log 5 \\ \text{o} & \quad \log 5^3 = 3 \log 5. \end{aligned}$$

592. 4ª PROPIEDAD. El logaritmo de la raíz de un número es igual al logaritmo de este número dividido por el índice de la raíz.

$$\begin{aligned} \text{Sea} & \quad 4 = \sqrt[3]{64}. \\ \text{Elevemos al cubo los dos miembros:} & \quad 4^3 = 64 \\ \text{Luego (591)} & \quad 3 \log 4 = \log 64; \\ & \quad \log 64 \\ \text{de donde} & \quad \log 4 = \frac{\log 64}{3}. \end{aligned}$$

593. Nota.—Según las propiedades anteriores, el cálculo por logaritmos facilita mucho las operaciones, ya que *la multiplicación se convierte en adición, la división en sustracción, la elevación a potencias en multiplicación, y la extracción de raíces en división.*

LOGARITMOS VULGARES Ó DECIMALES.

594. De la definición del N^o 587 resulta que el número de sistemas de logaritmos que pueden imaginarse es ilimitado, ya que q y r son arbitrarios, y un mismo número tendrá necesariamente logaritmos diversos en sistemas también diferentes.

Los sistemas se distinguen unos de otros según el número que tiene por logaritmo la unidad, el cual recibe el nombre de *base*.

595. Logaritmos vulgares.—Los *logaritmos vulgares* o de *Briggs* tienen por base el número 10 (por eso se llaman también *decimales*), de manera que las progresiones fundamentales de su sistema son las siguientes:

$$\begin{array}{cccccccc} \div & 1 & : & 10 & : & 100 & : & 1\ 000 & : & 10\ 000 & : & 100\ 000 & : & 1\ 000\ 000 \\ \div & 0 & . & 1 & . & 2 & . & 3 & . & 4 & . & 5 & . & 6 \end{array}$$

En este sistema se ve: 1^o que el logaritmo de 1 es 0; el de 10 es 1; el de 100 es 2; el de 1 000 es 3.; etc.

2^o Que todo número comprendido entre 1 y 10 tiene su logaritmo mayor que 0 y menor que 1; que todo número comprendido entre 10 y 100 tiene su logaritmo mayor que 1 y menor que 2; que todo número comprendido entre 100 y 1 000 tiene su logaritmo mayor que 2 y menor que 3, y así sucesivamente; de donde se infiere que el logaritmo de un número mayor que 10 consta de una parte entera llamada *característica* y de una parte decimal llamada *mantisa* salvo los logaritmos de los números 100, 1 000, 10 000 etc. que no tienen parte decimal; además se ve que *la característica de un logaritmo consta de tantas unidades*

cuantas cifras tiene el número en su parte entera, menos una.

596. Nota I.—Si se prolongan indefinidamente a derecha e izquierda las progresiones del N^o 595, resulta:

$$\begin{array}{cccccccccccc} \dots & 0,001 & : & 0,01 & : & 0,1 & : & 1 & : & 10 & : & 100 & : & 1\ 000 \dots \\ & -3 & . & -2 & . & -1 & . & 0 & . & 1 & . & 2 & . & 3 \end{array}$$

En estas progresiones, todo número comprendido entre 0,1 y 1 tiene su logaritmo comprendido entre -1 y 0; este logaritmo puede representarse por $-1 +$ una fracción. Asimismo, todo número comprendido entre 0,01 y 0,1 tiene su logaritmo mayor que -2 y menor que -1 ; este logaritmo puede representarse por $-2 +$ una fracción, etc. Luego el logaritmo de un número menor que 1 tiene su característica negativa y su parte decimal positiva.

El signo *menos* de la característica negativa se coloca encima de dicha característica: 2, 3, 1.

Estas progresiones manifiestan también que la *característica negativa* del logaritmo de un número menor que 1 tiene tantas unidades *como ceros hay antes de la primera cifra significativa, incluso el que precede de la coma.*

597. Nota II.—No teniendo términos negativos, la progresión geométrica precedente, se infiere que *los números negativos no tienen logaritmos.*

598. PROPOSICION.—En los logaritmos vulgares, el logaritmo de un número 10 veces, 100 veces, 1 000 veces, etc., mayor o menor que otro, tiene la misma parte decimal que este otro, y no difiere de él sino por la característica.

En efecto, sea 3,54295 el logaritmo de un número. El logaritmo de un número 10, 100, 1 000 veces mayor o menor que el número dado, se obtendrá añadiendo a 3,54295 o restando de él los logaritmos de 10, de 100, de 1 000, etc. (589 y 590) que no tienen parte decimal; luego habrá que operar sólo sobre la característica, y no se alterará la parte decimal:

DE LAS TABLAS DE LOGARITMOS.

599. Clases de tablas de logaritmos. Hay diferentes clases de tablas de logaritmos; las unas, llamadas grandes tablas, dan los logaritmos de los 100 000 o 108 000 primeros números, con 7 cifras decimales; las otras dan los logaritmos de los 10 000 o 20 000 primeros números, con 5 cifras decimales. Estas últimas, aunque den menor aproximación en los cálculos, se usan más que las primeras.

600. Uso de las tablas.—Para servirse de una tabla de logaritmos, hay que saber resolver las dos operaciones siguientes:

- 1º Encontrar el logaritmo de un número dado;
- 2º Encontrar el número que corresponde a un logaritmo dado.

601. Encontrar el logaritmo de un número dado.—Supondremos que tenemos las tablas con 5 decimales.

1º Caso.—*El número se halla en las tablas.* En este caso se lee inmediatamente el logaritmo correspondiente.

Así, el log de 6843 es 3,835 25.

El log de 6,843 es 0,835 25, pues no difiere del 6843 sino por la característica.

2º Caso.—*El número no se encuentra en las tablas.* Se determina primero la característica; en seguida se multiplica o divide el número por 10, 100 o por 1 000, etc., de modo que resulte un número entero, y el mayor que sea posible, contenido en las tablas; por último se busca la mantisa del logaritmo del número obtenido, *teniendo en cuenta las diferencias tabulares.*

Ejemplos.—*Calcúlese el logaritmo de 24 647.*

Dividamos 24 647 por 10, lo que da 2 464,7
La característica es 4, por tener el número 5 cifras.

Busquemos en las tablas la mantisa del logaritmo de 2464; se encuentra 0,391 64.

Siendo de 18 unidades del quinto orden la diferencia tabular entre los logaritmos de 2464 y 2465, se dirá, *considerando el aumento de los logaritmos como sensiblemente proporcional al aumento de los números*:

Por 1 entero de diferencia en los números hay un aumento de 18 en los logaritmos; por una diferencia de 0,7 en los números, habrá un aumento de x en los logaritmos, o sea:

$$\frac{1}{18} = \frac{0,7}{x};$$

de donde $x = 13$, en menos de una unidad de quinto orden.

Se añaden estas 13 cienmilésimas a 0,391 64, y resulta 4,391 77 como logaritmo del número 24 647.

2º Búsquese el logaritmo de 0,0478533.

La característica será 2.

Multiplicando por 100 000, tendremos 4 785,33.

El logaritmo de 4 785 tiene por mantisa 0,679 88.

Siendo de 9 unidades del quinto orden la diferencia entre los logaritmos de los números 4 785 y 4 786, se dirá:

Por 1 entero de diferencia en los números hay un aumento de 9 en los logaritmos; por una diferencia de 0,33 en los números habrá un aumento de x en los logaritmos, o sea:

$$\frac{1}{9} = \frac{0,33}{x};$$

de donde $x = 3$, en menos de una unidad de quinto orden; el logaritmo de 0,0478533 será 2,679 91.

En ciertas tablas el cálculo de las partes proporcionales va indicado en una columna especial.

602. Encontrar el número que corresponde a un logaritmo dado.

1º Caso *La mantisa del logaritmo se halla exactamente en las tablas.*

Se lee en las tablas el número correspondiente a esta mantisa, que se busca siempre como si estuviera precedida de la característica 3.

Por ejemplo, se ve que 7655 es el número correspondiente al logaritmo 2,883 95. La característica 2 indica que la parte entera del número tiene 3 cifras: por lo tanto el número es 765,5.

Asimismo, el número correspondiente a la parte decimal del logaritmo 2,18808 es 1542; la característica 2 indica que la primera cifra significativa del número pedido ocupa el segundo lugar después de la coma (596); luego este número es 0,01542.

2º Caso. La mantisa del logaritmo no se halla en las tablas.

Para encontrar, por ejemplo, el número correspondiente al logaritmo 4,555 75, se busca en las tablas la parte decimal del logaritmo como si estuviera precedida de la característica 3. No se encuentra en las tablas, pero se ve que está comprendida entre 3,555 70, log. de 3 595, y 3,555 82 log. de 3 596.

La diferencia tabular es 12, y la que existe entre 555 75 y el logaritmo inmediatamente inferior 555 70, es 5.

Se dirá: si teniendo el logaritmo 555 70, 12 unidades más, de quinto orden, el número 3 595 se aumenta con 1, al tener el logaritmo 5 unidades más, el número se aumentará con x ,

$$\begin{array}{r} 12 \quad 5 \\ - \quad - \\ 1 \quad x \end{array}$$

$x = 0,41$, que se añaden a 3 595, lo que da 359 541.

La característica 4 indica que el número pedido tiene 5 cifras en su parte entera; por lo tanto, este número será 35 954,1.

EJEMPLOS DE CÁLCULO CON LOGARITMOS

$$\begin{array}{r} 1^\circ \text{ Súmese } \log 3,872 \ 45 \\ \text{con } \log 2,954 \ 19 \end{array} \quad \begin{array}{r} \log 3,872 \ 45 \\ \log 2,954 \ 19 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Suma} = 2,826 \ 64$$

Después de haber dicho en la columna de las décimas: 1 que llevo y 8 son 9, y 9 son 18, se escribe 8 y se lleva 1; 1 y 3 son 4, 4 y -2 son +2; luego el resultado es 2,826 64.

$$\begin{array}{r} 2^\circ \text{ De } \log 0,936 \ 76 \\ \text{réstese } \log 3,111 \ 90 \end{array} \quad \begin{array}{r} \log 0,936 \ 76 \\ \log 3,111 \ 90 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Diferencia} = 3,824 \ 86$$

Después de haber dicho en la columna de las décimas: 1 de 9 da 8, se añade: 3 de 0 da -3.

$$\begin{array}{r} 3^\circ \text{ Del } \log \text{ de } 1, \text{ o sea } 0,000 \ 00 \\ \text{réstese } \log 3,391 \ 93 \end{array} \quad \begin{array}{r} \log 0,000 \ 00 \\ \log 3,391 \ 93 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Diferencia} = 2,608 \ 07$$

Después de haber dicho en la columna de las décimas: 1 que llevo y 3 son 4; de 10 da 6, se añade: 1 que llevo y -3 son -2; -2 de 0 da +2.

$$4^\circ \text{ Multiplíquese por } 3 \log 4,902 \ 00 \quad \begin{array}{r} 4,902 \ 00 \\ 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Producto} = 10,706 \ 00$$

Después de haber dicho: 9 por 3 son 27, escribo 7 y llevo 2 se añade: -4 por 3 son -12, -12 y más 2 que llevo son -10.

$$5^\circ \text{ Divídase por } 2 \log 1,428 \ 46.$$

Se añade -1 a la característica para que sea divisible por 2; luego por compensación, se añade +1 a la mantisa, y se dice: la mitad de 2 es 1, la mitad de 14 es 7, la mitad de 2 es 1 Luego el cociente es 1,71423.

6º Calcúlese el logaritmo de la expresión

$$x = \frac{64 \times 0,0826 \times 16,57}{13,48 \times 0,0017 \times 9,467}$$

Cálculo del numerador. *Cálculo del denominador*

$$\begin{array}{r} \text{Log } 64 = 1,806 \ 18 \\ \text{Log } 0,0826 = 2,916 \ 98 \\ \text{Log } 16,57 = 1,219 \ 52 \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{Log } 13,48 = 1,129 \ 69 \\ \text{Log } 0,0017 = 3,230 \ 45 \\ \text{Log } 9,467 = 0,976 \ 21 \end{array}$$

$$\text{Total} = 1,942 \ 48$$

$$\text{Total} = 1,336 \ 35$$

$$\begin{array}{r} \text{Log del numerador} \quad 1,942 \ 48 \\ \text{Log del denominador} \quad 1,336 \ 35 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Diferencia} = 2,606 \ 13$$

$$\log x = 2,606 \ 13.$$

Luego,

603. Problema de aplicación.—*En una fábrica hay 127 mecheros que quedan encendidos 2 horas $\frac{3}{7}$ cada día, término medio, y por 187 días. Cada mechero consume 143 litros por hora, y el metro cúbico de gas vale \$ 0,37. Calcúlese el gasto por los 187 días, si se hace la rebaja de los $\frac{7}{123}$ del precio total.*

$$\begin{array}{r} \text{Un mechero consume por día} \quad \frac{143 \times 17}{7} \text{ litros, o } \frac{143 \times 17}{7000} \\ \text{metros cúbicos; en 187 días un mechero consumirá} \\ \frac{143 \times 17 \times 187}{7000} \text{ metros cúbicos, y 127 mecheros,} \\ \frac{143 \times 17 \times 187 \times 127}{7000} \end{array}$$

$$\text{El gasto será de } \$ \frac{143 \times 17 \times 187 \times 127 \times 0,37}{7000}$$

$$\text{Siendo la rebaja de } \frac{7}{123} \text{ el gasto será por lo tanto los } \frac{116}{123}$$

de número precedente, o sea:

$$\$ \frac{143 \times 17 \times 187 \times 127 \times 0,37 \times 116}{7000 \times 123}$$

$$\begin{array}{r} \text{Log } 143 = 2,155 \ 34 \\ \text{Log } 17 = 1,230 \ 45 \\ \text{Log } 187 = 2,271 \ 84 \\ \text{Log } 127 = 2,103 \ 80 \\ \text{Log } 0,37 = 1,568 \ 20 \\ \text{Log } 116 = 2,064 \ 46 \\ \hline \text{Total} = 9,394 \ 09 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Log } 7000 = 3,845 \ 10 \\ \text{Log } 123 = 2,089 \ 91 \\ \hline \text{Total} = 5,935 \ 01 \end{array}$$

$$\text{Diferencia} = 3,459 \ 08$$

El número correspondiente al log 3,459 08 es 2877,9.

Respuesta: El gasto es de \$ 2 787,9 por exceso.

§ III.—Interés compuesto

Una aplicación importante de los logaritmos es el cálculo de los *intereses compuestos*.

604. Definición.—*Interés compuesto* es el producido por el capital sumado con los intereses que se le van acumulando al fin de un período convenido.

Si uno presta, por ejemplo, \$ 1000 al 5% de interés compuesto, esta suma el primer año produce \$ 50 que no perciben entonces, sino que se *capitalizan* o acumulan al capital primitivo; de modo que éste, al principio del segundo año es de \$ 1050. En el segundo año este capital produce \$ 52,5 que se capitalizan de nuevo, y así sucesivamente, hasta el fin del tiempo estipulado.

605. Fórmula general.—Llamemos:

a un capital impuesto. 1
 r el interés anual de un peso, o sean $\frac{1}{100}$ del tanto por ciento, 100
 n el tiempo,

A el capital con sus intereses, o el monto.

Al fin del primer año 1 peso llega a valer $1 + r$, y a pesos valdrán $a(1 + r)$; de manera que para saber en qué se convierte un capital a con sus intereses capitalizados en un año, basta multiplicarlo por $(1 + r)$.

Luego al fin del segundo año, el capital con sus intereses valdrá:

$$a(1 + r)(1 + r) = a(1 + r)^2;$$

al fin del tercero $a(1 + r)^3$,
 y así sucesivamente.

Luego, después de n años, el valor A del capital con sus intereses compuestos será:

$$A = a(1 + r)^n. \quad (1)$$

606. Nota. Esta es la *fórmula general* de interés compuesto; contiene las cuatro cantidades variables:

A, a , n y r , cada una de las cuales puede determinarse, siendo conocidas las otras tres.

Para despejar la a hay que dividir ambos miembros por $(1+r)^n$, y resulta:

$$a = \frac{A}{(1+r)^n} \quad (2)$$

Para despejar la r , se dividirán por a ambos miembros de la ecuación (1) y se extraerá la raíz n^{mo} del cociente

$$1+r = \sqrt[n]{\frac{A}{a}}$$

dedonde

$$r = \sqrt[n]{\frac{A}{a}} - 1. \quad (3)$$

Para despejar la n , se emplean los logaritmos y se escribe:

$$\log A = \log a + n \log (1+r);$$

$$\text{de donde } n = \frac{\log A - \log a}{\log (1+r)}, \quad (4)$$

Todas estas fórmulas pueden calcularse por logaritmos. Cuando el logaritmo de $(1+r)$ ha de repetirse n veces (comprendiéndose n ordinariamente entre 1 y 100), conviene tomarlo con ocho o nueve decimales; pues, como en las tablas, la última cifra es solamente aproximada, el producto del log por n podría dar un error o diferencia considerable; entonces, después de multiplicado por n el log de $(1+r)$, no se conservan en el producto sino cinco o siete cifras decimales, según las tablas de que uno se ha servido, cuidando de aumentar por exceso una unidad a la última cifra, si la siguiente fuere mayor que 4.

Aplicaciones. 1º ¿Cuál es el monto de una suma de \$ 30 000, impuesta a interés compuesto durante 12 años, al 4,5 por ciento?

Valiéndose de la fórmula (1), se tendrá:

$$\begin{aligned} A &= 30\,000 (1,045)^{12}, \\ \log 30\,000 &= 4,477\,12 \\ + 12 \log 1,045 &= 0,229\,40 \\ \log A &= 4,706\,52 \end{aligned}$$

El número que corresponde al log 4,706 52 es 50 876,7

Luego: $A = \$ 50\,876,7$

2º ¿Qué cantidad se necesita imponer a interés compuesto para percibir, al cabo de 10 años, \$ 12 640 por capital e intereses, siendo 5 el tanto por ciento?

Empleando la fórmula (2), resultará:

$$\begin{aligned} a &= \frac{12\,640}{(1,05)^{10}}, \\ \log 12\,640 &= 4,101\,75, \\ 10 \log 1,05 &= 0,211\,89, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \log a &= 3,889\,86; \\ a &= \$ 7\,760 \end{aligned}$$

Hubiéramos podido encontrar la respuesta, dividiendo 12 640 por 1,628 894, valor de \$ 1 al cabo de 10 años, al 5% (Véase la tabla, pág. 367).

3º La suma de \$ 10 000 colocada a interés compuesto, durante 15 años, llega a valer \$ 20 360. ¿Cuál ha sido el tanto por ciento?

La fórmula (3) da

$$r = \sqrt[15]{\frac{20\,360}{10\,000}} - 1.$$

$$\begin{aligned} \log 20\,360 &= 4,308\,78, \\ \log 10\,000 &= 4,000\,00. \end{aligned}$$

Diferencia: 0,308 78.

El $\frac{1}{15}$ de 0,308 78 es 0,020 58, que corresponde a 1,049;

de donde $r = 0,049$, luego, el tanto por ciento es 4,90.

4º ¿En cuántos años un capital de \$ 40 000, colocado a interés compuesto llega a valer \$ 67 835,7 siendo 4,5 el tanto por 100?

La fórmula (4) da:

$$n = \frac{\log 67\,835,7 - \log 40\,000}{\log 1,045}$$

$$\log 67\,835,7 = 4,831\,46,$$

$$\log 40\,000 = 4,602\,06,$$

Diferencia: 0,229 40.

que se ha de dividir por 0,019 12, log de 1,045. El cociente es 12 años.

5º ¿En cuántos años se duplicará un capital colocados a interés compuesto, siendo 5 el tanto por ciento?

Si en la fórmula (1) se hace $A = 2a$, resulta:

$$2a = a(1+r)^n \text{ o bien } 2 = (1+r)^n$$

$$\log 2 = n \log (1+r).$$

de donde $n = \frac{\log 2}{\log 1,05} = \frac{0,301\,03}{0,021\,19}$

El cociente da algo más de 14 años.

TABLA

que indica el valor de \$ 1, o de 1 fr., o de £ 1, impuestos a interés compuesto al 2 1/2, 3, 3 1/2, 4, 5, 6, 7 y 8%, desde 1 año hasta 40.

Años.	2 1/2 0%	3 0%	3 1/2 0%	4 0%	5 0%	6 0%	7 0%	8 0%
1	1,025000	1,030000	1,035000	1,040000	1,050000	1,060000	1,070000	1,080000
2	1,050625	1,060900	1,071225	1,081600	1,092000	1,102300	1,112600	1,123000
3	1,076891	1,092727	1,108718	1,124864	1,141064	1,157319	1,173629	1,190000
4	1,103813	1,125509	1,147523	1,169859	1,215306	1,262477	1,310496	1,360489
5	1,131408	1,159274	1,187683	1,216653	1,276282	1,338226	1,402552	1,469328
6	1,159693	1,194052	1,229255	1,265319	1,340096	1,418519	1,500730	1,586874
7	1,188686	1,229874	1,272279	1,315932	1,407100	1,503630	1,605782	1,713824
8	1,218403	1,266770	1,316809	1,368569	1,477435	1,593848	1,718186	1,850930
9	1,248863	1,304773	1,362897	1,423312	1,531328	1,669479	1,828459	1,999005
10	1,280085	1,343916	1,410599	1,480244	1,628883	1,790848	1,967151	2,158923
11	1,312087	1,384234	1,459970	1,539454	1,710339	1,898299	2,104882	2,331639
12	1,344889	1,425761	1,511069	1,601032	1,793856	2,012197	2,252192	2,518170
13	1,378511	1,468534	1,563956	1,665074	1,885649	2,132928	2,409845	2,719024
14	1,412974	1,512590	1,618695	1,731676	1,979932	2,260904	2,578534	2,927194
15	1,448298	1,557967	1,675349	1,800944	2,078928	2,396538	2,759032	3,172169
16	1,484506	1,604706	1,733986	1,872981	2,182873	2,540252	2,952164	3,425943
17	1,521618	1,652843	1,794676	1,947901	2,292018	2,692773	3,158815	3,700018
18	1,559659	1,702433	1,857489	2,025817	2,406649	2,854339	3,379332	3,996020
19	1,598650	1,753506	1,922501	2,106849	2,526950	3,025600	3,616528	4,315701
20	1,638616	1,806111	1,989789	2,191123	2,653298	3,207136	3,869685	4,660057
21	1,679582	1,860253	2,059431	2,278768	2,785963	3,399564	4,140562	5,033834
22	1,721571	1,916103	2,131512	2,369919	2,925261	3,603537	4,430402	5,436540
23	1,764611	1,973587	2,206114	2,464716	3,071524	3,819750	4,740530	5,871664
24	1,808726	2,032794	2,283328	2,563304	3,223400	4,048935	5,072367	6,341481
25	1,853944	2,093778	2,363245	2,665830	3,386355	4,291871	5,427433	6,848475
26	1,900293	2,156501	2,445959	2,772470	3,555673	4,549383	5,807353	7,396353
27	1,947800	2,221289	2,531567	2,883369	3,733456	4,822346	6,213868	7,988062
28	1,996493	2,287928	2,620172	2,998703	3,920429	5,111687	6,648838	8,627106
29	2,046407	2,356566	2,711878	3,118651	4,116436	5,418388	7,114257	9,317275
30	2,097568	2,427262	2,806794	3,243398	4,321942	5,743491	7,612255	10,062657
31	2,150007	2,500080	2,905031	3,373133	4,538040	6,088101	8,145113	10,867669
32	2,203757	2,575083	3,006708	3,508059	4,764942	6,453387	8,715271	11,737083
33	2,258851	2,652335	3,111942	3,648331	5,003189	6,840590	9,325340	12,676090
34	2,315322	2,731905	3,220860	3,794316	5,253348	7,251025	9,978114	13,690134
35	2,373205	2,813862	3,333590	3,946089	5,516015	7,686087	10,676882	14,783344
36	2,432535	2,898278	3,450266	4,103933	5,791816	8,147252	11,423942	15,968172
37	2,493349	2,985227	3,571025	4,268090	6,081407	8,636087	12,222618	17,245626
38	2,555682	3,074783	3,696011	4,438813	6,385477	9,154252	13,079271	18,625276
39	2,619574	3,167027	3,825379	4,616366	6,704751	9,703508	13,994820	20,115298
40	2,685064	3,262038	3,959260	4,801021	7,039989	10,285748	14,974458	21,725822

Nota I. — De una vez se puede buscar en la tabla el monto de \$ 1 en el tiempo y al tanto dados, cuyo valor se multiplica por el capital señalado. El producto será el monto pedido. Restese de este último el capital dado, y la diferencia será el interés compuesto.

II. — Restando una unidad de cada número de la tabla, la diferencia indicará el interés compuesto de \$ 1, o de 1 fr., o de £ 1.

EJERCICIOS

Progresiones

1085. Búsquese el 36º término de la progresión $\div 1.4$
7.10...
1086. ¿Cuál es el 81º término de la progresión $\div 200.198$.
196.194...?
1087. Búsquese la suma de los términos de la progresión
 $\div 2.5.8.11\dots$, que tiene 54 términos.
1088. Calcúlese la suma de los 64 primeros números pares
2.4.6...
1089. ¿Cuál es el 8º término de una progresión geométrica,
si el primero es 4 y la razón 3?
1090. Se desea saber cuál es el primer término de una pro-
gresión geométrica cuya razón es 3, y 324 el quinto y últi-
mo término.
1091. El primer término de una progresión geométrica es
4, la razón 3, y el último término 324; ¿cuál es la suma de
los términos?
1092. Habiendo perdido 5 cents. un jugador en la primera
mano, quiso jugar otras cuatro, que perdió también, triplican-
do la apuesta en cada una; ¿cuánto perdió en la quinta mano?
1093. ¿Cuál es el 11º término de la progresión
 $\div 3 : 6 : 12 : 24\dots$?
1094. ¿Cuál es el 17º término de la progresión
 $\div 4096 : 2048 : 1024 : 512\dots$?
1095. Búsquese la suma de los diez primeros términos de
la progresión $\div 2 : 4 : 8 : 16\dots$
1096. ¿Cuál es la suma de los ocho primeros términos de la
progresión $\div 27 : 9 : 3\dots$?
1097. ¿Cuál es la suma de los términos de la progresión
 $\div 3 : 12 : 48\dots$, compuesta de 15 términos?
1098. Búsquese la suma de los términos de la progresión
 $\div 27 : 9 : 3\dots$ compuesta de 12 términos.
1099. Buscar los cuatro ángulos de un cuadrilátero, sabien-
do que dichos ángulos están en progresión geométrica, y que
el último es igual a 9 veces el segundo.
1100. Un rey de la India llamado Shehram, queriendo pre-
miar a Sessa-Ebn-Daher, inventor del ajedrez, le propuso que

él mismo escogiese su premio. Este le pidió la cantidad de granos de trigo que resultara poniendo en el primer cuadrado del tablero un grano, dos en el 2º, cuatro en el 3º, y así sucesivamente, duplicando siempre el número de granos para cada uno de los 64 cuadrados del tablero; preguntase qué número de granos resulta de este cálculo.

1101. Un avaro pregunta a un herrador cuánto le cobrará por herrar su bestia; el herrador le contesta que \$ 3 por las 4 herraduras; o que no le cobrará nada por las 2 primeras, si le paga 1 centavo por el primer clavo, 2 por el segundo, 4 por el tercero, y así sucesivamente, duplicando hasta los 16 que tienen las 2 herraduras. ¿Cuánto tendrá que pagar el avaro, si acepta esta última propuesta?

Logaritmos

1102. Búsquese en las tablas el log. de cada uno de los nú-
meros siguientes: 1º 520; 2º 146; 3º 1450; 4º 159; 5º 2034;
6º 16995; 7º 10724; 8º 3244; 9º 258,70; 10º 567521; 11º 5784;
12º 1296; 13º 6843; 14º 24647?

1103. ¿A qué número de las tablas corresponden los logarit-
mos siguientes: 1º 0.30103; 2º 4.60206; 3º 4.10175; 4º 0.49150;
5º 2.59461; 6º 5.69329; 7º 0.08849; 8º 2.54240; 9º 5.44556;
10º 2.51033; 11º 3.68596; 12º 4.55575; 13º 2.88395?

Ejecutar, por medio de los logaritmos, las operaciones si-
guientes:

1104. Multiplicar:

1º	976 por 27	4º	48 966 por 7 649
2º	697 por 34	5º	96 824 por 4 696
3º	8 386 por 57	6º	76 496 por 87 969

1105. Dividir:

1º	6 375 por 5	4º	11 440 por 572
2º	173 469 por 36	5º	28 968 por 213
3º	8 760 por 365	6º	6 536 por 8

1106. Elevar los números siguientes a la potencia indicada:

1º	1 868 ²	4º	2 158 ⁵
2º	43 805 ³	5º	1 528 ⁶
3º	1 238 ⁴	6º	6 769 ⁶

1107. Extraer de los números siguientes la raíz indicada:

1º	R. cuad. de 108 241	4º	R. quinta de 759 375
2º	R. cúb. de 571 787	5º	R. sexta de 117 649
3º	R. cuarta de 614 656	6º	R. octava de 65 536

Intereses compuestos

1108. ¿Cuál es el interés compuesto de \$ 8 000 durante 4 años, al 6% anual?
1109. ¿Cuánto valdrán \$ 24 000 impuestos a intereses compuestos durante 3 años, al 5%?
1110. Búsquese el monto y el interés compuesto de \$ 790,83 en 2 años 11 meses, al 7%.
1111. ¿Cuál es el interés compuesto de \$ 8 000 impuestos durante 4 años 4 meses, al 6% anual?
1112. ¿Cuánto importan \$ 1 000 al cabo de 3 años, impuestos al 5% de intereses compuestos?
1113. ¿Cuánto valdrán \$ 9 500 impuestos durante 2 años y 7 meses, al 6% de intereses compuestos por año?
1114. ¿Cuánto importan \$ 720 en 10 años 9 meses 4 días al 6% de interés compuesto?
1115. ¿Cuál es el interés compuesto de \$ 236 en 4 años 7 meses 6 días: 1º al 6%; 2º al 7%, 3º al 5%?
1116. ¿Cuánto importarán \$ 1 840 al 8% de intereses capitalizados cada seis meses: 1º al cabo de 4 años 1/2; 2º al cabo de 7 años 10 meses 20 días?
1117. ¿Cuál es el interés compuesto de \$ 1 400 en 10 años 3 meses, al 8% anual, pagaderos: 1º por trimestre; 2º por semestre?
1118. ¿Cuál es el capital que, impuesto al 5% de interés compuesto, valdrá \$ 1 183,77 en 5 años?
1119. ¿Cuál es el capital que, impuesto al 5% de interés compuesto durante 3 años, ha llegado a valer \$ 18 522?
1120. ¿Qué capital debe imponerse a interés compuesto, a razón del 6% por semestre, para que produzca \$ 857,25 en 15 años y medio, junto con los intereses?
1121. ¿Cuál es el capital que en 4 años, al 6% de interés compuesto, dará un monto de \$ 8 644,62?
1122. Al cabo de 10 años 5 meses un capital, impuesto al 6% de interés compuesto, importa \$ 26 772,96; ¿cuál es dicho capital?
1123. ¿A qué tanto % habrán de imponerse \$ 1 500 a intereses compuestos, para que valgan \$ 2 110,65 al cabo de 7 años?
1124. ¿A qué tanto % de interés compuesto será menester

imponer \$ 800 para que valgan: 1º \$ 1 280,81 en 12 años; 2º 1 560 en 17 1/2 años?

1125. ¿A qué tanto % será menester imponer a interés compuesto \$ 12 500 para que den un monto: 1º de \$ 39 485,18 en 17 años; 2º de \$ 39 652,115 en 15 años?
1126. ¿Dentro de cuánto tiempo valdrá \$ 25 299,67 la suma de \$ 5 428, impuesta al 8% de interés compuesto?
1127. ¿Al cabo de cuántos años importará \$ 2 560,82 la suma de \$ 1 600, impuesta al 4% de interés compuesto?
1128. ¿Al cabo de qué tiempo se triplicará cualquier suma: 1º al 4% y 2º al 7% de interés compuesto?
1129. ¿Durante cuánto tiempo deberá quedar impuesta la suma de \$ 2 685 para producir un monto compuesto de \$ 5 956,13: 1º al 5%; 2º al 6% 3º al 7%?
1130. ¿Cuál es el valor actual de \$ 62 500, debidos dentro de 16 años, al 9% de interés compuesto pagadero anualmente?
1131. Para saldar una cuenta de \$ 8 160, de un negociante una letra de cambio de \$ 10 285,31, pagaderos dentro de 5 años, con los intereses compuestos al 6%; cuánto debe todavía al contado?
1132. Dentro de 3 años deben pagarse \$ 450 por 75 metros de raso de 4/5 de metro de ancho; ¿cuánto se debería pagar al cabo de 5 años por 60 metros de raso de la misma calidad, pero de 5/6 de metro de ancho, calculándose el interés compuesto al 6%?
1133. ¿Qué tiempo será menester para que una suma impuesta a intereses compuestos al 4%, 5% y 6% reciba un aumento de la mitad de su valor?
1134. ¿Cuál es el capital que, colocado a intereses compuestos, durante 10 años al 5%, llega a valer \$ 12 640?
1135. Un capital de \$ 40 000, colocado al 4,5% de intereses compuestos, importa \$ 67 835,70; ¿durante cuántos años ha quedado impuesto?
1136. ¿A qué tanto ha sido impuesta una suma de \$ 10 000, si después de 15 años de imposición ha llegado a importar \$ 20 360?
1137. Se impone al 4% de interés compuesto, durante 25 años, la suma de \$ 5 000. ¿Durante cuánto tiempo debería imponerse la misma suma, al 5% de interés simple, para que reciba el mismo aumento que en el 1º caso? mo, fue el de los Francos que se habían estableci-

PROBLEMAS DE REPASO

OPERACIONES FUNDAMENTALES

1138. Tres jugadores convienen en que el que pierda una mano tendrá que duplicar el dinero de los otros dos. Juegan 3 manos, y cada uno pierde una; entonces tienen respectivamente \$ 60, \$ 28 y \$ 16. ¿Cuánto tenían al empezar el juego?

1139. Hállense tres números, sabiendo que la suma de los dos primeros es de 45; la del primero y del tercero es de 50, y la de los dos últimos, de 55.

1140. Tres bolsas encierran dinero; las dos primeras tienen juntas \$ 795; la 1ª y la 3ª, \$ 851; en fin la 2ª y la 3ª, \$ 1 012. ¿Cuánto hay en cada bolsa?

1141. Una suma se ha repartido entre 4 personas; la parte de la 1ª más la de la 2ª vale \$ 2 690,40; la de la 2ª y de la 3ª, \$ 3 090,45; la de la 3ª y de la 4ª \$ 3 319,60; en fin la de la 2ª y de la 4ª, \$ 3 189,95. Dígase la suma repartida y cuánto le toca a cada persona.

1142. Tres cajones de un mueble encierran dinero: en los dos primeros juntos hay \$ 8 023; en el 1º y 3º \$ 9 134; en el 2º y 3º 10 245. Dígase la cantidad que hay en cada cajón.

1143. Por el trabajo de 90 días se promete a un obrero \$ 120 y un vestido. Al cabo de 60 días su patrón le despide dándole \$ 120, sin el vestido. Calcúlese el valor de este vestido.

1144. Al tomar un criado, Fulgencio le promete, por un año, \$ 240 y una bicicleta; al cabo de 8 meses, el amo despide al criado, remitiéndole \$ 120 y la bicicleta. Hállese el precio de ésta.

1145. Un empresario tiene dos operarios a quienes paga el mismo jornal. Al cabo de 56 días, da al primero 4 costales de maíz y \$ 57; al segundo, 7½ costales y \$ 69 por 84 días. ¿A cómo sale el costal de maíz?

1146. Un mercader compra 15 bueyes y 20 carneros por \$ 6 800. Si hubiera comprado 20 bueyes y 15 carneros, habría gastado \$ 8 600. Dígase el precio de un buey y el de un carnero.

1147. Un mercader compra 18 caballos y 14 bueyes en \$ 15 000; otra vez, 12 caballos y 26 bueyes, al mismo precio que los primeros, y paga también \$ 15 000. ¿A cómo le sale un buey y un caballo?

1148. Por 12 jornales de obreros y 7 de aprendiz se pagan \$ 109 25; por 11 jornales del obrero y 6 del aprendiz se pagan \$ 99. Calcúlese el jornal del obrero y el del aprendiz.

1149. Un labrador vende 10 hectolitros de trigo y 8 hectolitros de maíz en \$ 198. Si hubiera vendido 20 hl. de trigo y 4 hl. de maíz, habría recibido \$ 324. Calcúlese a cómo se ha vendido el hectolitro de trigo y el de maíz.

1150. Donato emplea a dos obreros, el primero de los cuales recibe un jornal doble del segundo. Por 12 jornales se da al primero \$ 40 y 10 libras de café; por 9 jornales, el segundo recibe \$ 16,40 y 2 libras de café. Calcúlese el valor de una libra de café.

1151. Queriendo hacer tres vestidos, un sastre compró una pieza de paño y otra de tela para forrar. El primero necesitó 4 m. de paño y 4 de forro; el segundo, 3 m. de paño y 2 de forro. Sabiendo que el valor del primero es de \$ 69,40 y el del segundo \$ 49,60, calcúlese el precio del tercer vestido, si se emplean 5 m. de paño y 4 m. de forro.

1152. Un negociante pagó una primera vez \$ 2 038 por 125 m. de paño y 80 m. de tela; otra vez, por 10 m. de paño cuyo ancho era los 7/5 de la 1ª, dio \$ 66,40 más que por 18 m. de tela de ancho doble de la 1ª. Calcúlese el precio del metro de paño y del metro de tela de cada calidad.

1153. Una persona compra 10 m. de terciopelo y 12 de seda por \$ 93,04 con 2% de descuento. Otra vez, 4 m. de terciopelo y 6 m. de seda de la misma calidad, por \$ 40,80 con 4% de descuento. Calcúlese el precio del metro de terciopelo y de seda.

1154. Un profesor propone 16 problemas a su discípulo y le promete 5 vales por cada respuesta exacta, con la condición que el alumno dará al maestro 3 vales por cada respuesta errada. Sabiendo que no se deben nada recíprocamente, dígase el número de problemas en que acertó el alumno.

1155. Un obrero ha trabajado 30 días con dos empresarios:

el primero le ha dado \$ 2 diarios, y el segundo, \$ 2,50; las dos cantidades sumadas dan \$ 66. ¿Cuántos días trabajó con cada empresario?

1156. Juanito tiene 46 vales en las manos, 8 más en la derecha que en la izquierda; cuántos tiene en cada mano?

1157. En un colegio hay dos categorías de alumnos. Los unos pagan \$ 2,5 diarios, y los demás \$ 1,25. El número de alumnos de la segunda categoría pasa de 11 al de la primera; sabiendo además que el director del colegio ha recibido \$ 115 por un día, dígame el número total de alumnos.

1158. Para hacer una saya y un peinador, una señora compra géneros de dos calidades: en \$ 3,50 el metro para la saya, y en \$ 2 para el peinador. Sabiendo que ha pagado \$ 76,50, y que ha comprado 3 metros más para la saya, calcúlese el número de metros comprados para la saya y para el peinador.

1159. Un comerciante en vinos compra 78 hl. 60 de cierta calidad y 104 hl. 50 de otra por \$ 5 761,75. Sabiendo que un hectolitro de la segunda calidad vale \$ 5,20 más que un hectolitro de la primera, calcúlese: 1º el precio del hectolitro de cada calidad; 2º el beneficio que realizará el comerciante al vender el todo en \$ 35 el hectolitro.

1160. La distancia que media entre dos ciudades A y B es de 225 kilómetros. En A, los 100 kg. de hulla valen \$ 3,75, y en B, \$ 4,25; hállese entre A y B un punto en que la hulla cueste el mismo precio, que venga de A o de B, sabiendo que el acarreo de una tonelada importa \$ 0,08 cada kilómetro.

1161. Un maestro quiere premiar a algunos de sus alumnos: si da 5 vales a cada uno, le faltarán 3; si les da 4 vales a cada uno, le sobrarán 7. Dígame el número de vales y el número de alumnos.

1162. Catalina quiere dar limosna a unos pobres: dándoles \$ 0,50 a cada uno, le sobran \$ 0,10; y dándoles \$ 0,07, le faltan \$ 0,16. Dígame el número de pobres y la suma que esta persona quiere repartirles.

1163. Fulgencio queriendo comprar una hacienda, pide a sus deudores la suma necesaria. Si de cada uno recibiese \$ 1 250, le faltarían \$ 10 000; recibiendo \$ 1 600, le sobrarían \$ 1 200. Calcúlese el número de deudores, y cuánto debe darle cada uno.

1164. Eusebio habiendo cesado sus pagos, sus acreedores no pueden conseguir sino los 31%. Si Eusebio tuviera \$ 5 000 más, podría pagar los 4/7 de lo que debe. Dígame su activo y su pasivo.

1165. Al revender una pieza de género en \$ 2 los 2/3 de metro. Donato gana \$ 19,5; pero revendiéndola en \$ 1,75 los 5/6 de metro, pierde \$ 9,75. Calcúlese la longitud de la pieza y el precio de compra de un metro.

1166. Para pagar una deuda, Raimundo pide una misma suma a cada uno de sus deudores. Si cada uno le diese \$ 1 520, le faltarían todavía \$ 3 110; y si cada uno le diese \$ 1 715, le sobrarían \$ 205. Hállese a cuánto alcanza la deuda y el número de deudores.

1167. Para subir una pendiente ando 3 km. por hora, y 6 para bajar. Sabiendo que para subir y bajar he gastado 1 1/2 hora, dígame a qué distancia he ido.

1168. Para ir a una aldea, Pedro anda 6 km. por hora, y 5 km. para volver. Sabiendo que para ir y volver ha gastado 4 horas; calcúlese la distancia de la aldea.

1169. Dos trenes salen a las 3 de la tarde de dos ciudades A y B distantes de 100 km. y andan el uno hacia el otro. El primero que sale de A anda 30 km. por hora, el otro, 20 km. Dígame: 1º dentro de cuánto tiempo se encontrarán 2º A qué distancia estarán del punto de partida; 3º la hora que será.

1170. Para ir de París a Niza un tren necesita 15 h. 40 m.; otro tren necesita 22 h. 20 m. para ir de Niza a París. En una hora el primero recorre 18 km. 1/2 más que el segundo. Calcular: 1º la velocidad de cada uno de estos trenes; 2º la distancia de París a Niza; 3º la hora de su encuentro, si salen a las 6 de la tarde, el uno de París y el otro de Niza.

1171. Dos trenes salen de dos ciudades A y B, distantes de 190 km. y van a su encuentro. El de A anda 30 km. por hora, y el de B, que sale 2 h. antes, anda sólo 20. ¿Dentro de cuánto tiempo se cruzarán, y a qué distancia de B?

1172. Dígame el precio de compra de una mercadería que, vendida, en \$ 600, da 1º 20% de beneficio sobre el precio de compra; 2º 20% de beneficio sobre el precio de venta.

1173. Un negociante ha comprado 12 piezas de paño de 40 metros cada una, en \$ 11 el metro, y al vender el todo quiere sacar un beneficio de 20% sobre el precio de compra. Después de haber vendido 230 m. en \$ 12,5 el metro, ¿a cómo tiene que vender el metro de lo que le queda para que

1174. Leoncio ha comprado 12 volúmenes marcados \$ 2,60. Sabiendo que le han hecho un 15% de descuento y que le resulte un 20% del beneficio total, y cuál será el beneficio por ciento en el precio de venta?

han dado un ejemplar gratuitamente, calcúlese el precio de compra de un volumen; ¿cuánto se ganará vendiendo el ejemplar al precio de catálogo?

1175. Un cuchillero ha comprado al por mayor 144 docenas de cuchillos que ha vendido en \$ 4536. Si no los hubiera vendido más que en \$ 4032,40 habría ganado en 12,5% sobre el precio de compra. Calcúlese a cómo se compró la docena, y el beneficio realizado.

1176. Teresa fabrica medias de lana que vende a \$ 0,65 el par; el kilogramo de lana le cuesta \$ 0,75, y 17 pares pesan 2 kg. 657. Pregúntase lo que gana por par de medias y lo que habrá ganado al cabo de 3 años $1/2$, sabiendo que fabrica 9 pares cada dos semanas.

1177. Una mercadera hace fabricar 5 docenas $1/2$ de camisas con una tela que vale \$ 0,65 el metro. Se necesitan 7 m. 20 para hacer 4 camisas, y se paga a la costurera \$ 2,50 por 6 días de trabajo. Sabiendo que la obrera fabrica 9 camisas cada 7 días, dígame lo que cuestan las 5 docenas $1/2$ de camisas, y en cuánto habría de venderlas para hacer un beneficio total de \$ 10,80.

1178. Una máquina de vapor que trabaja día y noche ha necesitado 851 050 kg. de hulla por 103 días. Por medio de un perfeccionamiento se ha alcanzado, dando la máquina la misma fuerza, el no quemar sino 2860 kg. por 37 horas. Calcúlese a cuánto alcanza la economía anual en carbón, supuesto de 330 días el trabajo, y de \$ 3,75 los 100 kg. el precio del carbón.

1179. Fernández ha vendido en \$ 1800 cierta cantidad de arroz que había comprado en \$ 800. Dígame el número de hectolitros, sabiendo que el beneficio ha resultado de \$ 0,65 por 100 kg. y que el hectolitro pesa 75 kg.

1180. Por \$ 600 se han comprado 138 m. de paño. ¿Cuántos metros de otra calidad superior se podrían comprar por la misma suma, si 3 m. de esta calidad valen tanto como 5 de aquella?

1181. Eusebio compra una cesta de manzanas y otra de peras. Sabiendo que cada cesta contiene el mismo número de frutos, y que las manzanas cuestan \$ 1,50 menos que las peras, calcúlese el número de manzanas y de peras, si 7 manzanas y 5 peras valen \$ 0,70, y si 5 peras importan tanto como 7 manzanas.

1182. Manuel que dispone de \$ 15.000, compra 26 bueyes en \$ 80 cada uno, y 15 caballos en \$ 90 cada uno. Dígame lo

que le quedaría después de haber comprado el mayor número posible de carneros en \$ 15 cada uno?

1183. Raimundo compra libros por una suma de \$ 115; al venderlos por \$ 161 resulta un beneficio de \$ 6 por docena. Dígame el número de libros comprados y a cómo el volumen.

1184. Un comerciante quiere ganar un 12% sobre las mercaderías que compra. ¿En cuánto tendrá que vender una pieza de 60 m. que compró en \$ 15 el metro, sabiendo que su comisionista tiene un 6% sobre las sumas que cobra?

FRACCIONES

1185. Tres obreros deben hacer un foso: el 1º y el 2º lo harían en 1 día $5/7$; el 2º y el 3º, en 2 días $2/9$; el 1º y el 3º en 1 día $7/8$. Dígame el tiempo que cada obrero necesitaría para hacer solo el trabajo.

1186. Cuatro peones se han comprometido a hacer un trabajo: el 1º, el 2º y el 3º lo harían juntos en 1 día $2/3$; el 2º, el 3º y el 4º en 2 días $1/7$; el 3º, el 4º y el 1º en 1 día $14/15$; el 4º, el 2º y el 1º en 1 día $9/11$. Hállese el tiempo que necesitaría cada peón para hacer solo el trabajo.

1187. Un galgo persigue una liebre que lleva 90 saltos de adelanto. Sabiendo que da 7 saltos mientras que la liebre da 6, y que 4 de la liebre valen 3 del galgo, dígame después de cuántos saltos el galgo habrá alcanzado la liebre.

1188. Dos morteros arrojan bombas en una ciudad: el 1º ha arrojado 36 antes que el 2º haya disparado, y arroja 8 mientras el 2º arroja 7, pero éste gasta en 3 descargas la misma cantidad de pólvora que el 1º en 4. Calcúlese el número de bombas que debe arrojar el 2º mortero para gastar la misma cantidad de pólvora que el 1º.

1189. Las dos manecillas de un reloj señalan mediodía; ¿a qué hora volverán a encontrarse, y cuántas veces en 12 horas?

1190. Es mediodía; ¿a qué hora las manecillas de un reloj se hallarán en línea recta?

1191. Un reloj de bolsillo tiene tres manecillas, y señala mediodía; ¿a qué hora la saetilla de los segundos encontrará 1º la de las horas, 2º la de los minutos?

1192. He comprado por \$ 4,20, una cesta con 100 peras y manzanas, y hay $1/2$ más manzanas que peras. Al venderlas ha resultado un beneficio de 10%; dígame a cómo he

vendido cada fruto, sabiendo que una pera se vendió sólo en los $\frac{2}{3}$ del precio de una manzana.

1193. Una bomba puede vaciar un baño en 7 horas $\frac{1}{2}$; otra lo vaciaría en 5 horas; ¿cuánto tiempo necesitarán juntas?

1194. Un trabajo puede hacerse en 2 horas $\frac{6}{7}$ por una persona, y en 1 hora $\frac{6}{11}$ por otra. Calcúlese el tiempo que estas personas necesitarían, trabajando juntas, para acabar una obra 3 veces más difícil.

1195. Un obrero puede hacer los $\frac{2}{3}$ de un trabajo en 7 días, trabajando 5 horas por día; otro obrero haría los $\frac{3}{5}$ en 8 días, trabajando 8 horas por día. ¿Cuántos días necesitarán los dos obreros, si trabajan 6 horas por día?

1196. Un propietario se dirige a tres empresarios para la ejecución de una obra: los operarios del primero harían el trabajo en 10 días $\frac{5}{12}$; los del segundo, en 15 días; los del tercero en 18 días $\frac{3}{4}$. En el supuesto de que se emplee la mitad del primer grupo, $\frac{1}{3}$ del segundo y $\frac{1}{4}$ del tercero, dígase el tiempo que necesitarían, trabajando juntos, para ejecutar la obra proyectada.

1197. Una fuente llenaría un baño en 3 horas $\frac{1}{2}$, otra en 2 horas $\frac{1}{7}$, y una tercera en 4 horas $\frac{1}{3}$. Cuando juntas hayan llenado el baño, ¿qué fracción de éste habrá llenado cada una?

1198. Un aljibe lleno de agua puede vaciarse por medio de dos llaves A y B, la primera colocada en el fondo, y la segunda a media altura. La llave A vaciaría el aljibe en 6 horas, y la llave B, vaciaría en 4 horas el agua que está encima de ella. Si se abren simultáneamente las dos llaves, dígase el tiempo que necesitarán para vaciar el aljibe.

1199. Tres grifos pueden llenar un baño: el 1º en 12 horas; el 2º en 10 horas; el 3º en 8 horas; un cuarto puede vaciarlo en 6 horas. Calcular: 1º la fracción del baño llenada en 1 hora estando abiertos los 4 grifos; 2º dentro de cuánto tiempo estará lleno el baño.

1200. Un aljibe está lleno de agua: sabiendo que un 1º grifo puede vaciarlo en 2 h. $\frac{1}{3}$, un 2º en 3 h. $\frac{1}{4}$, y un 3º en 5 horas, y que un 4º puede vaciarlo en $\frac{1}{2}$ hora, dígase el tiempo necesario para vaciar el aljibe si se abren los 4 grifos.

1201. Una fuente puede llenar un baño en 7 horas, y una llave puede vaciarlo en 11 horas. Estando ya lleno el $\frac{1}{3}$ del baño, se abre la fuente y la llave. ¿Al cabo de cuántas horas estaría lleno el baño hasta los $\frac{3}{4}$?

1202. Dos fuentes llenan un baño, la 1ª en 2 h. $\frac{3}{4}$, y la 2ª en 1 h. $\frac{2}{3}$; una bomba vacía 40 litros por minuto. Estando lleno $\frac{1}{3}$ del baño, se hacen funcionar 1 h. $\frac{1}{4}$ las dos fuentes y la bomba; al cabo de este tiempo el baño queda lleno hasta los $\frac{7}{9}$. Dígase su capacidad en litros.

1203. Dos operarios emplearían 3 días para hacer un trabajo. Después de un día, el 2º operario sigue solo y necesita 6 días para acabar el trabajo. Calcúlese el tiempo que necesitaría cada operario trabajando solo, para hacer todo el trabajo.

1204. Dos fuentes juntas llenarían un aljibe en 15 horas; la 1ª sola lo llenaría en 23 h. Calcúlese el tiempo que necesitaría la 2ª.

1205. Una madre y su hija trabajan en un bordado; juntas lo acabarían en 15 días. Después de haber trabajado juntas 6 días, la hija acaba sola la obra en 30 días. ¿Cuánto tiempo hubiera necesitado cada una de esas personas, trabajando separadamente?

1206. Fabriciano trabajando solo haría una obra en 13 días $\frac{1}{3}$; trabajaba en ella desde 3 días $\frac{1}{5}$ cuando se le dio un compañero que tenía $\frac{1}{9}$ más de habilidad. Habiendo importado el trabajo \$ 56,76. ¿a cómo le sale a cada uno?

1207. Dos obreros se ofrecen para desmontar un campo. El 1º lo haría solo en 12 días $\frac{1}{2}$; el 2º, en 10 días. Empiezan el trabajo juntos, pero al cabo de 2 días $\frac{1}{2}$ el 1º no puede trabajar sino los $\frac{3}{4}$ del tiempo del día. Dígase cuándo se acabará el desmonte.

1208. Una pelota elástica rebota hasta una altura que es los $\frac{2}{9}$ de la de donde ha caído; después de haber rebotado 4 veces, sube hasta 1 decímetro. ¿De qué altura ha caído esta pelota?

1209. ¿De qué altura se ha dejado caer una pelota que, después de tocar 5 veces el suelo, rebota a una altura igual a 0^m80 ? Se admite que, después de cada caída, la pelota rebota hasta los $\frac{4}{5}$ de la altura de que cayó.

1210. Paquito tiene un litro de vino: vierte la mitad y la reemplaza por agua; luego vierte la mitad de la mezcla y llena otra vez la botella con agua. Después de haber hecho lo mismo por tercera vez, dígase la cantidad de vino que queda todavía en la botella.

1211. Fulgencio ha vendido sucesivamente los $\frac{2}{5}$ de una cesta de naranjas, en seguida la $\frac{1}{2}$ del resto y los $\frac{2}{3}$ del

nuevo resto. Si quedan todavía 15 naranjas, dígase el número que había en la cesta.

1212. Doroteo ha vendido los $\frac{3}{4}$ de una pieza de género, y luego los $\frac{2}{3}$ del resto. En el supuesto de que el retal sea de 2m45, que se venden por \$ 35, calcúlese la longitud de la pieza y en cuánto se vendió, según el precio del retal.

1213. Una herencia se reparte del modo siguiente: la 1ª persona recibe $\frac{1}{3}$, la 2ª $\frac{1}{4}$ del resto y la 3ª $\frac{1}{5}$ de lo que queda todavía. Dígase la parte que cabe a cada persona, sabiendo que a la 4ª le cupo la suma de \$ 30 000, que representan la suma que sobró después de haber servido a las tres primeras personas.

1214. Sebastián en un primer año, aumenta su hacienda de $\frac{1}{3}$ de lo que era; al fin del segundo año queda aumentada de $\frac{1}{4}$ de lo que ha llegado a ser al cabo del primero; en fin, después de un tercer año la aumenta de $\frac{1}{5}$ de lo que era al cabo de los dos primeros. Si tiene entonces \$ 57 800, dígase su hacienda al principio del primer año.

1215. En 5 años un comerciante ha economizado \$ 54 000. Sabiendo que el 2º año economiza $\frac{2}{9}$ más que el 1º año; el 3er. año \$ 12 855; el 4º año $\frac{1}{11}$ menos que el 2º; y en fin el 5º año tanto como el 2º, más \$ 115; dígase lo que ha economizado cada año.

1216. Un padre de familia gasta $\frac{1}{5}$ de su rédito anual para su alojamiento, los $\frac{3}{8}$ del resto para la manutención de la familia; los $\frac{2}{5}$ del nuevo resto para sus vestidos, y los $\frac{2}{3}$ de lo que le queda para la instrucción de sus hijos; en fin $\frac{1}{4}$ de lo que le queda todavía para gastos imprevistos. Sabiendo que sus economías al fin del año son de \$ 975, calcúlese su rédito anual, y dígase el presupuesto de sus gastos.

1217. Se ha repartido una suma entre 4 personas: la 1ª ha recibido $\frac{1}{5}$ de esta suma; la 2ª los $\frac{4}{9}$ del resto; la 3ª los $\frac{2}{5}$ del segundo resto, y la 4ª \$ 2 400 que representan el último resto. Dígase cuál fue la suma repartida, y cuál la que cupo a cada persona.

1218. Una herencia se repartió del modo siguiente: el 1º heredero recibió \$ 2 400 y $\frac{1}{4}$ del resto; el 2º \$ 2 850 y $\frac{1}{3}$ del resto; el 3º, \$ 4 506 y la $\frac{1}{2}$ del resto; los \$ 5 097 que representaban el último resto se dieron a un hospicio. Calcúlese qué suma representa la herencia, y lo que recibió cada heredero.

1219. Dos personas tienen juntas \$ 100; la $\frac{1}{2}$ de lo que

tiene la primera vale tanto como $\frac{1}{3}$ de lo de la segunda; ¿cuál es la suma que tiene cada persona?

1220. Dos obreros economizan el uno $\frac{1}{3}$, y el otro $\frac{1}{4}$ de su salario. Al cabo de un año sus economías juntas alcanzan a \$ 400. Calcúlese lo que ha ganado cada uno en el año, si sus jornales juntos alcanzan a \$ 1 350.

1221. Dos empleados han recibido juntos \$ 6 600 por un año. El 1º ha gastado los $\frac{2}{3}$ de lo que ha ganado; el 2º, los $\frac{3}{4}$; a los dos juntos les queda todavía \$ 1 965. Calcúlese lo que cada uno gana en un año.

1222. Un castillo sitiado está defendido por 500 hombres que tienen víveres para 90 días; después de 25 días de sitio ejecutan una salida que no tiene buen éxito, y en la cual las bajas alcanzan el número de 75. Pensando entonces que el sitio durará 100 días, ¿qué habrá de ser en adelante la ración de cada soldado?

1223. Dionisio reparte entre sus discípulos, y sin dividirlos, cierto número de naranjas, del modo siguiente: al 1º da $\frac{1}{4}$ del número total menos $\frac{1}{4}$ de naranja; al 2º da $\frac{1}{7}$ del número total más $\frac{3}{7}$ de naranja; al 3º, $\frac{1}{6}$ del número total menos $\frac{1}{6}$ de naranja; entonces le quedan 11 naranjas. ¿Cuántas tenía Dionisio al principio, y cuántas ha recibido cada alumno?

1224. Cirilo reparte entre tres pobres y sin cortarlas, una cesta de manzanas: al primero da $\frac{1}{4}$ del número más $\frac{3}{4}$ de manzana; al 2º los $\frac{2}{5}$ del número más $\frac{2}{5}$ de manzana; el 3º recibe las dos manzanas que quedan. Dígase el número de manzanas repartidas y cuántas recibió cada pobre.

1225. Gabriel ha comprado dos caballos por \$ 980; sabiendo que el precio del primero es los $\frac{3}{4}$ del precio del segundo, dígase su precio respectivo.

1226. Una casa se puede vender por \$ 1 000; pero esta suma no representa más que los $\frac{4}{5}$ del valor que tendría la casa si fuese restaurada. Sabiendo que los gastos para ello alcanzan \$ 150, dígase si hay ventaja en hacerlos.

1227. Dígase la fracción que se debe restar de $\frac{37}{48}$ para que la fracción que resulte no sea más que los $\frac{2}{15}$ de la mitad de $\frac{3}{4}$.

1228. ¿Qué hora es cuando las dos manecillas de un reloj están superpuestas entre las 8 y las 9?

1229. Los $\frac{3}{4}$ del menor de dos números igualan a $\frac{3}{4}$, y

los $\frac{3}{4}$ de su diferencia igualan a $\frac{3}{14}$. Calcúlese el número mayor.

1230. Un viajero habiendo perdido la diligencia, toma un automóvil que recorre 3 leguas $\frac{1}{7}$ por hora, mientras que la diligencia no recorre más que 1 legua $\frac{3}{5}$ en $\frac{3}{4}$ de hora. Lleva $\frac{1}{2}$ hora de adelanto, calcúlese cuánto tiempo le necesitará el automóvil para alcanzarla. Se tomará la legua igual a 4 km.

1231. Después de haber perdido sucesivamente los $\frac{3}{8}$ de su hacienda, $\frac{1}{9}$ del resto y los $\frac{5}{12}$ del nuevo resto, una persona hereda \$ 60 800; de este modo, la pérdida se halla reducida a la mitad de la fortuna primitiva. ¿Cuál era aquella fortuna?

1232. Una suma se reparte entre 3 personas del modo siguiente: la parte de la 1ª es los $\frac{2}{5}$ de la segunda; la parte de la 3ª es $\frac{1}{4}$ del conjunto de las partes de las otras dos, y es igual a \$ 2 000. Calcúlese la suma repartida y las partes.

1233. Un grupo de obreros, compuesto de 15 hombres, 12 mujeres y 8 niños trabajando juntos ha recibido \$ 968. Repartir esta suma entre los hombres, las mujeres y los niños, sabiendo que la parte de un niño es los $\frac{5}{12}$ de la de una mujer; y la de una mujer, los $\frac{12}{25}$ de la parte de un hombre y de un niño juntos.

1234. El tiempo de la infancia de Diofante representa la sexta parte de su vida; el de la adolescencia, la duodécima parte; el de su matrimonio, la séptima parte más 5 años antes de tener un hijo a quien sobrevivió de 4 años. Sabiendo que este hijo no alcanzó sino la mitad de la edad que alcanzó su padre, dígame la edad que tenía Diofante cuando murió.

1235. Tres personas han heredado una suma: la herencia de la 1ª es de \$ 7 500, y esta suma es los $\frac{4}{11}$ de la segunda; lo que cabe a la 3ª es los $\frac{5}{6}$ de lo que tienen juntas las dos primeras. Calcular la suma que le sale a la 2ª persona y a la 3ª.

1236. Dos personas tienen juntas \$ 18 300; habiendo gastado la primera los $\frac{2}{5}$ de su fortuna, y la segunda los $\frac{3}{7}$ de la suya, queda a la primera dos veces más que a la segunda. Dígame lo que tenía cada una al principio.

SISTEMA METRICO

1237. La distancia recorrida por un ciclista es tal que la rueda menor ha dado 1 500 vueltas más que la mayor. Sabiendo que las circunferencias de las ruedas son entre sí como 5 es a 6, y que la circunferencia de la menor tiene 1 m. $\frac{2}{3}$, calcúlese la distancia recorrida.

1238. Dos personas A y B separadas por una distancia de 3 600 m. salen a la misma hora y van al encuentro una de otra. El encuentro ocurre a los 2 000 m. de uno de los puntos de partida. Si, con las mismas velocidades, la persona que anda más despacio hubiera salido 6 minutos antes que la otra, el encuentro habría ocurrido en el punto medio del camino. Dígame, en metros y por minuto, el camino recorrido por cada persona.

1239. Una pieza de género se compra por \$ 404,70; al revender $\frac{1}{3}$ al precio de compra, y lo demás con un beneficio de \$ 1,25 por metro resulta una suma de \$ 440,20. Calcúlese la longitud de la pieza y el precio de compra de un metro.

1240. Bernardo recorre, a bicicleta y por día, 96 km., término medio; habiéndole sucedido una desgracia, ha tenido que acabar su viaje a pie, recorriendo sólo 32 km. por día, y sin embargo ha llegado al término en el tiempo de que disponía. ¿Cuál es el espacio recorrido, sabiendo que si hubiera andado a bicicleta habría podido recorrer 384 km. más que el número que debía recorrer, y que si, al contrario, hubiera andado a pie se habría quedado a 576 km. atrás del término.

1241. Para ir de una ciudad a otra, las ruedas menores de un coche dan 1 200 vueltas más que las mayores. Siendo las circunferencias de las ruedas respectivamente de $2^m 6$ y de $3^m 4$, ¿cuál es la distancia de las dos ciudades?

1242. Un terreno medido con un metro al cual faltaban 2 cm., se encontró de 125 áreas. Dígame en m^2 la superficie exacta.

1243. Una persona ha comprado 25 m. de género a \$ 2,25 el metro; pero el metro con que se midió se halló de sólo 988 mm. Calcúlese la pérdida de esta persona, en género y en dinero.

1244. Un sastre compró una pieza de género a \$ 5,50 el metro; pero al llegar a su casa halló que el metro con que se había medido era demasiado corto. Entonces sacó la cuenta, y en vez de pagar \$ 495, pagó sólo \$ 475,20. Dígame cuánto faltaba al metro.

1245. Una persona compra dos propiedades: la superficie de la 1ª es a la de la 2ª como 7 es a 21; pero $25 m^2$ de la 1ª valen tanto como un área de la 2ª. Calcúlese el precio del área de cada propiedad, sabiendo que su superficie total es de $4^ha 32^a 16^ca$, y que se han comprado juntas en \$ 15 125,60

1246. Una propiedad se dividió en 3 partes iguales: la 1ª comprende una porción de $25^m 60$ por $37^m 75$; la 2ª otra porción de $17^m 20$ por $35^m 5$, más otra porción de un campo; la 3ª comprende lo que quedó de este último campo. Dígase la superficie de éste.

1247. Por una propiedad se pagó \$ 185 480, a razón de \$ 2 la centiárea. La forma de la propiedad es la de un rectángulo en el cual una de las dimensiones es igual a los $\frac{2}{7}$ y medio de un kilómetro. ¿Cuáles son en decímetros las dos dimensiones?

1248. ¿A cuánto alcanzó el precio de un campo de 50 áreas 75 centiáreas, sabiendo que los $\frac{2}{5}$ se pagaron a razón de \$ 12,50 el área, y lo demás a \$ 1,50 los 10 m. cuadrados?

1249. ¿Qué superficie es preciso sembrar para cosechar el trigo que necesita un individuo en un año (no bisiesto). Sábese que come, término medio, 3 kg. de pan cada 5 días, que 125 kg. de harina dan 150 kg. de pan, que 100 kg. de trigo dan 82 kg. de harina, que un hectolitro de harina pesa 75 kg., y que se cosechan 25 hl. de trigo por hectárea.

1250. Admítase que la remolacha da un 7% de su peso de azúcar, y que un m^2 de terreno produce, término medio, 3 kg. 750 de remolacha. Pagándose la remolacha \$ 14,70 los 1 000 kg., calcúlese: 1º la superficie de terreno que sería preciso sembrar para suministrar a una fábrica la remolacha necesaria para la producción anual de 12 125 quintales métricos de azúcar; 2º ¿cuánto valdría la remolacha obtenida?

1251. Siete hectáreas 9 áreas de viña valen tanto como 15 ha. 33 a. de pradera, y 28 ha. de pradera valen tanto como 62 ha. 65 a. de bosque. ¿Cuál es el precio de una hectárea de bosque, sabiendo que la hectárea de viña vale \$ 1 300?

1252. El hectolitro de patatas pesa 80 kg., más o menos, y el $\frac{1}{2}$ quintal vale \$ 3,25. Calcúlese el precio de la cosecha de un campo de $1^m 37^a 83^m$, sabiendo que la cosecha ha resultado de 104 litros 65 por área.

1253. Los $\frac{3}{5}$ de un campo están sembrados de maíz, $\frac{1}{3}$ de patatas, y lo demás de viña; la segunda parte tiene 16 áreas, 6 centiáreas más que la tercera. Calcúlese la extensión de cada una de estas partes.

1254. Un patio rectangular tiene $15^m 6$ de longitud, y su latitud es los $\frac{2}{3}$ de este número. Si se lo quiere cubrir con piedras cuadradas de $0^m 18$ de lado, dígase el costo, sabiendo que el millar de estas piedras vale \$ 140, y que el trabajo cuesta \$ 4,15 el m^2 .

1255. Un campo rectangular tiene $239^m 07$ de largo por $174^m 08$ de ancho. Pregúntase: 1º la superficie de este campo; 2º el gasto para esparcir 3 litros $\frac{1}{2}$ de cal por metro cuadrado, si la cal vale \$ 3,75 el m^3 .

1256. En el supuesto de que una aula debe tener $1^m 25$ por alumno, calcúlese de cuánto se debe aumentar la longitud de una sala de clase de $46^m 90$ de superficie y cuya latitud es de $6^m 50$, para dar cabida a 50 alumnos.

1257. Feliciano compra dos terrenos rectangulares: el 1º que tiene 95 m. de longitud se compró por \$ 7 125, a razón de \$ 300 el área; el 2º tiene 57 m. de largo, y su precio es igual a los $\frac{24}{25}$ del 1º. Sabiendo que a superficie igual se habría pagado el segundo terreno dos veces tanto como el primero, calcúlese la latitud de cada uno.

1258. Un jardín rectangular tiene $12^m 50$ de largo. Dos pasillos perpendiculares entre sí y de $1^m 10$ de ancho, el uno en dirección del largo, y el otro, del ancho, tienen juntos $21^m 56$ de superficie. Calcúlese el precio del jardín, descontando la superficie de los pasillos, a razón de \$ 5 000 la hectárea.

1259. Una persona compra una alfombra rectangular cuyo ancho es los $\frac{3}{5}$ del largo, y quiere ponerla un galón que vale \$ 1,25 el metro. Sabiendo que el galón representa los $\frac{2}{7}$ del precio de compra de la alfombra, y que ésta concluida cuesta \$ 20,25, calcúlese las dimensiones.

1260. Un tapete tiene $8^m 50$ de contorno, y su largo pasa al ancho en $0^m 75$. Dígase el precio del forro, si el género empleado tiene 0^m de ancho y vale \$ 0,85 el metro lineal.

1261. Un jardín rectangular tiene 64 m. de longitud por 22 m. de latitud; a 2 m. del borde, se planta una línea de rosales; otras dos líneas se cruzan en medio del jardín. Si el espacio que media entre dos rosales es de $1^m 50$, ¿cuánto costarán estos rosales a \$ 8 la docena?

1262. Un campo rectangular cuya latitud es los $\frac{7}{11}$ de la longitud, se compra por \$ 5 el área. El nuevo propietario lo hace cercar con una palizada a razón de \$ 1,15 por metro y que importa \$ 621. ¿A cómo tiene que vender este campo para ganar un 20% sobre todo lo que ha gastado?

1263. Un jardín rectangular de 50 m. de longitud pasa de $257 m^2$ otro que tiene la misma forma, de 42 m. de longitud y cuya latitud pasa de $1^m 50$ la del primero. Calcúlese la latitud de cada uno de estos jardines.

1264. Con \$ 8 756 se han comprado tres terrenos que tienen de superficie juntos $2 170 m^2$, y el precio del metro es igual

para los tres. Calcúlese el precio de cada terreno, sabiendo que el primero tiene 4 áreas más que el segundo, y que la superficie del segundo es los $\frac{3}{4}$ de la del tercero.

1265. Disponiendo cierto número de árboles en cuadrado, de modo que resulten hileras paralelas y equidistantes en ambos sentidos, sobran 92 árboles; poniendo un árbol más en cada hilera, de modo que resulte siempre un cuadrado, faltan 37 árboles para acabar el cuadrado. ¿Cuántos árboles se tiene?

1266. Un terreno cuya forma es la de un trapecio vale \$ 450,45 a 3,50 el área; la altura del trapecio es de 104 metros. Calcúlese las bases, sabiendo que su relación es igual a $\frac{4}{7}$.

1267. Un prado que proporciona anualmente 79 488 kg. de heno tiene la forma de un trapecio cuya altura es de 480 m. Sábese que la suma de las bases es igual a 690 m., y que la base mayor, pasa a la menor en 510 m. Calcular: 1º la producción de cada área del prado; 2º a cómo sería preciso vender la hectárea para obtener la suma necesaria para el pago de otro prado de forma triangular cuya base es de 1260 m., y la altura, de 70 m., sabiendo que el precio del área de este prado es tal, que aumentado de su mitad, vale \$ 69.

1268. Dos vasos cilíndricos tienen: el mayor 1 metro de profundidad, y el menor, $\frac{1}{2}$ metro. En el supuesto de que el volumen del vaso menor es el $\frac{1}{8}$ del volumen del mayor, y que la diferencia de capacidad de los dos vasos es de 27 lt. 489, calcúlese los radios de sus bases.

1269. Un jardín rectangular tiene 350 m. de perímetro, y la latitud es los $\frac{2}{5}$ de la longitud. En el interior y siguiendo el límite, hay un pasillo de 1^m 50 de ancho. Otros dos pasillos de igual anchura se cruzan perpendicularmente, el uno en dirección de la longitud, el otro en dirección de la latitud. En estos pasillos se esparcen uniformemente 61^m 380 de arena. Dígase cuál será el espesor de la capa.

1270. ¿De cuánto hay que levantar el techo de una aula que mide 7^m 25 de longitud, 4^m 9 de latitud, por 3^m 80 de alto, si el número de alumnos es de 30, y se desea que cada uno tenga 5^m 3 de aire?

1271. Un aljibe rectangular tiene 5^m 20 de longitud y 3^m 50 de latitud. Calcúlese su profundidad, sabiendo que para llenarlo, es preciso abrir durante 9 horas 6 min. un grifo que da 7 425 litros de agua cada 2 horas $\frac{3}{4}$.

1272. En una pila cuyo ancho es los $\frac{2}{5}$ del largo, se vierte

agua, hasta 0^m 28 de alto. ¿Cuál es el largo y el ancho, sabiendo que entonces la pila contiene 2940 litros?

1273. Un depósito de agua de forma cilíndrica tiene 1^m 06 de profundidad y 7^m 42 de diámetro. Calcúlese la superficie interior, junto con la del fondo.

1274. Se cava un pozo de 18 m. de profundidad y de 1^m 75 de diámetro. La tierra que se extrae pesa, término medio, 3 200 kg. el m³. Dígase el peso de la tierra extraída.

1275. ¿Cuál es el precio de 4 000 m. de alambre de 0^m 0018 de diámetro a razón de \$ 4,90 los 5 kg.? La densidad del hierro es de 7,8.

1276. Fabriciano ha comprado vino por \$ 1 580 en \$ 147 los 215 litros. Dígase cuántas botellas de 0 lt. 85 se podrán llenar, y lo que sobre.

1277. Un vaso vacío pesa 1 kg. 320; lleno de agua pesa 5 kg. 374. Dígase su capacidad, y lo que pesaría lleno de un líquido de 0,8 de densidad.

1278. Un vaso lleno de agua pesa 3 550 gr.; lleno de balas metálicas pesa 11 kg. 520. Si, lleno de estas balas se vierte agua para llenar los vacíos, el vaso pesa entonces 12 500 gr. Dígase el peso del vaso vacío, si la densidad del metal es de 8,15.

1279. Una ampolla de vidrio, llena de mercurio, pesa 1 kg. 59422; vacía pesa 56 gr. 545. Siendo la densidad del mercurio 13,596, calcúlese en menos de un mm³, la capacidad de esta ampolla.

1280. Dígase la cabida de un vaso, sabiendo que el aceite que lo llena hasta los $\frac{5}{7}$ pesa tanto como la moneda de plata que vale 385,50 pts. El hectolitro de aceite pesa 90 kg.

1281. Un vaso lleno de agua pura a 4º pesa 9 kg. 68; lleno de un líquido cuyo peso es los 0,91 del peso del agua, pesa 9 kg. 266. Pregúntase: 1º su capacidad; 2º su peso cuando vacío.

1282. Con 492 gr. de ácido sulfúrico y 345 gr. de zinc se fabrican 10 gr. de hidrógeno. Calcúlese cuánto ácido se necesitará para llenar de gas un globo de 100 m³, en el supuesto de que 1 dm³ de aire pesa 1 gr. 3, y que la densidad del hidrógeno, respecto al aire, es de 0,069.

1283. Se reparte una suma entre cuatro personas: la 1ª recibe los $\frac{3}{10}$; la 2ª, $\frac{1}{4}$; la 3ª, $\frac{1}{3}$; y la 4ª las 4 998 ptas. que sobran. Calcúlese: 1º la suma repartida; 2º su peso, sa-

biendo que los $\frac{3}{4}$ se componen de monedas de oro, y el último cuarto de monedas de plata.

1284. Un platero tiene 100 pts. en monedas de 1 y de 2. ¿Cuál es el peso de metal fino que se debe añadir para que resulte una liga con la ley de 0,9, y cuántos duros se podrán acuñar con la liga obtenida?

1285. Un lingote de oro pesa 250 gr.; si se le añadiese 14 gr. 528 de metal fino, resultaría un lingote con 0,9 de ley. Calcúlese la ley del primero.

1286. ¿Cuál es la suma en oro que encierra dos veces más cobre que 420 pts. en plata? Ley común: 0,9.

1287. Dos lingotes de oro tienen de ley respectivamente 0,900 y 0,820, y pesan 12 kg. 7, y 3 kg. 5. Después de haberlos fundido juntos, se quiere obtener un nuevo lingote con 0,850 de ley. Dígase la cantidad de oro o de cobre que se ha de añadir.

1288. Un lingote de oro de 1348 gr. contiene 147 gr. de cobre. Pregúntase el número de gramos de oro puro, que se le debe añadir para obtener la ley de 0,9 y cuántas monedas de 20 pts. se podrán acuñar con este nuevo lingote; hállese también la ley del primero.

1289. ¿Cuál es la suma: 1º en monedas de oro; 2º en monedas de plata, cuyo peso es igual al de 3 lit. 25 de agua tomada en las condiciones adoptadas para la determinación del gramo? ¿Cuál es el peso del oro puro contenido en la primera, y el de la plata pura contenida en la segunda, si la ley es de 0,835?

1290. Se funde un dm^3 de plata con un volumen de cobre suficiente para formar una liga de 0,9 de ley. Calcular, en centímetros cúbicos, el volumen de este cobre, sabiendo que 1 cm^3 de plata pesa 10 gr. 47, y 1 cm^3 de cobre, 8 gr. 85.

1291. En uno de los platillos de una balanza se pone un vaso que pesa vacío 1 kg. 875, y en él se vierte 1 lit. 5 de agua. En el otro platillo se ponen 400 pts. en plata. ¿Qué suma en bronce hay que añadir para establecer el equilibrio?

1292. Lleno de vino, un vaso equilibra una suma de 7754 pts. compuesta de 7750 pts. en or. y 4 pts. en plata. Lleno de aceite, el mismo vaso pesa 2 kg. 44. Sabiendo que un litro de vino pesa 950 gramos, y un litro de aceite 900 gramos, calcúlese la capacidad del vaso y el peso del vino y del aceite que puede caber en él.

1293. Una barra de plata pura pesa 2 kg. 468. Con ella se

quiere acuñar el mismo número de monedas de 5 y de 2 pts. Calcular el peso de cobre que se debe añadir, y el valor total de las monedas acuñadas.

NUMEROS COMPLEJOS

1294. Un ciclista ha ido y vuelto de A a B por el mismo camino. Al salir a las 6 y 5 min. de la mañana, habría vuelto a las 11 y 26 min. Sabiendo que en la ida ha andado con la velocidad de 18 km. por hora, y en la vuelta con la velocidad de 16 km., sabiendo además que se ha parado $\frac{1}{4}$ de hora en B, calcúlese la distancia de A a B.

1295. Un viajero anda 6 km. por hora, y otro 6 km. en 80 minutos; ¿cuál de los dos anda con mayor velocidad, y cuántos kilómetros más que el otro recorre en 2 h. 30 m.?

1296. Un posta, recorriendo 10 km. $\frac{1}{2}$ por hora, ha salido hace ya 3 horas, cuando en su persecución sale otro que recorre 13 km. por hora; ¿cuántas horas y minutos necesitará el segundo para alcanzar al primero?

1297. Dos trenes salen de Madrid, el uno a las 6 de la mañana, y el otro a las 7 y 16 min. Sabiendo que el 1º anda 32 km. por hora, y el 2º, 40 km., dígase a qué hora y a qué distancia de Madrid el segundo tren alcanzará al primero.

1298. Fulgencio sale a pie a las 5 y 50 min. de la madrugada, andando 5800 m. por hora; 2 h. y 5 min. más tarde, a caballo sale en pos de él, Fernando, que recorre 10020 m. por hora. ¿A qué distancia del punto de partida y a qué hora Fernando alcanzará a Fulgencio?

1299. Un jinete y un ciclista van de A a B. El primero sale 50 min. antes que el segundo y anda 10 km. por hora. El ciclista anda 12 km. por hora y llega 5 min. después del jinete. Dígase la distancia de las ciudades A y B.

1300. Dos jinetes andan en un hipódromo de 90 m. de circunferencia, y en el mismo sentido. El 1º que tiene 18 m. de adelanto anda $2^m 90$ por segundo, y el 2º $2^m 54$. Calcular el tiempo que transcurrirá hasta su encuentro, y la distancia que cada jinete habrá recorrido.

1301. Un reloj que adelanta 3 min. por día, señala la hora exacta a mediodía. Dígase la hora exacta que será cuando este reloj señale las 7 y 12 min. de la tarde.

1302. Un reloj que adelanta 11 min. en 24 horas señala la hora exacta a mediodía. ¿Cuál será la hora verdadera cuando, el día siguiente, señale las 7 a. m.?

1303. Un reloj que adelanta 5 min. en 24 h. señala la hora verdadera el lunes a mediodía. Dígase la hora exacta que será el domingo siguiente cuando señale las 10 y 35 min. a. m.

1304. Dígase el ángulo que forman las dos manecillas de un reloj, cuando éste señala las 12 y 10 min.

1305. Siendo la suma de los ángulos de un polígono igual a tantas veces dos rectos como lados, menos dos, tiene este polígono, calcúlese el valor de un ángulo de un polígono de 7 lados, y cuyos ángulos son iguales entre sí.

1306. Un hombre recorre 10 metros, dando 15 pasos. ¿Cuántos kilómetros recorre en una hora, si da 100 pasos por minuto?

INTERES — DESCUENTO Y REGLAS VARIAS

1307. Una persona impone \$ 60.000 parte al 4,5% y parte al 5,25%, y resulta así un interés total de \$ 2.880. ¿Qué parte del capital fué impuesta a cada uno de los tantos señalados?

1308. Carlos impone los $\frac{4}{7}$ de su hacienda al 4%, y el resto al 5%, y resulta un interés anual de \$ 3.100. Dígase cuál es la suma impuesta a cada uno de los tantos.

1309. Un capital ha suministrado tres imposiciones: los $\frac{2}{3}$ al 4%; $\frac{1}{6}$ al 4 $\frac{1}{2}$ %, y el resto al 5%. Al cabo de 16 meses, el capital, junto con los intereses, vale \$ 38.991. Calcular: 1º el capital primitivo; 2º a qué tanto hubiera sido preciso colocarlo todo para tener el mismo interés en el mismo tiempo.

1310. Un capital se impone del modo siguiente: $\frac{1}{3}$ al 5 $\frac{1}{4}$ %, los $\frac{2}{5}$ al 6 $\frac{1}{2}$ %, los $\frac{3}{4}$ del resto al 4 $\frac{1}{2}$ %, y el último resto al 3 $\frac{2}{3}$ %. Siendo el interés anual de \$ 5.460, calcúlese el capital impuesto.

1311. Una persona dividió su capital en 3 partes. Colocó la 1ª al 4,5% por 3 años 8 meses; la 2ª que es doble de la 1ª, la colocó al 5% por 3 años 6 meses; la 3ª que es triple de la segunda, se impuso al 4% por 3 años 9 meses. Siendo el total de los intereses igual a \$ 14.150, calcúlese el capital entero y cada una de las partes.

1312. Una persona impone cierto capital al 5%. Al cabo de 2 años, saca los $\frac{2}{5}$; 6 meses después saca los $\frac{3}{10}$, y el resto al fin del tercer año. Siendo la suma de los intereses igual a \$ 11.243, calcular la suma impuesta.

1313. Se impone la mitad de una suma al 4%, y 5 meses más tarde el $\frac{1}{3}$ del resto al 4,5%. Al cabo de 2 años, contados desde la primera imposición, los intereses juntos alcanzan \$ 1.867,50. Calcúlese la suma total primitiva.

1314. Marcelo ha impuesto al 5% cierto capital por 2 años; en seguida saca $\frac{1}{5}$; 9 meses después, saca $\frac{1}{10}$ del resto y 3 meses más tarde el último resto. A cada reducción de su capital, y cuando lo ha sacado por completo, todos los intereses los ha repartido entre los pobres, que han recibido \$ 13.900 en 3 años. Determinése el capital primitivo.

1315. Dos personas han impuesto su fortuna: la 1ª al 5%; la 2ª al 6%. El interés de la 2ª pasa al de la 1ª en \$ 1.559,60, y su fortuna pasa a la de la 1ª en \$ 22.120. Calcular las fortunas respectivas.

1316. Dos comerciantes han impuesto juntos \$ 10.000, el 1º al 5% durante 6 meses, y el 2º al 4% durante 9 meses. Calcúlese el interés de cada uno, si el del primero es los $\frac{5}{24}$ del segundo; calcúlese también la suma impuesta por cada comerciante.

1317. Una persona impone los $\frac{3}{7}$ de su fortuna al 5%, y divide el resto en dos partes iguales; la 1ª, la impone al 6%, y la 2ª al 3%. Así resulta un interés total de 18.600 francos. Calcular la suma de que disponía esta persona, y valuarla en moneda inglesa, sabiendo que la libra esterlina vale 25,22 francos o 20 chelines, y el chelín, 12 peniques.

1318. Un capital impuesto a cierto tanto y durante 2 años y 6 meses, valdría \$ 44.000, con sus intereses. Después de 3 años $\frac{1}{4}$, valdría \$ 45.200. ¿Cuál es el capital impuesto, y a qué tanto?

1319. Un capital aumentado con los intereses que ha producido en 10 meses, es igual a \$ 29.760. El mismo capital, disminuido de sus intereses en 17 meses y al mismo tanto, sería igual a \$ 27.168. ¿Cuáles son el capital y el tanto?

1320. Calixto presta una suma por 8 meses al 3 $\frac{1}{2}$ %; entonces recibe \$ 15.350 por el capital y los intereses juntos. ¿Cuál es la suma prestada, y a qué tanto habría sido colocada, si Calixto hubiera recibido, al cabo de 8 meses, \$ 15.400 en vez de \$ 15.350?

1321. Patricio impone, al principio del año, \$ 6.000 a cierto tanto; 3 meses después impone \$ 2.500 a un tanto que pasa de \$ 2 el tanto precedente. Dígase el primer tanto, sabiendo que al fin del año los intereses alcanzan \$ 352,50.

1322. Cierta suma se impuso por 30 meses, y resultaron \$ 43.000 por el capital junto con los $\frac{3}{4}$ de los intereses. Si

hubieran impuesto este capital durante 3 años y 3 meses, el interés habría llegado a ser los $13/100$ del capital. Calcular el capital y el tanto.

1323. La diferencia entre las fortunas de dos personas es de \$ 8 000. La 1ª impone su dinero al 4%, y la 2ª al 5%. ¿Cuál es la fortuna de cada persona, sabiendo que los intereses resultan iguales?

1324. Dos empleados, teniendo que calcular el interés de un capital al 5% y por 75 días, cuentan el año el uno de 360 días, y el otro de 365. Así resulta una diferencia de \$ 7,50. Calcúlese ese capital.

1325. Feliciano impone su fortuna parte al 5% y parte al 4%, y resulta un interés anual de \$ 3 700; el interés sería de \$ 3 860 si la suma impuesta al 4% lo hubiese sido al 5% y recíprocamente. Calcular el capital y las dos partes.

1326. Braulio impone un capital, parte al 5% y parte al 4%, y resulta un interés de \$ 1 980. Si la parte impuesta al 5% lo hubiera sido al 4% y recíprocamente, el interés se disminuiría de \$ 90. ¿Cuáles son las sumas impuestas?

1327. Dos capitales han sido impuestos durante 2 meses, el uno al 3%, y el otro al 5%, y la suma de los intereses es de \$ 106. Si los hubieran impuesto durante 4 meses, el 1º al 5% y el 2º al 3%, la suma de los intereses habría sido de \$ 200. Calcular los dos capitales.

1328. Se han impuesto a tantos diferentes, dos sumas proporcionales a 9 y a 10. Los tantos son tales que la 1ª suma impuesta durante 3 meses y 9 días da un interés igual a sus $2/125$. Además, las dos sumas impuestas durante 36 días, la 1ª al tanto de la 2ª y recíprocamente, han dado \$ 36 20 de interés total, y tal que el de la 2ª suma pasa al de la 1ª en \$ 3 80. Calcular: 1º el tanto al que cada suma se impuso la primera vez; 2º las sumas impuestas; 3º los intereses dados en la primera imposición.

1329. Antonio ha comprado un mueble por \$ 600. ¿A cómo hay que venderlo para que, pagando al contado, se pueda conceder un 10% de descuento, ganando todavía un 20% sobre el precio de compra?

1330. Un negociante compra una mercadería y la revende con un beneficio de 8% sobre el precio de compra. Si ganara 8% sobre el precio de venta, resultaría un beneficio de \$ 8 más. Hállese el precio de compra y el precio de venta.

1331. Un librero compra 8 docenas de libros por \$ 3,50 cada uno. Pagando al contado le hacen una rebaja de 3% y le

dan gratuitamente un volumen más por docena. ¿A cómo tiene que vender cada libro para tener \$ 98 de beneficio sobre el todo?

1332. Un pagaré pagadero el 8 de Noviembre se descuenta el 16 de Junio precedente al 5,5%. A más del descuento, el banquero cobra $1/4\%$ de comisión sobre el valor nominal del pagaré y \$ 8,50 por varios gastos. Si el portador ha recibido \$ 715,35, dígase el valor nominal del pagaré, habiendo contado los meses con su número de días.

1333. Se presentan a un banquero dos pagarés a 50 días el uno, y a 120 el otro. El banquero cobra un 6% de descuento que representa una suma de \$ 260. Si los pagarés hubieran sido negociados 20 días más tarde, el banquero habría cobrado \$ 66 $2/3$ menos. Calcúlese el valor nominal de cada uno de los pagarés.

1334. Un terreno rectangular que tiene 354^m20 de longitud se vende por \$ 15,50 el área, y se paga con un pagaré a 80 días. El vendedor lo negocia el mismo día de la venta a un banquero que le remite \$ 3 541 después de cobrar un 4 $1/2\%$. ¿Cuál es la superficie del terreno, y cuál la latitud?

1335. Dos personas entran en un banco, la primera con una letra de \$ 1 500 pagadera dentro de 6 meses, la segunda con una letra de \$ 1 470 pagadera dentro de 10 días; el banquero descuenta las dos letras a un mismo tanto y remite a la segunda persona \$ 12,55 más que a la primera. ¿Cuál es el tanto?

1336. Dos comerciantes que tienen cada uno una factura, le 1ª de \$ 980 a 20 días; la 2ª de 1 000 a 255 días, las truecan con la condición de que la 2ª se aumentará de \$ 12,70. Dígase el tanto del descuento.

1337. Dos comerciantes entran en un banco, el 1º con una letra de \$ 1 200 pagadera dentro de 1 año, el 2º con un pagaré de \$ 1 000 a 6 meses. El banquero descuenta los dos efectos al mismo tanto y remite a la 1ª persona 165 más que a la 2ª. Calcúlese el tanto.

1338. ¿Cuál ha de ser el valor nominal de una letra pagadera al cabo de 162 días, para que la diferencia entre el descuento racional y el descuento comercial, al 6%, sea de \$ 4,05 año de 365 días?

1339. Una suma de \$ 2 100 se reparte entre 3 personas: la parte de la primera debe ser los $2/3$ de la parte de la segunda, la parte de la segunda, los $4/5$ de la parte de la tercera. ¿Cuánto le corresponde a cada persona?

1340. Dos personas tienen juntas \$ 167 280: la primera que impone su dinero al 4% durante 3 meses recibe un interés doble del que tendría la segunda imponiendo el suyo al 5% durante 7 meses. Dígase la suma que le corresponde a cada persona.

1341. En una fábrica se emplean 12 hombres, 7 mujeres, y 5 niños; el jornal de los hombres es de \$ 3,40; el de las mujeres, de \$ 1,80; y el de los niños, de \$ 1,10. El patrón se propone repartirles \$ 1 200, proporcionalmente a sus jornales. ¿Cuánto le corresponderá a cada uno de sus empleados?

1342. Una hacienda se vende por \$ 20 000, y esta suma se reparte entre 3 acreedores a quienes deben \$ 10 000, \$ 15 000 y \$ 25 000. Siendo los gastos de venta, etc. de un 15% del precio de venta, ¿cuánto recibirá cada acreedor?

1343. Se han trocado 5 carneros por burros, 10 burros por 3 bueyes, 12 bueyes por 5 caballos, y 7 caballos por 8 camellos que valen cada uno \$ 315. ¿Cuál es el precio de un carnero?

1344. A un lingote de oro que tiene 8 cm³ de volumen, se le quiere ligar la cantidad de plata necesaria para que 1 cm³ de la liga pese 12 gr. 50. Calcular el volumen de esta plata, si un cm³ pesa 10 gr. 40, y 1 cm³ de oro pesa 19 gr. 20.

1345. Tres hortelanos tienen que repartirse \$ 950,85 de gastos para la construcción de un canal de riego de que aprovechan desigualmente: el 1º riega 1 ha. 45 a. y tiene derecho a 8 días mensuales de riego; el 2º riega 69 áreas y tiene derecho a 12 días mensuales de riego; el 3º riega 92 a. 65 ca. durante el resto del mes. Calcular lo que cada uno tendrá que pagar.

1346. Una persona hace repartir \$ 300 entre 3 familias pobres, proporcionalmente al número de hijos de cada familia. Si la 1ª tiene 3 hijos; la 2ª, 4; y la 3ª, 5, dígase lo que le corresponde a cada una.

1347. Tres personas que tienen que recorrer 65 km. se entienden para alquilar un coche con otras dos que van a 23 km., siguiendo el mismo camino. Si se paga por el coche \$ 28,50, dígase lo que paga cada persona, proporcionalmente a la distancia recorrida.

1348. Cinco empresarios se han asociado para la construcción de un ferrocarril: el 1º construye 1/6; el 2º 1/8; el 3º construye la media aritmética entre los dos primeros; el 4º, la media aritmética entre los 3 primeros; y el 5º construye el resto, esto es, 6 400 metros. Siendo los gastos de \$ 1 200.000

inclúyese el gasto de cada empresario y la longitud de la vía férrea.

1349. Repartir \$ 9 400 entre tres personas, e inversamente a sus edades: la primera tiene 30 años; la 2ª, 40; y la 3ª, 50.

1350. Repartir \$ 20 500 entre tres personas de modo que la parte de la 1ª sea a la de la 2ª como es 2 a 3; y que la de la 2ª sea a la de la 3ª como 4 es a 7.

1351. Un capital de \$ 36 000 se ha dividido en 3 partes: la relación de la 1ª a la 2ª es 7/4; la de la 2ª a la 3ª, de 20/17. Las tres sumas se han impuesto a interés simple, la 1ª durante 6 meses, la 2ª durante 18 meses; la 3ª durante 2 años, y el total de los intereses es igual a \$ 1 426,25. Calcular: 1º lo que representa cada parte; 2º el tanto de las imposiciones.

1352. Dos personas se han asociado para formar un capital: la 1ª ha puesto \$ 360 por 2 años, y la 2ª \$ 400 por 18 meses. Siendo el beneficio de \$ 132, ¿cuánto le toca a cada persona?

1353. En una empresa 3 socios han ganado \$ 407,10 El primero que había puesto \$ 8 400 por 64 días ha sacado \$ 8 534,40, capital y ganancia juntos. La imposición del segundo fue por 84 días, y la del tercero, igual a los 3/4 de la del segundo, por 90 días. Calcular la suma impuesta por el segundo y por el tercero, y también la ganancia de cada uno de ellos.

1354. Dos personas se han asociado para una empresa en la cual han puesto: la 1ª \$ 45 000, y la 2ª \$ 32 000. Al cabo de 9 meses una tercera persona ha puesto en la misma empresa \$ 25 000. Los trabajos habiendo durado 18 meses en todo, han producido una ganancia de \$ 14 320, preguntase: 1º la ganancia de cada uno de los socios, sabiendo que el primero toma, ante todo, los 2/5 del beneficio total como remuneración por la dirección de los trabajos; 2º el tanto de la imposición del dinero en esta empresa.

1355. Leoncio ha comprado mercaderías por \$ 800 pagaderos: 1/2 al cabo de 3 meses, 1/4 dentro de 4 meses, y el resto dentro de 2 meses. Deseando hacer un solo pago, ¿cuándo debe verificarlo?

1356. Un comerciante suscribe dos pagarés, el uno de \$ 1 500 pagadero dentro de 30 días, el otro de \$ 200 pagadero dentro de 90 días. Le conceden reemplazarlos por uno solo de valor igual a la suma de los otros dos. Pregúntase el vencimiento de este pagaré.

1357. Celestino debía \$ 200 pagaderos dentro de 2 meses, \$ 400, dentro de 3 meses, y \$ 500 dentro de 4 meses. Pagando \$ 600 al cabo de un mes, ¿cuánto tiempo puede guardar el resto?

1358. Julián reemplaza por un pagaré único de \$ 1300, pagadero dentro de 48 días, 3 pagarés: el uno de \$ 500, a 5 días; el 2º de \$ 300, a 60 días; y el 3º de \$ 500. Siendo el descuento comercial de 6%, calcular el vencimiento del último pagaré.

1359. El 4 de Junio, un deudor reemplaza un pagaré de \$ 540 pagadero el 5 de Agosto, y otro de \$ 720 pagadero el 15 de Agosto, por uno solo pagadero el 4 de Septiembre del mismo año, y de un valor de \$ 1264,25. Dígase a qué tanto el acreedor presta su dinero.

1360. Silverio debe \$ 1820 pagaderos dentro de 6 meses \$ 980 dentro de 4 meses, y \$ 1200, dentro de 10 meses. Queriendo librarse por medio de un solo pago de \$ 4033 dentro de 1 año, dígase a qué tanto se calculará el interés.

1361. Saturnino ha comprado 350 litros de aguardiente por \$ 1,35 el litro. ¿Qué cantidad de agua hay que añadirle para que, vendiendo el litro a \$ 1,75, resulte un 30% de ganancia?

1362. Se han mezclado 125 litros de vino que vale \$ 120 el hectolitro con 65 litros de otro que vale \$ 80 el hl. Calcular cuántos litros se deben añadir de la primera calidad, para que en 84 litros de la nueva mezcla no haya más que 15 litros de la segunda calidad. Calcular también el precio del hl. de la segunda mezcla.

1363. Un tonel de 275 dm³ de capacidad contiene 225 litros de un vino que vale \$ 0,45 $\frac{7}{9}$ el litro. Se lo llena con vino que vale \$ 0,539 $\frac{1}{2}$ el litro; en seguida se sacan 25 litros de la mezcla y se lo reemplaza por agua. Hállese la cantidad de cada clase de líquido contenida en un litro de la última mezcla. Calcular también el precio en que se debe vender el litro de esta mezcla para ganar un 18% sobre el precio de venta.

1364. Ramón tiene vino a \$ 25, a \$ 32, y a \$ 35 el hectolitro: ¿cuántos hectolitros debe tomar de cada clase para obtener una mezcla de 34 hl. que pueda vender en \$ 33 el hl., ganando un 10%?

1365. Un comerciante en vinos ha comprado 3 barriles de varias calidades, para mezclarlos. Las capacidades de los barriles son entre sí como 3, 4 y 5, y los precios del hl., como 6, 7 y 8. La venta de la mezcla ha dado \$ 227,90 con un ha

neficio de 6% sobre el precio de compra, o de \$ 2,15 por hectolitro. Calcular el número de litros y el precio del litro de cada calidad.

1366. ¿Cuál ha de ser la ley de una liga de plata que pesa 3 kg. 750, para que al fundirla con 5 kg. de plata pura, resulte una liga con 0,835 de ley?

1367. Un platero tiene dos lingotes de plata: el uno con 0,798 de ley, el otro con 0,867. ¿Qué cantidad debe tomar de cada uno para formar otro de 0,800 de ley?

1368. Un lingote de plata de 0,800 de ley pesa 1200 gr.; ¿qué peso de otro de 0,900 de ley hay que añadirle para obtener un lingote de 0,860 de ley?

1369. Se ha compuesto una liga de plata de 325 gr. y de 0,835 de ley, con 450 gr. de otra liga de 0,950 de ley. ¿Qué peso hay que añadirle de una tercera de 0,840 de ley, para que resulte una cuarta liga de 0,886 de ley?

1370. Se derriten juntas dos barras de oro, la 1ª de 0,920 de ley, la 2ª, de 0,750, y resulta otra de 2175 gr. y de 0,810 de ley. ¿Cuál es el peso de cada una de estas barras?

1371. Si se ligan dos barras de plata, la 1ª de 526 gr. y 0,920 de ley, y la 2ª de 438 gr. y 0,750 de ley, dígase cuánto se debe añadir de plata o de cobre para obtener una liga de 0,850 de ley.

1372. Se han ligado tres barras de plata de 0,9, 0,8, 0,6 de ley, y cuyos pesos respectivos son inversamente proporcionales a su ley. Siendo el peso total de la liga de 1682 gr., calcúlese: 1º el peso de cada una de las tres barras; 2º la ley de la liga.

1373. Al ligar dos lingotes de oro, de 0,950 y de 0,700 de ley, resultan 600 gr. con 0,800 de ley. Calcular: 1º los pesos respectivos de los dos primeros lingotes; 2º el peso del oro que se debe añadir a los 600 gr., para que esta liga tenga la ley de 0,900.

1374. Un platero tiene 3 barras de plata, la 1ª de 0,75 de ley; la 2ª de 0,67, y la 3ª de 0,56. Se mezclan las dos primeras en la relación de 1 a 3, luego con la liga que resulta y la 3ª se quiere componer una nueva liga de 0,62 de ley. Calcular el peso de cada una de las 3 barras que contendrá 1 kg de la última liga.

1375. Se derriten juntas 3 barras de oro 0,700, 0,800 y 0,900 de ley. ¿Cuál es el peso que se debe tomar de cada una para

obtener una liga de 2000 gr. de 0,795 de ley, con la condición de tomar de las dos primeras, pesos proporcionales a los números 3 y 4?

1376. El 5 de Febrero, P. Zelaya presenta al descuento las letras siguientes, al 4%:

L/ de ptas. 4000 al 8 de Marzo.
— de ptas. 2500 al 15 de Mayo.
— de ptas. 1650 al 29 de —

Formálcese la factura de descuento, hallando el líquido a pagar.

1377. El 15 de Mayo, J. Gómez presenta al descuento los documentos siguientes, al 2%:

L/ de \$ 400 el 8 de Septiembre.
— de \$ 250 el 12 —
— de \$ 1500 el 11 de Octubre.

Pagaré de \$ 300 el 27 —

Formálcese la factura de descuento, hallando el líquido a pagar.

1378. El 18 de Junio, P. Fernández presenta al descuento los documentos siguientes:

L/ de \$ 300 al 25 de Junio.
— de \$ 520 al 1º de Julio.
Pagaré de \$ 160 al 19 de Agosto.
— de \$ 280 al 2 de Septiembre.

Redáctese la factura de descuento, y calcúlese el líquido a pagar, siendo el descuento 2%; el cambio 1/5% y la comisión 1/4%.

1379. Redáctese la cuenta corriente siguiente, por los métodos directo, indirecto y hamburgués, y dígase el saldo a cuenta nueva.

Debe el Sr. D. Pablo Navarro, s. cta. cte. al 4%, cerrada el 30 de Mayo de 1911.

Enero	6 su entrega en efectivo	\$ 500
—	28 m/ endoso a s/ o/ c/ Gómez	\$ 250
Febrero	14 s/ endoso a m/ o/ c/ Tomás	\$ 120
—	27 Pagado cheque 645	\$ 80
Marzo	20 Pagado cheque 646	\$ 110
Abril	19 su entrega en efectivo	\$ 1000
Mayo	25 mi — a Soler por s/c	\$ 900

1380. Continúan las operaciones comerciales entre P. Navarro y su banquero.

Sumas entregadas por P. Navarro:

\$ 500 el 5 de Junio
\$ 1000 el 24 —
\$ 300 el 2 de Julio
\$ 2000 el 15 —

Sumas entregadas por el banquero a P. Navarro:

\$ 1000 el 15 de Junio
\$ 2000 el 28 —

Redáctese la cuenta corriente por los métodos directo, indirecto y hamburgués, al 4%, cerrada el 5 de Agosto, y dígase el saldo a cuenta nueva.

APENDICE PARA LA REPUBLICA DE COLOMBIA

Algunos datos referentes a medidas que no se ajustan al sistema métrico decimal.

En Colombia obliga el uso del sistema métrico decimal por lo menos en los actos oficiales. Sin embargo es del todo necesario conocer ciertas medidas que no siguen a dicho sistema. Enumeraremos las usuales en ciertos negocios.

La vara

Medida de longitud que equivale aproximadamente a 80 ctms. Es igual a los $\frac{4}{5}$ de un metro o a los $\frac{8}{9}$ de una yarda.

Reducción de metros a varas.—Para reducir metros a varas se multiplica el número de metros por el quebrado $\frac{5}{4}$.

EJEMPLO.—Reducir 80 metros a varas.

Multiplicamos a 80 por $\frac{5}{4}$: $\frac{80 \times 5}{4} = 100$ varas.

Reducción de varas a metros.—Para reducir varas a metros se multiplica el número de varas por el quebrado $\frac{4}{5}$.

EJEMPLO.—Reducir 150 varas a metros.

Multiplicamos a 150 por $\frac{4}{5}$: $\frac{150 \times 4}{5} = 120$ metros

La yarda

Medida de longitud que equivale a 90 ctms. Es igual a los $\frac{9}{10}$ de un metro o a los $\frac{9}{8}$ de una vara.

Reducción de metros a yardas.—Para reducir metros a yardas se multiplica el número de metros por el quebrado $\frac{10}{9}$.

EJEMPLO.—Reducir 150 metros a yardas.

Multiplico a 150 por $\frac{10}{9}$: $\frac{150 \times 10}{9} = 166,66$ yardas.

Reducción de yardas a metros.—Para reducir yardas a metros se multiplica el número de yardas por el quebrado $\frac{9}{10}$.

EJEMPLO.—Reducir 60 yardas a metros.

Multiplico a 60 por $\frac{9}{10}$: $\frac{60 \times 9}{10} = 54$ metros.

Reducción de varas a yardas.—Para reducir varas a yardas se multiplica el número de varas por el quebrado $\frac{8}{9}$.

EJEMPLO.—Reducir 45 varas a yardas.

Multiplicamos a 45 por $\frac{8}{9}$: $\frac{45 \times 8}{9} = 40$ yardas

Reducción de yardas a varas.—Para reducir yardas a varas se multiplica el número de yardas por el quebrado $\frac{9}{8}$.

EJEMPLO.—Reducir 80 yardas a varas.

Multiplicamos a 80 por $\frac{9}{8}$: $\frac{80 \times 9}{8} = 90$ varas.

El Pie

Medida de longitud equivalente a 27,8 cmts. El pie inglés equivale a 30 centímetros, medida comúnmente aceptada.

La pulgada

Medida de longitud equivalente a 2,5 cms.

La braza

Medida de longitud equivalente a 1,672 metros.

La cuadra

Medida de longitud equivalente a 80 metros o a 100 varas.

La legua métrica

Medida de longitud equivalente a 5000 metros.

La milla

Medida de longitud equivalente a la tercera parte de una legua.

MEDIDAS DE SUPERFICIE**La fanegada**

Medida de superficie equivalente a 6400 metros cuadrados.

Medidas de capacidad

La cuartilla equivale a 4 puchas o a 4,5 litros.
 El palito equivale a 2 cuartillas o a 9 litros.
 El almud equivale a 2 palitos o a 18 litros.
 La fanega equivale a 12 almudes o 216 litros.

Medidas de peso

La onza equivale a 30 gramos.
 La libra equivale a 16 onzas o a 500 gramos.
 La arroba equivale a 25 libras o a 12,5 kilogramos.
 El quintal equivale a 4 arrobas o a 50 kilogramos.
 La tonelada equivale a 20 quintales o a 1000 kilogramos.

NOTA: Téngase en cuenta que el quintal métrico es igual a 100 kilogramos.

Medidas de peso para metales finos

El castellano equivale a 5 gramos.
 El quilate es igual a la quinta parte de un gramo. Si se dice que un pedazo de oro es de 15 quilates esto quiere decir que sobre 24 partes de este oro 15 son de oro puro y 9 de liga.

Monedas

En muchos casos es necesario saber reducir los chelines y peniques a fracciones decimales de libra esterlina.

Téngase en cuenta que la libra esterlina vale 20 chelines, el chelín 12 peniques y el penique 4 farthings. Si una libra esterlina equivale a 20 chelines, 2 chelines valdrán 0,1 de libra esterlina y 1 chelín será exactamente igual a 0,05 de libra esterlina; como 1 chelín equivale a 12 peniques la fracción decimal de libra esterlina equivalente a 1 penique será $\frac{0,05}{12} = 0,00416$.

Un farthing es aproximadamente igual a 0,001 de libra esterlina.

Según estos datos podemos formar el siguiente

CUADRO

para reducir chelines y peniques a decimales de libra esterlina:

Chelines	PENIQUES											
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0		004	008	012	016	020	025	029	033	037	041	045
1	050	054	058	062	066	070	075	079	083	087	091	095
2	100	104	108	112	116	120	125	129	133	137	141	145
3	150	154	158	162	166	170	175	179	183	187	191	195
4	200	204	208	212	216	220	225	229	233	237	241	245
5	250	254	258	262	266	270	275	279	283	287	291	295
6	300	304	308	312	316	320	325	329	333	337	341	345
7	350	354	358	362	366	370	375	379	383	387	391	395
8	400	404	408	412	416	420	425	429	433	437	441	445
9	450	454	458	462	466	470	475	479	483	487	491	495
10	500	504	508	512	516	520	525	529	533	537	541	545
11	550	554	558	562	566	570	575	579	583	587	591	595
12	600	604	608	612	616	620	625	629	633	637	641	645
13	650	654	658	662	666	670	675	679	683	687	691	695
14	700	704	708	712	716	720	725	729	733	737	741	745
15	750	754	758	762	766	770	775	779	783	787	791	795
16	800	804	808	812	816	820	825	829	833	837	841	845
17	850	854	858	862	866	870	875	879	883	887	891	895
18	900	904	908	912	916	920	925	929	933	937	941	945
19	950	954	958	962	966	970	975	979	983	987	991	995

Para emplear el cuadro anterior se busca en la primera columna de la izquierda el número de chelines y en la parte superior el número de peniques. El número en que ambas columnas formen ángulo recto nos indicará las milésimas de libra.

EJEMPLO.—Reducir 10 chelines y 9 peniques a milésimas de libra esterlina.

Busco el número 10 en la columna titulada *chelines* y sigo horizontalmente hasta la columna de los *peniques* encabezada por 9; encuentro el número 537. Esto me indica que 10 chelines y 9 peniques equivalen a 537 milésimas de libra esterlina.

Si no nos queremos servir del cuadro anterior sigamos la siguiente regla:

REGLA.—Para reducir chelines y peniques a milésimas de libra esterlina tómesese la mitad del número de

chelines y escribáse este resultado en el lugar de las décimas; si la cantidad de chelines es impar póngase un 5 en el lugar de las centésimas.

Redúzcanse luego los peniques a farthings y escribáse este resultado en el lugar de las milésimas; si dicho resultado es 24 o mayor que 24 se agrega 1 milésima.

EJEMPLO.—Tomando el anterior, *decimos*: la mitad de 10 es 5 (cifra de las décimas); 9 peniques valen $9 \times 4 = 36$ farthings; como el resultado es mayor que 24 agregamos 1 unidad a 36 y tendremos 37 (número de milésimas). Luego 10 chelines y 9 peniques igualan a 5 décimas y 37 milésimas o sea un total de 537 milésimas.

MONEDAS EFECTIVAS

EN ALGUNOS PAISES

y su equivalencia en el franco francés y 1 peseta española (1)

FRANCIA*

VALOR	LEY	DIAMETRO	PESO EXACTO	TOLERANCIA	
				EN LA LEY	EN EL PESO
Piezas de Oro					
100 fr.	0,900	35mm	32 g. 258	0,001	0,001
50	0,900	28	16 g. 129	0,001	0,001
20	0,900	21	6 g. 4516	0,001	0,002
10	0,900	19	3 g. 2258	0,001	0,002
5	0,900	17	1 g. 6129	0,001	0,003
Piezas de Plata					
5 fr.	0,900	37mm	25 g.	0,002	0,003
2	0,835	27	10 g.	0,003	0,005
1	0,835	23	5 g.	0,003	0,005
0,50	0,835	18	2 g. 5	0,003	0,007
0,20	0,835	16	1 g.	0,003	0,010
Piezas de Bronce					
0,10	"	30mm	10 g.	"	0,010
0,05	"	25	5 g.	"	0,010
0,02	"	20	2 g.	"	0,015
** 0,01	"	15	1 g.	"	0,015

*Italia, Bélgica, Suiza y Grecia usan también las mismas monedas de oro y plata.

** Desde 1903 se acuñan también monedas de a 0,25 de níquel.

(1) A la par una peseta equivale a un franco.

MEXICO

(Decreto del 25 de Marzo de 1905)

Unidad monetaria: el peso oro, que contiene 75 centigramos de oro puro y vale a la par 2,58 francos.

Oro

10 pesos	peso : 8 g. 333;	ley : 0,900
5 —	— 4 g. 166;	— "

Plata

1 peso	peso : 27 g. 073;	ley : 0,9027
50 centavos	— 12 g. 50 ;	— 0,800
20 —	— 5 g. ;	— "
10 —	— 2 g. 50 ;	— "

Níquel

5 centavos.

Bronce

2 centavos.
1 centavo.

COLOMBIA

(Ley de 15 de Junio de 1907)

Unidad monetaria: el peso oro de 100 centavos, equivalente a la quinta parte de la libra esterlina inglesa. A la par, vale 5,04 francos.

La unidad usual es el peso papel.

Oro

Cóndor	peso : 9 g. 940;	ley : 0,916 2 3
Medio cóndor	— 4 g. 970;	— "
Peso	— 1 g. 988;	— "

Plata

Peso	peso : 25 g. ;	ley : 0,900
50 centavos	— 12 g. 500;	— 0,835
20 —	— 5 g. ;	— 0,666
10 —	— 2 g. 500;	— "
5 —	— 1 g. 250;	— "

Níquel

5 centavos.
2 —
1 centavo.

ECUADOR*(Ley de 1º de Abril de 1884)*

Unidad monetaria: el *sucre plata*, que vale 5 francos a la par. El *sucre* se descompone en 10 reales o 10 décimos o 100 centavos.

Oro		
Doble cóndor	peso : 32 g. 25806;	ley : 0,900
Cóndor	— 16 g. 12903;	— "
Doblón (2/5 de cóndor)	— 6 g. 45161;	— "
Quinto de cóndor	— 3 g. 22580;	— "
Décimo de cóndor	— 1 g. 61290;	— "

Plata		
Sucre	peso : 25 g. ;	ley : 0,900
Medio sucre	— 12 g. 50 ;	— "
2 décim. de sucre	— 5 g. ;	— "
Décimo de sucre	— 2 g. 50 ;	— "
Medio décimo	— 1 g. 25 ;	— "

Níquel

5 centavos.
1 centavo.
1/2 —

Bronce

2 centavos, 1 centavo,
1/2 —

CUBA*(Leyes monetarias de 1915.)*

Unidad monetaria: el *peso de oro* que a la par vale 5,18 francos. Las monedas de oro y plata de los E. U. tienen también curso legal.

Oro		
20 pesos	pesos : 33 gr. 436;	ley : 0,900
10 —	— 16 gr. 718;	— "
5 —	— 8 gr. 359;	— "
4 —	— 6 gr. 689;	— "
2 —	— 3 gr. 344;	— "

Plata		
1 peso	peso : 26 gr. 7295;	ley : 0,900
40 centavos	— 10 gr.	— "
20 —	— 5 gr.	— "
10 —	— 2 gr. 5	— "

Níquel

5 centavos 2 centavos. 1 centavo.

CHILE*(Ley de 10 de Enero de 1889)*

Unidad monetaria: el *peso oro* de 100 centavos que a la par, vale 1,89 franco.

Oro

Cóndor (20 pesos)	peso : 11 g. 982;	ley : 0,916 2/3
Doblón (10 pesos)	— 5 g. 991;	— "
Escudo (5 pesos)	— 2 g. 9955;	— "

Plata

Peso	peso : 20 g. ;	ley : 0,400
40 centavos	— 8 g. ;	— "
20 —	— 4 g. ;	— "
10 —	— 2 g. ;	— "
5 —	— 1 g. ;	— "

Bronce

2½ centavos 1 centavo
2 — 1/2 —

ARGENTINA*(Ley de 5 de Noviembre de 1881)*

Unidad monetaria: el *peso oro* de 100 centavos que a la par, vale 5 francos. La unidad usual es el *peso papel*, que vale la mitad del peso oro.

Oro

Argentino (5 pesos)	peso : 8 g. 0645;	ley : 0,900
1/2 Argentino	— 4 g. 0322;	— "

Plata

Peso	peso : 25 g. ;	ley : 0,900
50 centavos	— 12 g. 50;	— 0,835
20 —	— 5 g. ;	— "
10 —	— 2 g. 50;	— "
5 —	— 1 g. 25;	— "

Níquel

20 centavos
10 —

Bronce

2 centavos
1 centavo

ESTADOS UNIDOS

(Ley de 14 de Mayo de 1900)

Unidad monetaria: el *dollar oro* igual a 100 dimes o 100 centavos. El *dollar* vale, a la par, 5,18 francos.

Oro

Doble águila (20 dollars)	peso: 33 g. 436;	ley : 0,900
Águila (10 dollars)	— : 16 g. 718;	— "
1/2 Águila	— : 8 g. 359;	— "
1/4 de Águila (2 1/2 dollars)	— : 4 g. 179;	— "
Dollar	— : 1 g. 672;	— "

Plata

Dollar (100 cents.)	peso: 26 g. 729;	ley : 0,900
1/2 dollar (50 cents.)	— : 12 g. 500;	— "
1/4 de dollar (25 cents.)	— : 6 g. 250;	— "
Pieza (20 cents.)	— : 5 g. ;	— "
Dime (10 cents.)	— : 2 g. 500;	— "
Níquel.—5 cents.	Broncs.—1 cent.	

PANAMA

(Decreto del 27 de Junio de 1904)

Unidad monetaria: el *balboa oro* que, a la par, vale 5,18 francos; legalmente equivale a 2 pesos plata.

El *dollar* norteamericano tiene curso legal, con un valor nominal equivalente al del *balboa*.

Oro

20 balboas	peso: 33 g. 44;	ley : 0,900
5 —	— : 16 g. 72;	— "
2 1/2 —	— : 8 g. 36;	— "
1 balboa	— : 4 g. 68;	— "
2 1/2	— : 1 g. 672;	— "

Plata

1 peso ó 1/2 balboa	peso: 25 g. 729;	ley : 0,900
25 cents.	— : 12 g. 50;	— "
10	— : 5 g. ;	— "
5 —	— : 2 g. 50;	— "
2 1/2	— : 1 g. 25;	— "

INGLATERRA

(Ley de 22 de Abril de 1870)

Unidad monetaria: la *libra esterlina* (£) que se divide en 20 shillings (sh), el shilling se divide en 12 pence (d), y el penny en 4 farthings. La *libra esterlina* vale, a la par, 25,22 francos

Oro

Sovereign (libra est.)	peso : 7 g. 988;	ley : 0,916 2/3
1/2 — (10 shill.)	— : 3 g. 994;	— "
2 —	— : 15 g. 976;	— "
5 —	— : 39 g. 940;	— "

Plata

Corona (5 shill.)	peso : 28 g. 276;	ley : 0,925
2 Florines (4 shill.)	— : 22 g. 620;	— "
1/2 Corona (2 1/2 shill.)	— : 14 g. 138;	— "
1 Shilling	— : 5 g. 655;	— "
6 Pence	— : 2 g. 828;	— "

Bronce.— penny. — 1/2 penny. — 1/4 de penny.

ALEMANIA

(Ley de 1º de Junio de 1909)

Unidad monetaria: el *reichmark oro* de 100 pfennige que, a la par, vale 1,235 franco.

Oro

Doble corona (20 marcos)	peso: 7 g. 965;	ley : 0,900
Corona (10 marcos)	— : 3 g. 9825;	— "

Plata

5 marcos	peso : 27 g. 778;	ley : 0,900
3 —	— : 16 g. 666	— "
2 —	— : 11 g. 111;	— "
1 —	— : 5 g. 565;	— "
50 pfennige	— : 2 g. 777;	— "
20 —	— : 1 g. 111;	— "

Níquel

25 pfennige
10 —
5 —

Bronce

2 pfennige
1 pfennig.

VENEZUELA

Unidad Monetaria: el Bolívar oro de 100 céntimos que, a la par, vale 1 franco.

Oro

100 bolívares,	peso : 32 g.	258;	ley : 0,900
20 —	— 6 g.	4516;	— "
10 —	— 3 g.	2258;	— "

Plata

5 bolívares,	peso : 25 g.	;	ley : 0,900
2 —	— 10 g.	;	— 0,835
1 —	— 5 g.	;	— "
50 céntimos,	— 2 g.	500;	— "
25 —	— 1 g.	250;	— "

Níquel

12½ céntimos,	peso : 5 g.	ley : 0,250
5 —	— 2 g.	— 0,250

ESPAÑA

MONEDAS EXTRANJERAS Y SUS EQUIVALENCIAS

(a la par)

NACIONES	MONEDAS EXTRANJERAS	Equivalencia.
Europa		Pesetas.
Alemania	Marco de 100 pfennige	1,23
Austria-Hungría	Corona (oro)	1,05
Bélgica	Franco de 100 céntimos	1,00
Dinamarca	Corona de 100 ore	1,30
Francia	Franco de 100 céntimos	1,00
Grecia	Dracma de 100 leptá	1,00
Inglaterra	Libra esterlina	25,22
Italia	Lira de 100 céntimos	1,00
Países Bajos	Florín de 100 cents	2,10
Portugal	MH reis (oro)	5,60
Rusia	Rublo de 100 kopeks	2,66
Suecia y Noruega	Corona de 100 ore	1,39
Turquía	Plastra	0,23
América		
Brasil	MH reis (oro)	2,83
Colombia	Peso (oro)	5,00
Chile	Peso (oro)	1,89
Estados Unidos	Dólar de 100 centavos	5,18
México	Peso (oro)	2,58
Perú	Sol de 100 céntimos (plata)	2,00
República Argentina	Peso (oro)	5,00
Uruguay	Peso (oro)	5,36
Venezuela	Bolívar (oro)	1,00
Asia.		
Indias Inglesas	Rupla	2,38
Japón	Yen (oro)	2,58

MEDIDAS VARIAS

y sus equivalencias con las medidas métricas
y las antiguas medidas castellanas.

NOMBRE DE LAS MEDIDAS	EQUIVALENCIAS	
	En medidas métricas	En medidas castellanas
Lineales e Itinerarias		
Yarda=3 pies=36 pulgadas	91,4383	1,093883
Vara granadina=4 cuartas =40 pulgadas	80	0,957045
Vara española=3 pies=36 pulgadas	83,5906	1
Ana Hamburguesa=2 pies= 24 pulgadas	57,31	0,685608
Ana Bremense=2 pies=24 pulgadas	57,87	0,692308
Ana Prusiana=25 1/2 pulga- das; 1 pie=12 pulgadas	66,69	0,797823
Metro, unidad métrica	100	1,196308
	Metr. lineal.	Varas lineal.
Kilómetro (unidad itineraria dml.)	1000	1196,31
Mirímetro (10 kilómetros)	10000	11963,08
Legua española (común)	5572,70	6666,66
— (de 20.000 pies geo- métricos)	5555,55	6646,15
— Colombiana 5 kilóme- tros	5000	5981,54
Milla inglesa (común) 1760 yardas	1609,314	1925,23
	Metros cuad.	Varas cuad.
Superficiales y Agrarias		
Metro cuadrado	1	1,431153
Yarda cuadrada	0,836096	1,196581
Vara — (española)	0,69874	1
— — (granadina)	0,6400	0,915938
	Metros cuad.	Varas cuad.
Area (cuadrado de 10 m. por lado)	100	143,115
Hectárea, 100 áreas	10000	14311,53

MEDIDAS DE COLOMBIA

(Continuación)

NOMBRE DE LAS MEDIDAS	EQUIVALENCIAS	
	En medidas métricas	En medidas castellanas
Superficiales y Agrarias.		
Fanegada de 100 v. cast. por lado	6987,39	10000
Fanegada, de 100 v. gr. por lado	6400	9159,38
Acre (o 4840 yardas cua- dradas)	4046,71	5791,45
Cúbicas y de capacidad		
	Decim. cúb.	Medida cast.
Litro (cubo de 1 dm. por lado)	1	80 pulg. cúb. 1 quart. y 4 cop.
Hectolitro (o sea 100 litros)	100	6,198
Galón Inglés, imperial=4 quarts; cada uno=2 pin- tas; cada una 4 gills.	4,543	0,281 cánt.
Galón norteamericano (Id.)	3,785	0,235
		Pies cúb.
Vara cúbica española (27 pies cbs.)	584,079	27
Tonelada mensural decimal (m ³)	1000	46,226
Tonelada inglesa (40 p. cúb. Ingl.)	1132,612	52,356
Ponderales		
	Gramos.	En peso cast.
Kilogramo o kilo=2 lbs. decimales	1000	21., 2o. 12 2/5a.
Libra decimal=1/2 kilogra- mo	500	1 1 6 1/5
Libra vienesa	560,01	1,217,178
Libra española del comer- cio, dividida en 16 on- zas; cada una 16 adar- mas; cada uno 36 granos.	460,093	1
Libra española farmacéuti- ca, dividida en 12 onzas; cada una 8 dracmas; ca- da una 3 escrúpulos; ca- da uno 24 granos.	345,069	1 on. = 29 gr. 1 dr. = 36 dg. 1 es. = 12 dg. 1 gr. = 50 mg.

MEDIDAS DE COLOMBIA

(Continuación)

NOMBRE DE LAS MEDIDAS	EQUIVALENCIAS	
	En medidas métricas	En medidas castellanas
Ponderales.	Gramos	En peso cast.
Libra española de pesar oro, (16 onzas)=2 marcos; cada uno 50 castellanos; cada uno 8 tomines; cada uno 12 granos.	460,093	onza=2875 eg. cast.=4601 mg.
Libra inglesa del comercio, dividida en 16 onzas; cada una 16 adarmes.	453,598	tom.=575 grano.=48— 0,985883
Libra inglesa (de Troya) para oro etc. dividida en 12 onzas; cada una 20 pennyweights; cada uno 24 granos.	473,24	0 lbs. 15 o. 121/3 a.
	Kilogramos	Libras cast.
Quintal Inglés=112 lbs. inglesas.	50,80	110,42
Quintal norteamericano=100 lbs. inglesas	45,36	98,59
Tonelada Inglesa: =20 quintales=2240 lbs.	1016,06	2208,38
Tonelada norteameric. =2000 lbs. inglesas	907,19	1971,75
Tonelada decimal	1000	2173,474

CUADRO DEL SISTEMA METRICO



Depósito: Paris, rue de Sévres, 78.

- A. Pegado en tela, con dos varillas para suspenderlo
 B. Pegado en tela, barnizado y aparejado sobre garganta y rollo.

Este Cuadro, cuyas dimensiones son 109 c/m×131 c/m, representa las medidas métricas en su verdadero tamaño y color. Las medidas van agrupadas de modo que las que tienen correspondencia están en una misma línea vertical.

Una casilla indica la relación que tienen entre sí las varias medidas de longitud, de superficie y de volumen.

En el presente cuadro reducido, las medidas métricas están representadas en 1/15 de su tamaño verdadero.

INDICE

	Págs
Advertencia	5
Definiciones preliminares	7

PARTE I

NÚMEROS ENTEROS

Cap. I. — Numeración	9
Cap. II. — Adición	18
Cap. III. — Sustracción	22
Cap. IV. — Multiplicación	30
Cap. V. — División	48
Cap. VI. — Divisibilidad	66
Cap. VII. — Máximo Común divisor	76
Cap. VIII. — Números primos	79

PARTE II

NÚMEROS QUEBRADOS

Cap. I. — Quebrados comunes.—Reducciones ..	96
Cap. II. — Operaciones con los quebrados comunes	113
Cap. III. — Fracciones y números decimales	140

RAÍCES

Cap. I. — Raíz cuadrada	161
Cap. II. — Raíz cúbica	179

PARTE III

SISTEMA MÉTRICO

Preliminares	191
Cap. I. — Medidas de longitud	193
Cap. II. — Medidas de superficie	196
Cap. III. — Medidas de volumen	201

	Págs.
Cap. IV. — Medidas de capacidad	205
Cap. V. — Medidas de peso	209
Cap. VI. — Medidas monetarias	214
Números complejos	227

PARTE IV

NÚMEROS PROPORCIONALES

Cap. I. — Proporciones	246
Cap. II. — Regla de tres	255
Cap. III. — Regla de interés	262
Cap. IV. — Regla de descuento. — Vencimiento común de pagos	273
Cap. V. — Repartimientos proporcionales. — Re- gla de compañía	288
Cap. VI. — Término medio. — Mezcla y ligación	298
Cap. VII. — Regla conjunta	308
Cap. VIII. — Regla de falsa posición	310

PARTE COMERCIAL

Cap. I. — Efectos de comercio	316
Cap. II. — Cálculo del interés por los métodos co- merciales	324
Cap. III. — Cuentas corrientes	339
Cap. IV. — Cambio	346
Cap. V. — Comisión y corretaje	355
Cap. VI. — Seguros. — Transportes. — Cuentas almacenaje. — Derechos de aduana	359
Cap. VII. — Progresiones. — Logaritmos. — Inte- reses compuestos	368

PROBLEMAS DE REPASO	392
Medidas que no se ajustan al sistema métrico decimal	420
Tabla de las monedas de varias naciones	426
Medidas antiguas de Colombia, y sus equivalencias..	434

TIP. BEDOUT - MEDELLIN
EDITORES Y DISTRIBUIDORES EN EL OCCIDENTE COLOMBIANO
LIBRERIA BEDOUT - MEDELLIN

press on 11 / 188

EXTRACTO DEL CATALOGO

LIBROS ELEMENTALES PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS

Nº 470. EJERCICIOS DE CALCULO sobre las cuatro reglas fundamentales. In-18º, de 72 páginas.

Nº 470 b. EL MISMO, MAESTRO.

Nº 471. COMPENDIO DE ARITMETICA para las clases infimas. In-18º, de 124 páginas.

Nº 471 b. EL MISMO, MAESTRO.

Nº 472. TRATADO DEL SISTEMA METRICO DECIMAL.—

Nº 472 b. EL MISMO, MAESTRO.

Nº 468. ARITMETICA, CURSO ELEMENTAL.—In-12º, de 192 páginas, con buen número de grabados.

En esta obrita se aplica el método intuitivo para explicar las cuatro operaciones, los números decimales, los quebrados, etc. Por la variedad de los caracteres tipográficos y la belleza de los grabados este libro es muy atractivo para los niños.

Nº 468 b. EL MISMO, MAESTRO.

Nº 475. ARITMETICA, CURSO SUPERIOR.—In-12º, de 416 páginas.

Esta obra comprende la misma materia que el curso medio con más completo desarrollo y mayor número de ejercicios de aplicación. Contiene además unas *Nociones de Comercio*, que forman una introducción útil a las clases de esta asignatura.

Nº 475 b. EL MISMO, MAESTRO.

Nº 476. PRIMERAS NOCIONES DE ALGEBRA.—In-12º de 92 páginas.

La obrita consta de tres partes. Iª, Cálculo algebraico. IIª, Ecuaciones de primer grado. IIIª, Ecuaciones de segundo grado. Los problemas y ejercicios son numerosísimos.

Nº 476 b. EL MISMO, MAESTRO.

Nº 477. NOCIONES ELEMENTALES DE GEOMETRIA APLICADAS AL DIBUJO LINEAL.—In-12º, de 108 páginas, con muchísimos grabados.

Esta obrita se divide en cuatro partes: Iª, Líneas y ángulos. IIª, Circunferencia. IIIª, Superficies. IVª, Sólidos. Los ejercicios de aplicación al dibujo son numerosos para cada parte.

Nº 477 b. SOLUCIONES Y RESPUESTAS DEL ANTERIOR.

EDITORES Y DISTRIBUIDORES EN EL OCCIDENTE COLOMBIANO

LIBRERIA BEDOUT.—FELIX DE BEDOUT E HIJOS