Lógica Matemática
con aplicaciones

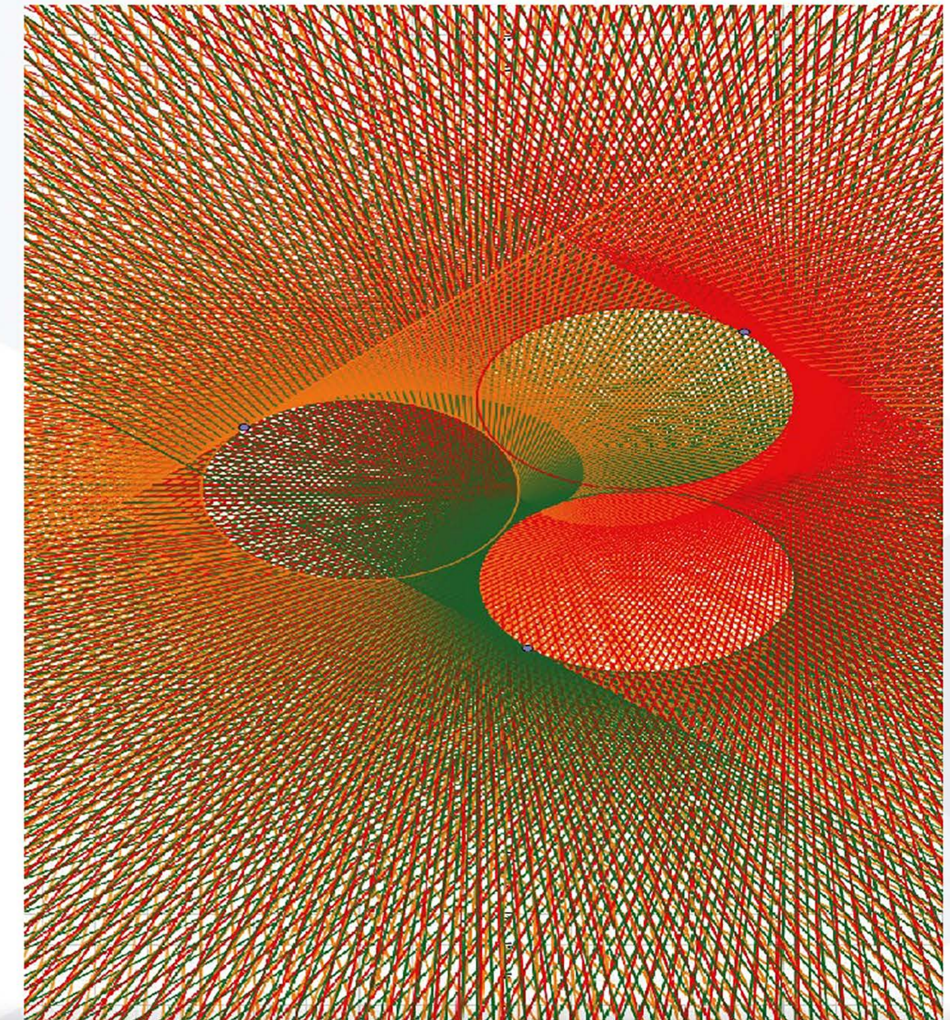
Escanée el código QR para conocer más títulos publicados por el Sello Editorial Universidad del Atlántico

ISBN: 978-958-5173-87-3

Lógica Matemática con aplicaciones

Julio César Romero Pabón Roberto Enrique Figueroa Molina Gabriel Mauricio Vergara Ríos

Sello Editorial
UNIVERSIDAD
DEL ATLÁNTICO



Lógica Matemática
con aplicaciones

JULIO CÉSAR ROMERO PABÓN
ROBERTO ENRIQUE FIGUEROA MOLINA
GABRIEL MAURICIO VERGARA RÍOS

Lógica Matemática
con aplicaciones

Romero Pabón, Julio Cesar -- Figueroa Molina, Roberto Enrique --
Vergara Ríos, Gabriel Mauricio.

Lógica Matemática con aplicaciones. / Julio Cesar Romero Pabón, Roberto Enrique Figueroa Molina, Gabriel Mauricio Vergara Ríos – 1 edición. – Puerto Colombia, Colombia: Sello Editorial Universidad del Atlántico, 2021.

Incluye bibliografía. Ilustraciones.

ISBN: 978-958-5173-87-3 (Digital descargable)

1. Lógica simbólica y matemática-- Problemas, ejercicios. 2. Lógica. 3. Sistema binario (matemáticas). 4. Inferencia (Lógica). I. Autor. II. Título.

CDD: 510 R763

Los datos consignados en la catalogación fueron tomados del registro del título en la Cámara del Libro en fecha 2021-12-22, bajo radicado No. 427277 [Consultado el 8 de enero de 2022 según registro adjunto a la solicitud de catalogación].

LÓGICA MATEMÁTICAS CON APLICACIONES
Autoría: Julio Cesar Romero Pabón - Roberto Enrique Figueroa
Gabriel Mauricio Vergara Ríos

Edición:
Sello Editorial Universidad del Atlántico
Km 7 Vía Puerto Colombia (Atlántico)
www.uniatlantico.edu.co
publicaciones@mail.uniatlantico.edu.co

Producción Editorial:
Calidad Gráfica S.A.
Av. Circunvalar Calle 110 No. 6QSN-522
PBX: 336 8000
lsalcedo@calidadgrafica.com.co
Barranquilla, Colombia

Publicación Electrónica
Barranquilla (Colombia), 2021

Cómo citar este libro:
Romero Pabón, J. C., Figueroa, R. E. y Vergara Ríos, G. (2021). *Fundamentos de análisis matemáticos* (p.103). Barranquilla: Sello Editorial Universidad del Atlántico.

Universidad del Atlántico

Lógica Matemática
con aplicaciones

JULIO CÉSAR ROMERO PABÓN
ROBERTO ENRIQUE FIGUEROA
GABRIEL MAURICIO VERGARA RÍOS

Sello Editorial
UNIVERSIDAD DEL ATLÁNTICO

CONTENIDO

UNIDAD II

PRESENTACIÓN

Esta obra está orientada a fortalecer los procesos de enseñanza y aprendizaje de la lógica matemática en las instituciones de educación superior. Para que los estudiantes y docentes dispongan de un material bibliográfico cuando estén solucionando un problema en sus investigaciones o en el trabajo, el libro contempla reglas, leyes y teoremas que son útiles para todos los campos del conocimiento, porque con ellos es posible comprender y aplicar tópicos relacionados con la lógica y sus aplicaciones.

La intención de esta obra es presentar un material sobre lógica matemática completo y fácil de comprender, para llegar no solo a los interesados en entender la lógica, que tanto se usa y se aplica en la realidad, sino también a los estudiantes que no estén interesados en la lógica matemática como disciplina, pero sí como herramienta útil en otras áreas de conocimiento.

El mayor esfuerzo de este proyecto sobre la enseñanza y aprendizaje de la lógica matemática va dirigido al estudiante, pues en el libro los temas son presentados con una gran variedad de estrategias encaminadas a brindar un escenario significativo para el aprendizaje de la lógica. Es por estas razones que los ejemplos fueron diseñados y seleccionados para que el estudiante o lector comprenda y aplique fácilmente cada uno de los tópicos tratados en esta obra.

Docentes expertos en la materia se encargaron de la revisión de: la teoría, los ejemplos, los talleres y aplicaciones, que contribuyeran con potenciar este proyecto de matemáticas. Es por esto que hoy consideramos conveniente presentar esta obra, porque cada uno de sus capítulos fue elaborado para que el lector conciba y aplique cada uno de los temas sobre la lógica tratados en este libro.

PRÓLOGO

Esta obra sobre la lógica matemática fue diseñada como una guía de estudio para los estudiantes y docentes universitarios que estén cursando o necesiten aplicar los tópicos fundamentales de la lógica. Los conceptos, ejemplos y los problemas resueltos son explicados didácticamente, lo cual se puede evidenciar cuando se analiza o resuelve un problema, el cual es realizado paso a paso en cada uno de los temas tratados en esta obra. Además, se incorporan definiciones, reglas, leyes y teoremas que son fundamentales para abordar la solución de los problemas.

Nuestra experiencia como docentes de matemática durante muchos años, nos ha enseñado que esta materia es difícil de aprender sin analizarla y comprenderla, por ello es necesario practicarla y aplicarla, por tal motivo, se han incorporado al final de cada capítulo un grupo de problemas propuestos, con el fin de que el estudiante y el docente los realicen, para que así puedan reconstruir un aprendizaje sólido sobre la lógica matemática, a través de las situaciones significativas que son expresadas en los conceptos, ejemplos, ejercicios o talleres de aplicación.

LOS AUTORES

INTRODUCCIÓN

Este libro ha sido elaborado a partir de las notas de clase de los cursos de lógica matemática que hemos impartido en la Universidad. El objetivo de esta obra es servir como material de apoyo académico para la orientación de los estudiantes acerca de lógica matemática y sus aplicaciones. Es por esta razón que se ha seleccionado este material para la construcción de esta obra académica; la forma como se ha diseñado y ordenado este libro están encaminados a un modelo pedagógico que facilite al estudiante la comprensión de temas tan importantes y complejos tratados aquí.

Esta obra está dirigida principalmente a los estudiantes universitarios que cursan o estudian la lógica matemática, pero puede ser útil también a alumnos de otras titulaciones afines con la matemática y sus aplicaciones. Este trabajo ha surgido de la experiencia docente de los autores. En función de estas circunstancias, se ha procurado un estilo de exposición detallado y pedagógico, incluyendo numerosos conceptos, ejercicios, aplicaciones y talleres.

En lo referente a los contenidos, se han diseñado tres grandes unidades que comprenden los siguientes temas: los sistemas de numeración, la lógica y la relación de los conjuntos con la lógica matemática; en cada una de estas unidades están presentes los siguientes aspectos: las teorías fundamentales, ejemplos o ejercicios para reafirmar los conceptos y los talleres para desarrollar las competencias adquiridas en cada una de estas unidades. Todo este trabajo se ha redactado con una especial dedicación para que el lector se sienta bien ilustrado en los diferentes tópicos que conforman este libro de lógica matemática.

UNIDAD I | 1. SISTEMA DE NUMERACIÓN

El sistema de numeración decimal se caracteriza por ser un sistema de numeración posicional, debido a que las cantidades se representan usando como base las potencias del número diez. El conjunto de símbolos utilizado en este sistema es la numeración arábiga.

En el sistema de numeración decimal los números se forman usando la combinan de una forma sistemática los diez símbolos o dígitos: {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9}; este conjunto de números nos permite representar las cantidades y ejecutar con ellos operaciones de la aritmética.

La forma común en base 10 de los números es:

$$N_{10} = \cdots + S_3 * 10^3 + S_2 * 10^2 + S_1 * 10^1 + S_0 * 10^0 + S_{-1} * 10^{-1} + S_{-2} * 10^{-2} + \ldots.$$

La letra N representa el número completo, el subíndice indica que el número está escrito en base 10. S representa un símbolo cualquiera de los 10 dígitos del sistema de base 10. Ejemplo:

$$N_{10} = 3529.48 = 3 * 10^3 + 5 * 10^2 + 2 * 10^1 + 9 * 10^0 + 4 * 10^{-1} + 8 * 10^{-2}$$

1.1 Otros sistemas de numeración

Un sistema de numeración se considera como un conjunto de símbolos y reglas que permiten generar o construir todos los números que usa el hombre. Es por ello que el sistema de numeración se puede representar matemáticamente de la siguiente forma:

- **N** = (**S**, **R**) donde:
- **N** representa el sistema de numeración, el cual puede ser considerado como: (decimal, binario, hexadecimal, etc.).
- **S** indica el conjunto de símbolos que se usan o permiten en el sistema. Que en el caso del sistema decimal está dado por {0, 1 ,...9}; en el sistema binario o de base dos es {0,1}; en el sistema octal o de base 8 son {0,1,...7} y en el sistema hexadecimal o de base 16 son {0,1,...9, A, B, C, D, E, F}.
- **R** son las reglas que nos dicen qué números y qué operaciones están permitidas en el sistema, y cuáles no. En un sistema de numeración basado en la posición las reglas son bastante simples, mientras que otros sistemas requieren de otras reglas o condiciones, por ejemplo, el sistema de numeración romana requiere de reglas diferentes para su funcionamiento y operabilidad.

Los sistemas de numeración poseen reglas diferentes unos de otros, pero se ha analizado una regla común en todos los sistemas, que consiste en que para construir números que sean válidos en un sistema de numeración determinado solo se requiere utilizar los símbolos permitidos en ese sistema.

Para indicar en qué sistema de numeración se está trabajando se representa una cantidad y se le escribe en un subíndice a la derecha el número de símbolos que se pueden representar en el sistema que se está trabajando.

Clasificación de los sistemas de numeración

El estudio de los sistemas de numeración los ha clasificado en dos grandes grupos que son: posicionales y no-posicionales:

- En los sistemas no-posicionales los números o dígitos tienen el valor del símbolo empleado o utilizado, el cual no depende de la posición que está ocupando en el número.
- En los sistemas de numeración posicionales conocidos también como ponderados o el valor de un dígito o número depende tanto del símbolo que se usa, como de la posición que ese símbolo esté ocupando en el número que está formando.

Un ejemplo de ello es el sistema de numeración usado por los egipcios, el cual se caracteriza por ser no posicional, mientras que el sistema de numeración usado por los babilónicos es posicional. Las lenguas usadas por el hombre poseen un sistema de numeración posicional basado en base diez (10) o veinte (20), a veces con subsistemas que usan cinco elementos. Además, en algunas pocas lenguas los numerales básicos a partir de cuatro se les asignan nombres basados en numerales más pequeños.

Sistema de numeración

Los sistemas de numeración son muy antiguos, el hombre los usaba para contar, por ejemplo, los dedos de la mano, para representar la cantidad de cinco y después se hablaba de cuántas manos o cinco se tenía. También se empleaban cuerdas con nudos para acordarse o representar la cantidad que se tenía de algo. Todo esto tiene mucho que ver con el concepto de coordinabilidad entre conjuntos. Entre ellos están los sistemas de numeración del antiguo Egipto, el sistema de numeración romana, y los usados en América como por ejemplo la civilización de los mayas, aztecas y otros pueblos.

Se ha comprobado que otras civilizaciones ubicadas en mesoamericanas diferentes a la cultura de los mayas utilizaban un sistema de numeración con raíz mixta de base vigesimal (20). Es importante resaltar que la cultura Maya también desarrolló el concepto de cero, pues existen evidencias como inscripciones datadas hacia el año 36 a.C. que así lo atestiguan.

Sistemas de numeración posicionales

El número de símbolos que se permiten en un sistema de numeración posicional se le denomina o conoce como base del sistema de numeración. Si un sistema de numeración posicional se caracteriza por tener una base b, esto significa que disponemos de b símbolos diferentes para construir o escribir los números, y que b unidades conforma una unidad de orden superior.

Estructura de los números con su base

La forma común general de los números para todas las bases se escribe:

$$N_B = \cdots + S_3 * B^3 + S_2 * B^2 + S_1 * B^1 + S_0 * B^0 + S_{-1} * B^{-1} + S_{-2} * B^{-2} + \ldots.$$

Donde B es la base del sistema

Se ha aceptado como una convención universal utilizar para los diferentes sistemas los 10 símbolos del sistema decimal y para aquellos sistemas que requieren más símbolos, las letras del alfabeto desde A hasta la F.

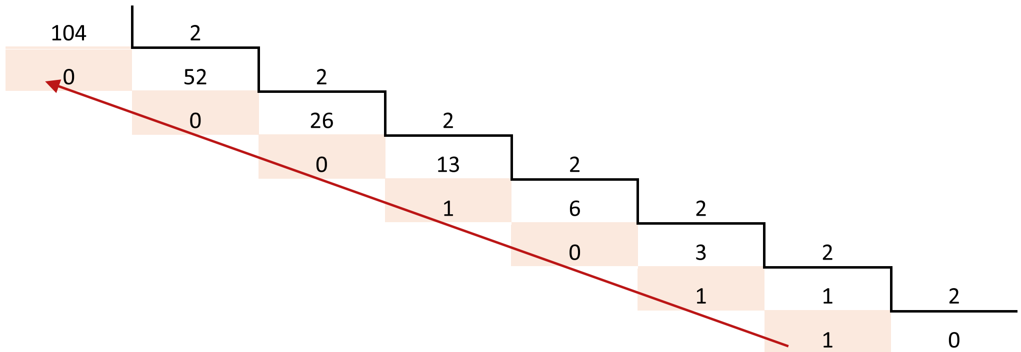
Los primeros 15 sistemas de numeración

Base	Nombre	Símbolo (dígitos del sistema)
2	Binario (se usa en el pc)	0 1
3	Ternario	0 1 2
4	Cuaternario	0 1 2 3
5	Quinario	0 1 2 3 4
6	Hexal	0 1 2 3 4 5
7	Septsal	0 1 2 3 4 5 6
8	Octal (se usa en el pc)	0 1 2 3 4 5 6 7
9	Nonario	0 1 2 3 4 5 6 7 8
10	Decimal	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
11	Undecimal	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A
12	Duodecimal	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B
13	Tridecimal	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C
14	Tetradecimal	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C D
15	Pentadecimal	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C D E
16	Hexadecimal (se usa en el pc)	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C D E F

1.1.1 El sistema binario

El sistema de numeración de base dos (2) también conocido como sistema diádico en ciencias de la computación, es un sistema de numeración que se representan los números utilizando solamente dos dígitos que son: cero y uno (0 y 1). Este sistema es utilizado en las computadoras, debido a que estas trabajan en sus circuitos con dos niveles de voltaje, por lo cual su sistema de numeración natural es el sistema binario, en este caso el del dígito 1 significa que esta encendido y el del dígito 0 que está apagado.

Ejemplo 1.1: Transformar el número decimal 104 en binario.



Luego se tiene que: $104_{10} = 1101000_2$

Binario A Decimal

Para realizar la conversión de un número binario a un número decimal, se realizan los siguientes pasos:

1. Inicie siempre por el lado derecho del número binario. Luego, multiplique cada dígito por dos (2) elevado a la potencia consecutiva, comience por la potencia de 2^0.
2. Una vez realizadas cada una de las multiplicaciones proceda a sumarlas todas, el número resultante de esta suma será el número equivalente al sistema decimal.

Ejemplos 1.2: Convertir a decimal el número

Los números exponentes en cada número indican la potencia a la que hay que elevar 2.

1.1.2 Aplicaciones del sistema binario en la memoria de un PC

Ahora se explicará cómo trabaja la memoria de un computador con el sistema de numeración binario, para ello analizaremos cómo es procesado el número en base decimal -103.5 en una máquina computacional que guarda la información en una memoria de 16 bits. De los cuales el primer bit para el signo del número, los siguientes cuatro para el signo y la magnitud del exponente, y los últimos 11 bit para la magnitud de la mantisa. La estructura de la memoria es:

signo del número	**exponente y su signo**				**Mantisa o punto flotante**										

- El usuario digita el número en base decimal: -103.5
- La máquina lo convierte en base binaria: -1100111.1
- La mantisa o punto flotante el número binario: - .11001111
- El exponente es número de espacios corridos por punto que en este caso es 7, es positivo porque se corrió hacia la izquierda el punto. Este número en binario es 111.

La mantisa y el exponente en base binaria es almacenado en la memoria de la siguiente forma:

signo del número	**exponente y su signo**				**Mantisa o punto flotante**										
1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0

Para decodificar este número a base decimal para el usuario el computador realiza la siguiente operación:

$$\begin{aligned} Número\ en\ base\ 10 \\ &= (-1)^1 * 2^{(-1)^0(1*2^2+1*2^1+1*2^0)} \\ &* (1*2^{-1}+1*2^{-2}+0*2^{-3}+0*2^{-4}+1*2^{-5}+1*2^{-6}+1*2^{-7}+1*2^{-8}+0 \\ &* 2^{-9}+0*2^{-10}+0*2^{-11}) = -103{,}5 \end{aligned}$$

1.2 Conversión de decimal a otro sistema

El algoritmo que permite realizar la conversión de un número que está en el sistema decimal equivalente al mismo número expresado en sistema con otra base, tiene dos procesos que son: una para decimales enteros y otra para fracciones decimales.

Ejemplo 1.3: Convertir el número 125.95 a base 6.

Solución: El primer paso es separar la parte entera de la parte fraccionaria.125 es la parte entera y 0.95 su parte fraccionaria

- Conversión de la parte entera del número decimal:

$$\mathbf{125_{10} = 325_{6}}$$

El procedimiento es así: divida en seis (6) el número 125 sucesivamente, de tal forma que el último cociente y seguido de los sucesivos residuos, los cuales deben ser leídos de derecha a izquierda, proporciona el número hexal equivalente al número entero decimal.

- La parte fraccionaria se multiplica por la base del número deseado. Se prepara la parte entera del número del producto y se designa con S_{-1}. Así, en el ejemplo:

  0.95*6=5.70; la parte entera 5 es la primera cifra de la fracción hexal $S_{-1} = 5$. Seguidamente, la parte fraccionaria del nuevo producto se multiplica por la base: 0.70*6=4.20 y la parte entera de este producto es la segunda cifra de la fracción hexal $S_{-2} = 4$.

  Se repite el proceso de multiplicación de las partes fraccionarias de los sucesivos productos por la base deseada.

  0.20*6=1.20 entonces $S_{-3} = 1$.

  De donde $0.95_{10} = 0.541\ldots_{6}$

  Luego la conversión final es: $\mathbf{125.95_{10} = 325.54(1)_{6}}$

1.3 Conversión de decimal a octal

Para convertir un número decimal a octal se hace usando los mismos pasos que los utilizados para la conversión a binario, mediante divisiones sucesivas por ocho (8) y colocando los residuos que se obtienen en orden inverso.

Ejemplo 1.4: Para convertir en octal el número decimal dado por 122(10) se tiene que las siguientes divisiones:

División	Cociente	Residuo
122/8	15	2
15/8	1	7
1/8	0	1

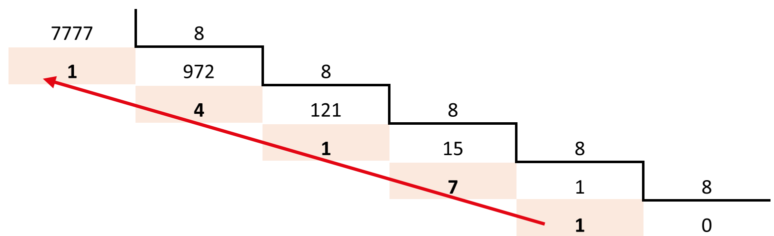
Tomando los residuos que se obtienen en orden inverso
se llega a la cifra octal: $122_{(10)} = 172_{(8)}$

Ejemplo 1.5: Convertir el número 7777 de base decimal a base octal.

Solución:

Decimal: 7777

Realizamos las divisiones sucesivas del número decimal entre (8), esto es



Donde se obtiene que:

División	Cociente	Residuo
7777/8	972	1
972/8	121	4
121/8	15	1
15/8	1	7
1/8	0	1

Por último, el número equivalente en base octal es:

Octal: 17141

1.4 Conversión de decimal a hexadecimal

Ejemplo 1.6: Realice la conversión del número $1869_{(10)}$ a hexadecimal.

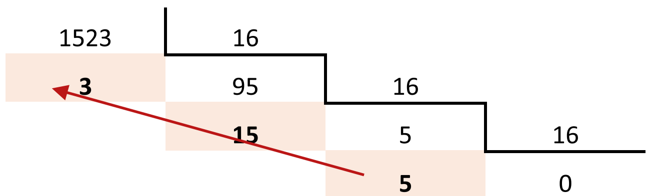
Solución: El resultado en hexadecimal de $1869_{(10)}$ es $74D_{(16)}$.

Ejemplo 1.7: Convertir el número $1523_{(10)}$ a su equivalente en Hexadecimal.

Solución:

Decimal: 1523

Realizamos las divisiones sucesivas del número decimal entre (16), esto es



Donde se obtiene que:

División	Cociente	Residuo
1523/16	95	3
95/16	5	15
5/16	0	5

Hexadecimal: 5 15 3 = 5 F 3

Ejemplo 1.8: Convertir el número 31F16 a decimal.

Solución: 31F16 $= 3x16^2 + 1x16^1 + 15 \text{ x } 16^0$

$= 3x256 + 16 + 15$

$= 768 + 31$

$= 79910$

Ejemplo 1.9: Convertir el número hexadecimal 2B6 a su equivalente decimal.

Solución: Multiplicamos el valor de posición de cada columna por el número hexadecimal correspondiente. El resultado del número decimal equivalente se obtiene al sumar todos los productos que son obtenidos en el paso anterior.

$$\mathbf{2B6_{16}} = 2 * 16^2 + B * 16^1 + 6 * 16^0$$

$$\mathbf{2B6_{16}} = 2 * 16^2 + (11) * 16^1 + 6 * 16^0 = 2 * 256 + 11 * 16 + 6 * 1 = 512 + 176 + 6 = \mathbf{694}$$

1.5 Operaciones con binarios

1.5.1 La Suma y la resta con números binarios

Suma dos bits, se realiza con base en las siguientes reglas:

$$0 + 0 = 0$$
$$0 + 1 = 1$$
$$1 + 0 = 1$$
$$1 + 1 = 10$$

Resta de dos bits, se realiza con base en las siguientes reglas:

$$0 - 0 = 0$$
$$1 - 0 = 1$$
$$1 - 1 = 0$$

0 - 1 = no se puede o se pide prestado al próximo.

Ejemplo 1.10: Analizar las siguientes sumas con binarios:

- **a.** 0 + 0 = 0
- **b.** 1 + 0 = 1
- **c.** 0 + 1 = 1
- **d.** 1 + 1 = 10
- **e.** 1 + 1 + 1 = 11
- **f.** 1 + 1 + 1 + 1 = 100
- **g.** 1 + 1 + 1 + 1 + 1= 101
- **h.** 1 + 1 + 1 + 1 + 1+ 1= 110
- **i.** 1 + 1 + 1 + 1 + 1+ 1 + 1= 111
- **j.** 1 + 1 + 1 + 1 + 1+ 1 + 1 + 1= 1000
- **k.** 1 + 1 + 1 + 1 + 1+ 1 + 1 + 1 + 1= 1001

l. 1 + 1 + 1 + 1 + 1+ 1 + 1 + 1 + 1 + 1= 1010

m. 1 + 1 + 1 + 1 + 1+ 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1= 1011

n. 1 + 1 + 1 + 1 + 1+ 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1= 1100

o. 1 + 1 + 1 + 1 + 1+ 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1= 1101

p. 1 + 1 + 1 + 1 + 1+ 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1= 1110

q. 1 + 1 + 1 + 1 + 1+ 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1= 1111

r. 1 + 1 + 1 + 1 + 1+ 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 10000

Ejemplo 1.11: Efectuar las siguientes operaciones:

a. 1011010 + 1011

b. 1101011 + 1101 + 11011

Solución

a)	b)
1011010 + 1011 1100101	1101011 1101 + 11011 10010011

Ejemplo 1.12: Efectuar las siguientes operaciones:

a. 11.01101 + 111.0101 + 1.01 + 1111.111

b. 1111.111 - 100.101

c. 100000.11001 - 10011.00111

Solución:

a)	b)	c)
11.01101 + 111.01010 1.01000 1111.11100 11011.11011	1111.111 - 100.101 1011.010	100000.11001 - 10011.00111 1101.10010

1.5.2 Multiplicación de binario con números binarios

La multiplicación dos bits, se realiza con base en las siguientes reglas:

$$0 * 0 = 0$$
$$0 * 1 = 0$$
$$1 * 0 = 0$$
$$1 * 1 = 1$$

Ejemplos 1.13: Efectuar las siguientes multiplicaciones:

- **a.** 101 x 11
- **b.** 11.1 x 1.1
- **c.** 11.101 x 1.01

Solución:

a)	b)	c)
101	11.1	11.101
x 11	x 1.1	x 1.01
101	111	11101
101	111	00000
1111	101.01	11101
		100.10001

1.5.3 División de binarios con números binarios

La multiplicación dos bits, se realiza con base en las siguientes reglas:

$$0 / 0 = \text{indeterminado}$$
$$0 / 1 = 0$$
$$1 / 0 = \text{indeterminado}$$
$$1 / 1 = 1$$

Ejemplo 14: Calcular la siguiente división en el sistema binario: 11101101/1101

Solución:

$$\frac{11101101}{1101} = 10010$$

Este resultado se obtiene de:

$$
\begin{array}{r|l}
1\,1\,1\,0'\,1\,1\,0\,1 & 1\,1\,0\,1 \\ \cline{2-2}
-1\,1\,0\,1\quad\quad\quad\; & 1\,0\,0\,1\,0 \\ \cline{1-1}
1\,1\,1\,0\quad\; & \\
-1\,1\,0\,1\quad\; & \\ \cline{1-1}
1\quad\; & \\
-\;0\quad\; & \\ \cline{1-1}
1\quad\; &
\end{array}
$$

Ejemplos 1.14: Efectuar las siguientes divisiones:

a) 10.01 / 1.1 b) 1.111 / 0.11 c) 11.11 / 10.1

Solución:

- **a.** 10.01 / 1.1 = $\frac{100.1}{11}$ = 1.1
- **b.** 1.111 / 0.11 = $\frac{111.1}{11}$ = 10.1
- **c.** 11.11 / 10.1 = $\frac{111.1}{101}$ = 1.1

1.6 Códigos de computador

Los sistemas numéricos usados en computación, además del sistema binario, son: decimal codificado en binario o sistema BCD (Binary Code Decima), el sistema octal y el sistema hexadecimal.

Los códigos utilizados en computación pueden ser: códigos binarios con peso, como el BCD, y códigos binarios sin peso, por ejemplo, el código de exceso 3 (XS3) y el código de Gray, el cual se forma teniendo en cuenta que cada incremento en el proceso de contar implica solamente el cambio de estado de un solo bit. Otros códigos son los detectores y correctores de error, los cuales utilizan el bit de paridad, que un bit extra que viaja con la palabra y que puede ser indicador de un número par o impar de señales. El código de Hamming fue diseñado como un corrector de errores.

1.6.1 Código BCD (Binary Code Decimal)

El código BCD necesita más bit que el binario directo para representar números decimales de más de un dígito. La ventaja del código es la facilidad de interconversión con el decimal. Solo es necesario saber los grupos de cuatro bits para los dígitos decimales de 0 a 9. Esta interconversión es importante por los circuitos (Hardware) que se pueden utilizar, ya que en los sistemas digitales son los circuitos lógicos los que efectúan las interconversiones.

En el sistema BCD los números poseen un formato de codificación en binarios, tal que cada dígito decimal se representa mediante un conjunto de cuatro dígitos binarios, así:

Decimal	BCD
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001

Los grupos de cuatro decimales identifican cada uno de los diez dígitos decimales del 0 al 9. Cada dígito decimal se representa por un grupo de cuatro bits. Por ejemplo, el número 1523 en el sistema BCD se escribe: 0001 0101 0010 0011, cuando su valor como número binario es de: 10111110011.

1.6.2 Código octal

Cuando se usa una gran cantidad de números del sistema binarios con muchos bits, se recomienda convertirlos o escribirlos en octal y no en binario. Sin embargo, los sistemas y circuitos digitales operan exclusivamente en binario y si usa el sistema octal o hexadecimal por la conveniencia de su interconversión inmediata.

Ejemplo 1.15: El número 13.375, compare su notación en octal con su notación en binario.

En base diez

$13.375 = 13 + 0.375$

$13.375_{10} = 15.3_8 = 1101.011_2$

Observe que, separando el número binario en tríadas de bits, comenzando en el punto binario, se obtiene el número octal correspondiente.

La siguiente tabla muestra la equivalencia entre el dígito octal y el número octal codificado en binario.

Octal	Binario
0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

Los números binarios puros pueden convertirse en números octales agrupando los dígitos binarios en tríadas de bits comenzando con el puto binario. Si es necesario agregar ceros a la derecha e izquierda para formar tríadas completas, debe hacerse.

Para convertir número octales en sus correspondientes binarios se debe hacer la conversión de cada octal en su correspondiente tríada de bits.

Ejemplo 1.16: El número octal 231.015_8 es igual al número binario $010\ 011\ 001.000\ 001\ 101_2$

Muchas máquinas han sido proyectadas con una estructura interna binaria pura, pero utilizan un sistema de numeración y una aritmética octal.

1.6.3 Código hexadecimal

Otro sistema de numeración utilizado es el sistema hexadecimal. Este tiene la ventaja de poder ser empleado tanto en operaciones binarias puras como en operaciones con números decimales codificados en binarios. La interconversión binario-hexadecimal es inmediata. Los dígitos hexadecimales y sus representaciones codificadas en binario son:

Hexadecimal	Binario
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001
A	1010
B	1011
C	1100
D	1101
E	1110
F	1111

Al convertir el número binario puro: 10011011000111.00111011001

En su equivalente en base hexadecimal, se separan en grupos de cuatro dígitos comenzando en el punto binario y agregando ceros a la derecha e izquierda del número si fuere necesario, así:

0010 0110 1100 0111.0011 1011 0010

Y luego reemplazamos cada grupo de cuatro bits por su correspondiente dígito hexadecimal así:

2 6 C 7.3 B 2

La conversión hexadecimal en binario es también inmediata. El número hexadecimal F3A. D81 es equivalente al número binario: 1111 0011 1010.1101 1000 0001

Todos los ordenadores operan en el sistema de numeración binario y siguen los procedimientos de su correspondiente aritmética, aun cuando también se utilizan los sistemas octal y hexadecimal codificados en binario.

1.6.4 El código ASCII

El código alfanumérico más utilizado en los sistemas de microcomputadores es el American Standard Code for Information Interchange o ASCII (pronunciado "Ask-i"). Un listado parcial del código de 7 bits se muestra en la tabla siguiente. Este listado contiene códigos de 7 bits para números, letras mayúsculas y caracteres de puntuación. El código completo tiene también códigos para las letras minúsculas y los caracteres de control. Otro código alfanumérico es el Extended Bomary Coded Decimal Interchage (Código de intercambio binario codificado decimal extendido, EBCDIC) que es un código de 8 bits utilizado en grandes sistemas de computación.

Lista parcial del conjunto de caracteres ASCII

Caracter	ASCII	Caracter	ASCII
Espacio	010 0000	A	100 0001
!	010 0001	B	100 0010
"	010 0010	C	100 0011
#	010 0011	D	100 0100
$	010 0100	E	100 0101
%	010 0101	F	100 0110
&	010 0110	G	100 0111
'	010 0111	H	100 1000
(	010 1000	I	100 1001
)	010 1001	J	100 1010
*	010 1010	K	100 1011
+	010 1011	L	100 1100
,	010 1100	M	100 1101
-	010 1101	N	100 1110
.	010 1110	O	100 1111
/	010 1111	P	101 0000
0	011 0000	Q	101 0001
1	011 0001	R	101 0010
2	011 0010	S	101 0011
3	011 0011	T	101 0100
4	011 0100	U	101 0101
5	011 0101	V	101 0110
6	011 0110	W	101 0111
7	011 0111	X	101 1000
8	011 1000	Y	101 1001
9	011 1001	Z	101 1010

ASIGNACIÓN 1 DE LA UNIDAD I

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Realizar las conversiones indicadas:

$415327_{10} =$ ______________ $_2$

$11011001_2 =$ ______________ $_{10}$

$7348_{10} =$ ______________ $_8$

$7777_8 =$ ______________ $_{10}$

$FABC_{16} =$ ______________ $_{10}$

$3250_{10} =$ ______________ $_{16}$

$38.297_{10} =$ ______________ $_{16}$

$110100010100_2 =$ ______________ $_{10}$

$A36F_{16} =$ ______________ $_8$

$110111_2 =$ ______________ $_{BCD}$

$7327_{10} =$ ______________ $_2$

$101110111101_2 =$ ______________ $_{10}$

$63_{10} =$ ______________ $_8$

$1416_8 =$ ______________ $_{10}$

$C2B3_{16} =$ ______________ $_{10}$

$FF_{16} =$ ______________ $_{10}$

$425_{10} =$ ______________ $_{BCD}$

$375_8 =$ ______________ $_{16}$

$01000110_{BCD} =$ ______________ $_2$

2. Representar el número decimal 48 en cada una de las siguientes formas:

» Binario puro

» BCD

» ASCII (considere cada dígito como un caracter)

» Octal

» Hexadecimal

3. Convertir los siguientes números binarios a sus valores decimales:

» 110110_2

» 11101.1011_2

» 11101011101.11101_2

4. ¿Máximo hasta qué número decimal se puede contar con 12 bits?

» Respuesta: Máximo hasta 4195.

5. ¿Cuántos bits se necesitan para contar hasta 2135?

» Respuesta: 10 bits.

6. Convertir los siguientes números binarios a decimales:

- » 110101
- » 110101001
- » 110110101101
- » 11001110011
- » 11011011

7. Convertir los siguientes decimales a binarios:

- » 59
- » 38
- » 969
- » 513
- » 6312
- » 455

8. Cuál es el valor decimal mayor que se puede representar con un número binario de:

- » 8 bit
- » 16 bit

9. Convertir cada número octal a su equivalente decimal:

- » 1657_8
- » 335_8
- » 4777_8
- » 655_8
- » 2807_8

10. Convertir cada uno de los siguientes números decimales a octales:

- » 149_{10}

- » 4716_{10}
- » 829_{10}
- » 95535_{10}
- » 611_{10}

11. Convertir cada uno de los valores octales a binarios puros:

- » 857_{8}
- » 45_{8}
- » 2777_{8}
- » 355_{8}
- » 6207_{8}

12. Convertir los números binarios a octales:

- » 110101
- » 110111001
- » 1110110001101
- » 11001101011
- » 111011111

13. Escribir los números octales en secuencia desde el 766_{8} hasta el 1001_{8}:

14. Convertir los siguientes números hexadecimales a decimales:

- » 86_{16}
- » $36B_{16}$
- » $173DC_{16}$
- » $5BO_{16}$
- » $AFFB_{16}$

15. Convertir los siguientes números decimales a hexadecimales:

- » 574_{10}

- » 613_{10}
- » 3048_{10}
- » 76419_{10}
- » 5095_{10}

16. Convertir los siguientes números binarios a hexadecimales:

- » 111001_{2}
- » 110101001_{2}
- » 1110110001101_{2}
- » 11010110011_{2}
- » 111011111_{2}

17. Convertir los siguientes números hexadecimales a binarios:

- » 296_{16}
- » $326B_{16}$
- » $473DC_{16}$
- » $3ABO_{16}$
- » $A2FF_{16}$

ASIGNACIÓN 2 DE LA UNIDAD I

EJERCICIOS PROPUESTOS

18. Las direcciones de las localidades de la memoria en una microcomputadora se especifican en hexadecimales. Estas direcciones son números secuenciales que identifican cada circuito de la memoria.

- » Una microcomputadora en particular puede almacenar un número de 8 bits en cada localidad de la memoria. si las direcciones de la memoria van 0000_{16} a $FFFF_{16}$. ¿Cuántas localidades de memorias hay?
- » Se especifica que otras microcomputadoras tienen 4096 localidades de memorias ¿Qué intervalo de dirección hexadecimal utilizan esas computadoras?

19. Escribir los números hexadecimales en secuencia de 690_{16} a $6A0_{16}$.

20. Codificar los siguientes números decimales en BCD:

- » 84
- » 562
- » 6589.635
- » 3402

21. ¿Cuántos bits se necesitan para representan los números decimales en el intervalo de 0 a 999 utilizando el código binario directo? ¿y utilizando el código BCD?

22. Los siguientes números están en BDC convertir a decimal:

- » 101010100101010010
- » 0010110000100
- » 01110111011101011
- » 0101010010010

23. Representar cada uno de los siguientes valores como un número de 5 bits con signo en el sistema complemento a 2:

» $+13 \; -6 \; -15$

24. Convertir a decimales los números con signos representado en complemento a 2.

» 1100101

» 11000000

» 01111111

25. ¿Cuál es el intervalo de números decimales con signos que se pueden representar con 10 bits (incluyendo el signo)

26. ¿Cuántos bits se necesitan para representar los números enteros decimales que se encuentran entre -100 y +100?

27. ¿Cuál es el mayor número negativo que se puede representar el 16 bits?

28. Encontrar el complemento a 2 de:

» 10101110

» 10001100101011

29. Sumar los siguientes números con signos. Expresar la suma como un número binario con signo y como un número decimal:

» 1011011 +1110101

» 1010101 + 0011011

30. Realizar la sustracción de los siguientes números con signo utilizando el complemento a 2. Dar los resultados como números binarios como signos y como decimales:

» 001010 = 000101

» 001010 = 111011

» 110110 = 000101

» 110110 = 111011

31. Multiplicar los números binarios sin signos: 0110 y 1011.

32. Representar el número decimal 253 en el código BCD.

33. Realizar la suma de los siguientes números hexadecimales: 76E y 8C4.

34. Realizar la resta de los números hexadecimales: 8C4 – 76E.

35. Realizar la suma indicada de los números binarios.

- » 1001 + 1101
- » 1110 + 0101
- » 1100.0111 + 11.01
- » 0.1101 + 0.1011
- » 10111010 + 11101111

36. Representar cada uno de los siguientes números decimales con signo en el sistema complemento a 2. Utilizar un total de 8 bits incluyendo el del signo:

- » + 32 b) - 13 c) + 63
- » – 103 e) -1 f) - 128
- » + 108 h) 0

37. Determinar el decimal correspondiente al binario con el signo en el sistema complemento a 2 de:

- » 01001 b) 11001 c) 010011001
- » 10010111 e) 01111111 f) 100000
- » 11111111 h) 10000001

38. ¿Qué intervalo de valores decimales con signos puedes representarse como 11 bits incluyendo el del signo?

39. ¿Cuántos bits se necesitan para representar números decimales desde -16384 hasta + 16383?

40. Hacer una lista ordenada de todos los números con signos que se pueden representar con 3 bits utilizando el sistema complemento a 2.

41. ¿Cuál es el intervalo de valores decimales sin signos que pueden representarse con 9bit? ¿Cuál es el intervalo de valores decimales con signos que pueden representarse con igual número de bit?

- » desde 0 hasta 511
- » desde -256 hasta +255

42. Realizar las siguientes operaciones en el sistema complemento a 2. utilizar 8bits (incluyendo el del signo). Dar las respuestas en binario y en decimal.

- » sumar +9 a + 7
- » sumar +12 a -8
- » sumar +18 a -25
- » sumar +19 a -19
- » sumar -57 a -79
- » restar +25 de +19
- » restar +23 de -12
- » restar -45 de -14
- » restar +53 de -43
- » restar -21 de -21.

43. Multiplicar los siguientes binarios sin signo:

- » 1101 x 1101
- » 11011 x 11101
- » 1010.101 x 110.011
- » 0.11101 x 0.1101

44. Dividir los siguientes números binarios sin signo:

- » 11011 ÷ 101
- » 11111101 ÷ 11
- » 1011011 ÷ 1001
- » 10111.1011 ÷ 1.1

UNIDAD II | 2. LÓGICA

2.1 Proposición

La lógica proposicional, también llamada lógica de orden cero, es un sistema estructurado muy formal cuyos elementos representan proposiciones simples, y cuyas constantes lógicas, conocidas como conectivas, representan operaciones sobre las proposiciones, con el objeto de formar otras proposiciones de mayor complejidad.

La lógica proposicional se encarga de estudiar los sistemas lógicos que no tienen cuantificadores, o variables que son interpretables como entidades significativas. Se sabe que en la lógica proposicional no se usan signos para las variables o entidades, pero sí están presente los signos para las variables proposicionales, ya que estas pueden ser interpretadas como proposiciones con un valor de verdad de definido, de ahí el nombre de proposicional. La lógica proposicional contempla además de las variables interpretables como son las proposiciones simples signos para las conectivas lógicas, lo que implica que dentro de este tipo de lógica se pueden hacer análisis de la inferencia lógica de proposiciones a partir de un conjunto dado de proposiciones, pero sin considerar la estructura interna de las proposiciones simples presentes en el problema.

Una proposición es un enunciado o frase a la cual se le puede asignar inequívocamente uno de los dos valores que son: el de verdad que se representa con un 1 o una V, si la proposición es verdadera, o el de falsedad que es representado por un 0 o una F si la proposición es falsa.

Como una proposición solo puede tomar dos valores (verdadero o falso), se le denomina lógica bivalente o lógica binaria, porque solo usa dos categorías para clasificar las proposiciones.

Ejemplo 2.1:

a. 15 es divisible por 8, es una proposición falsa.

b. Un cuadrilátero es un triángulo, es una proposición falsa.

c. 10=10, es una proposición verdadera.

d. X + 3 = 13, entonces x = 10, es una proposición verdadera.

e. Colombia es un país suramericano, es una proposición verdadera.

f. ¿Qué hora es? No es una proposición.

g. ¿Cómo se llama usted? No es una proposición.

2.2 Tabla de verdad de la negación

Las proposiciones pueden ser simple o compuestas. Para designarlas se emplean letras minúsculas p, q, r, s, etc. Cuando se niega una proposición simple se utiliza el símbolo (~), por ejemplo si se tiene que ~p, que se lee "no p", esto implica, que si p es verdadera (v o 1), entonces ~p será falsa (f o 0), y viceversa. El operador de la negación es representado por símbolo (~), también se conoce como el Not.

p	~p
0	1
1	0

Las proposiciones compuestas básicas son: la conjunción, la disyunción, la disyunción exclusiva, la implicación y la equivalencia.

2.3 Tabla de verdad de la conjunción (AND)

La conjunción entre dos proposiciones simples (p, q) está dada por: p $\wedge$ q, que se lee "p y q", y es verdadera solo si ambas proposiciones son verdaderas. La conjunción ($\wedge$), es también conocida como una conectiva lógica que se denomina el operador lógico AND y representa la multiplicación o producto lógico.

p	q	$P \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Observe que la tabla de verdad, cuando se tiene dos proposiciones simples se toman cuatro renglones que contienen todas las posibilidades o alternativas de combinación de los valores de verdad de las proposiciones simples.

2.4 Tabla de verdad de la disyunción (OR)

La disyunción de las proposiciones simples p, q está dada por: p v q, que se lee: "p o q", es falsa si las dos proposiciones p, q son falsas. El operador lógico disyunción también se le conoce como el OR y representa la suma o adicción lógica.

p	q	P v q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

2.5 Tabla de verdad de la disyunción exclusiva (XOR)

La disyunción exclusiva, representada por el símbolo $\oplus$, llamado también el XOR: que es el exclusive OR, y se lee: "p o q, pero no ambas", es verdadera solo cuando las dos proposiciones tengan diferente valor de verdad. Es decir, si una es verdadera y la otra es falsa o viceversa.

p	q	$P \oplus q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

2.6 Tabla de verdad de la implicación

La implicación entre las proposiciones p, q se denota por: p → q, el primer término o (p) se conoce como antecedente o hipótesis y el segundo o (q), se le denomina el consecuente o tesis. La implicación solo es falsa si el antecedente es verdadero y el consecuente es falso. Además, la implicación lógica no tiene denominación especial, como los casos de los conectores anteriores (NOT, AND, OR y XOR) pero sí puede ser expresado en función de estos, como se verá más adelante.

p	q	P → q
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

2.7 Tabla de verdad de la equivalencia

La equivalencia entre dos proposiciones p, q es una conectiva lógica de la forma: $p \leftrightarrow q$, que se lee "p equivalente con q". La equivalencia se toma como verdadera si ambas proposiciones tienen el mismo valor, esto es, si ambas son verdaderas o si ambas son falsas, es decir:

p	q	P ↔ q
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

2.8 Tablas de verdad

Con los conectivos lógicos analizados anteriormente, se forman proposiciones más complejas de llamadas proposiciones compuestas que pueden ser llamadas tautologías, contradicciones o contingencias.

Si la conclusión en la tabla de verdad de una proposición esta siempre es verdadera, independiente del valor de verdad o falsedad de las proposiciones simples empleadas, entonces la expresión es conocida como una tautológica.

Si la conclusión de la tabla de verdad es siempre falsa, se le denominará una contradicción.

Pero si la conclusión en la tabla de verdad es verdadera y falsa, la proposición es una contingencia.

2.8.1 Tautología

Ejemplo 2.2: La siguiente es una tautología para transformar una implicación en una expresión equivalente: (p → q) ↔ ~(p ∧ ~q), cuya tabla de verdad es:

p	q	~q	p → q	p ∧ ~q	~(p ∧ ~q)	(p → q) ↔ ~(p ∧ ~q)
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	1	0	1	1

El hecho de que esta equivalencia resulte siempre verdadera la hace tautológica y puede, para efectos de la operación del álgebra de proposiciones, sustituir la implicación por su expresión equivalente.

Ejemplo 2.3: La siguiente expresión es una tautología:

[p ∧ ~ (q ∨ r)] → [(p ∧ ~ q) ∨ (p ∧ ~r)]
Haciendo:
s= p ∧ ~ q
t = p ∧ ~r
m= [p ∧ ~ (q ∨ r)]
n= [(p ∧ ~ q) ∨ (p ∧ ~r)]

p	q	r	~q	~r	q ∨ r	~ (q ∨ r)	m	s	t	n	[p ∧ ~ (q ∨ r)] → [(p ∧ ~ q) ∨ (p ∧ ~r)]
0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1
0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1
0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1

2.8.2 Contradicción

Ejemplo 2.4: La siguiente expresión es una contradicción: (p → q) ↔ ~(~p v q), cuya tabla de verdad es:

p	q	~p	p → q	~p v q	~(~p v q)	(p → q) ↔ ~(~p v q)
0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1	0
1	1	0	1	1	0	0

El hecho de que esta equivalencia resulte siempre falsa la hace una contradicción.

2.8.3 Contingencia

Ejemplo 2.5: La siguiente expresión es una contingencia: [~p → (~q v ~r)] → [~(p → q) v ~(p →r)]

Haciendo: s= p → q, t = p → r,

p	q	r	~ p	~ q	~ r	~q v ~r	→	s	~( )	t	~ ( )	v	→
0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0
0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0

2.9 Leyes del álgebra de proposiciones

Leyes de idempotencia

- p v p ↔ p
- p ∧ p ↔ p

Leyes asociativas

- (p v q) v r ↔ p v (q v r)
- (p ∧ q) ∧ r ↔ p ∧ (q ∧ r)

Leyes Conmutativas

- $p \vee q \leftrightarrow q \vee p$
- $p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$

Leyes distributivas

- $p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
- $p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

Leyes de identidad

- $p \vee 0 \leftrightarrow p$
- $p \wedge 1 \leftrightarrow p$
- $p \vee 1 \leftrightarrow 1$
- $p \wedge 0 \leftrightarrow 0$

Leyes del complemento

- $p \vee \sim p \leftrightarrow 1$
- $p \wedge \sim p \leftrightarrow 0$
- $\sim(\sim p) \leftrightarrow p$
- $\sim 1 \leftrightarrow 0$
- $\sim 0 \leftrightarrow 1$

Leyes de D'Morgan

- $\sim(p \vee q) \leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$
- $\sim(p \wedge q) \leftrightarrow \sim p \vee \sim q$

2.10 Inferencia lógica

La inferencia es conocida como el estudio tradicional de la lógica. La lógica es la rama de las matemáticas que se encarga de investigar las razones por los cuales las inferencias son aceptables o rechazadas. Cuando una inferencia estudiada es aceptable, lo es por su estructura y razonamiento lógico y no por el contenido específico del argumento o el lenguaje empleado o utilizado. Esta es la razón por la cual se construyen sistemas lógicos formales que capturan los factores más relevantes de las deducciones inmersas en sistema o en un lenguaje sistemático o natural.

La inferencia es el proceso lógico que busca llegar a conclusiones a partir de unas premisas iniciales. Siempre y cuando estas proposiciones se siguan unas de otras, de ese modo, se dice que estas están implicadas. Según los estudios realizados solo se distinguen tres clases de inferencias que son: las deducciones, las inducciones y las abducciones, aunque la abducción se conoce como un caso especial de inducción. La validez o no de las inducciones son estudiadas por la lógica inductiva y por la inducción matemática. Las deducciones, en cambio, son analizadas por la mayor parte de la lógica contemporánea.

2.10.1 Tipos de inferencias

Los dos tipos de inferencias son:

- **La lógica aristotélica:** Reflexionaba sobre la eventualidad de inferencias inmediatas, que son aquellas que se pueden conseguir directamente a partir de la relación que se establece por medio de un juicio respecto a los términos empleados como son el, sujeto y predicado, que lo conforman, en función de la cualidad desde el referente (afirmativo-negativo) y la de cantidad desde el punto de vista (universal-particular) del mismo.
- **Lógica moderna:** Considera la inferencia lógica como la aplicación de una regla en función de la transformación, que permita transformar una fórmula, problema o expresión bien formada (EBF) de un sistema de estructura formal en otra EBF, como son los teoremas del mismo sistema. Estas dos expresiones se relacionan de forma equivalente, es decir, que ambas tienen los mismos pesos en los valores de verdad o, dicho de otra forma, la verdad de una coimplica la verdad de la otra.

2.10.2 Esquema de una inferencia

Se refiere a la estructura lógico-formal que permite obtener una expresión bien formada desligada, libre, como teorema de un sistema formal. Dicha estructura es el fundamento de un argumento lógico-formal mediante la aplicación de la regla de sustitución de fórmulas.

$$(A \wedge B \wedge C \ldots \wedge M) \rightarrow S$$

Donde $(A \wedge B \wedge C \ldots \wedge M)$ representa cada variable la premisa de un argumento. Conocida la verdad de cada una, como premisas de un argumento, su producto verdadero exige la verdad de todas y cada una de dichas expresiones; lo que permite establecer S como una expresión libre y conclusión del argumento.

2.10.3 Requisitos para una inferencia

Con el uso del pensamiento racional, la verdad solamente se logra si se cumplen las dos siguientes condiciones:

1. Las premisas se deben caracterizar por ser verdaderas.
2. Durante el análisis de deducción solo se deben relacionar las premisas usando las leyes de la lógica.

Las reglas de inferencia en lógica matemática están soportadas en tres grandes métodos que son:

- El *Modus Ponendo Ponens* (MPP), término en lengua latina, que significa: "método que afirmando afirma".
- El *Modus Tollendo Tollens* (MTT). término en lengua latina, que significa: "método que negando niega".
- Y el *Modus Tollendo Ponens* (MTP). término en lengua latina, que significa: "método que negando afirma".

2.10.4 Modus Ponendo Ponens (MPP)

Esta regla de inferencia lógica se fundamenta en que: si una implicación es cierta y además también es cierto su antecedente, entonces su consecuente es necesariamente verdadero, de manera simbólica esto se expresa así:

$$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$$

2.10.5 Modus Tollendo Tolens (MTT)

Esta regla de inferencia lógica establece que: dada una implicación verdadera y se niega su consecuente, entonces el antecedente también será necesariamente negado.

$$[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$$

2.10.6 Modus Tollendo Ponens (MTP)

Esta ley se plantea de la siguiente forma: si una disyunción es verdadera y una de sus proposiciones simples es falsa, entonces necesariamente la otra proposición será verdadera. Simbólicamente:

$$[(p \vee q) \wedge \sim p] \rightarrow q \text{ ó } [(p \vee q) \wedge \sim q] \rightarrow p$$

Ejemplo 2.6: Se tienen las siguientes premisas

1. $p \rightarrow \sim r$
2. $\sim r \rightarrow q$
3. p

El proceso para realizar la demostración se basa en combinar adecuadamente las premisas mediante el uso de conjunciones, de la siguiente forma:

Las premisas 1 y 3 producen:

$$[(p \rightarrow \sim r) \wedge p] \rightarrow \sim r \text{ (4) (MPP)}$$

Las premisas 2 y 4 producen:

$$[(\sim r \rightarrow q) \wedge \sim r] \rightarrow q \text{ (5) (MPP)}$$

Por tanto la conclusión es: q.

Ejemplo 2.7: Se tienen las siguientes premisas

$$p \vee q$$
$$\sim r$$
$$q \rightarrow r$$

El proceso para realizar la demostración se basa en combinar adecuadamente las premisas mediante el uso de conjunciones, de la siguiente forma:

Las premisas 3 y 2 producen:
$[(q \rightarrow r) \wedge \sim r] \rightarrow \sim q$ (4) (M T T)
Las premisas 1 y 4 producen:
$[(p \vee q) \wedge \sim q] \rightarrow p$ (5) (M T P)
Por tanto la conclusión es: p.

Ejemplo 2.8: Si se tienen las siguientes premisas

$\sim p \vee q$
$\sim p \rightarrow r$
$\sim r$

Use las reglas de inferencias para llegar a una conclusión lógica.

p MTT (2, 3)
q MTP (1, 4)
luego la conclusión es q

Ejemplo 2.9.: Considere los siguientes argumentos:

1) caso $p \rightarrow q$ $\underline{p}$ q	2) caso $p \rightarrow q$ $\underline{\sim q}$ $\sim p$
3) caso $p \rightarrow q$ $\underline{q}$ p	4) caso $p \rightarrow q$ $\underline{\sim p}$ $\sim q$

Los argumentos empleados en (1) y (2) son válidos y se llaman respectivamente (MPP) y (MTT). Sus expresiones proposicionales son:

1) $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$ 2) $[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$

Son tautológicas, es decir, siempre verdaderas, como se puede ver al realizar sus tablas de verdad.

Pero los argumentos empleados en (3) y (4) no son válidos, y su conclusión da una contingencias.

3) $[(p \rightarrow q) \wedge q] \rightarrow p$ 4) $[(p \rightarrow q) \wedge \sim p] \rightarrow \sim q$

2.10.7 Silogismo Hipotético (SH)

El argumento denominado Silogismo Hipotético (SH) se enuncia así:

$$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$$

2.10.8 Silogismo Disyuntivo (SD)

Si se tiene una disyunción entre dos premisas, y cada una de estas es un antecedente de otras dos premisas condicionadas, entonces se puede concluir con la disyunción de los consecuentes de las premisas condicionadas, esto es:

$$\begin{array}{c} a \vee r \\ a \rightarrow b \\ r \rightarrow c \\ \hline b \vee c \end{array}$$

2.10.9 Adición de la disyunción (AD)

Si se tiene una premisa, se puede concluir la disyunción de esta con cualquier otra premisa que se requiera o necesite, esto es:

$$\begin{array}{c} a \\ \hline a \vee b \end{array}$$

2.10.10 Adición de la conjunción (AC)

Si se tienen dos premisas, se puede concluir la conjunción de estas dos premisas, esto es:

$$\frac{\begin{array}{c} a \\ b \end{array}}{a \wedge b}$$

2.10.11 Regla de simplificación (RS)

Si se tiene la conjunción entre dos premisas, se puede concluir con cualquiera de las dos premisas, esto es:

$\dfrac{a \wedge b}{a}$	$\dfrac{a \wedge b}{b}$

2.10.12 Premisa condicionada (PC)

Si un conjunto de premisa llega a una conclusión condicionada, entonces, se puede adicionar al conjunto de premisas el antecedente de la conclusión condicionada y dará como conclusión el consecuente de la conclusión condicionada, esto es:

$$\frac{\begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{array}}{r \rightarrow b} \qquad \frac{\begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \\ r \end{array}}{b}$$

Donde (r) es la premisa adicional

2.10.13 Demostración y refutación

La demostración es un proceso que hace uso de razonamiento lógico encaminado a probar la validez de un nuevo conocimiento; es la unión entre los conocimientos recientes y los conocimientos anteriores. Los tipos demostración conocidos son:

- **Demostración directa:** Está formado por un conjunto de proposiciones o premisas consideradas verdaderas que son considerados los postulados o proposiciones con una validez aceptada.
- **Demostración indirecta:** Es aquella que se realiza cuando se establece la validez sobre una tesis T, donde se deber probar que las consecuencias de sus contrarias a ella son falsas.
- **Demostración por recursión:** Cuando se prueba la tesis T por medio del método de inducción matemática.

A estos tipos de demostración se oponen dos métodos de refutación que son: la contradicción y el contraejemplo.

Ejemplo 2.10.: Dada las siguientes premisas, hallar la conclusión:

$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$ premisa (1) p premisa (2)
Entonces,
de (1): $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$ (3) (SH)
de (3) y (2): $[(p \rightarrow r) \wedge p\,] \rightarrow r$ (MPP)

Conclusión: r

Ejemplo 2.11.: Dada las siguientes premisas, hallar la conclusión:

$p \rightarrow (q \wedge r)$ premisa (1)
$q \wedge r \rightarrow s$ premisa (2)
$\sim s$ premisa (3)
Entonces,
de (1) y (2): $\{[p \rightarrow (q \wedge r)] \wedge [(q \wedge r) \rightarrow s]\} \rightarrow (p \rightarrow s)$ (4) (SH)
de (4) y (3): $[(p \rightarrow s) \wedge \sim s\,] \rightarrow \sim p$ (MTT)

Conclusión: $\sim p$

Ejemplo 2.12: Dada las siguientes premisas, hallar la conclusión:

$r \rightarrow (\sim p \vee \sim q)$ premisa (1)
$p \wedge q$ premisa (2)

r v s premisa (3)

Entonces,

de (1): [r → (~p v ~q)] ↔ [r → ~(p ∧ q)] (4) (D'Morgan)

de (4) y (2): {[r → ~(p ∧ q)] ^ (p ∧ q)} → ~r (5) (MTT)

de (3) y (5): [(r v s) ∧ ~r] → s (MTP)

Conclusión: s

Ejemplo 2.13: Dada las siguientes premisas, hallar la conclusión:

~(p ∧ ~q) premisa (1)

~(r v s) → ~q premisa (2)

p premisa (3)

~r premisa (4)

Entonces,

de (1): ~(p v ~q) ↔ (p → q) (5) (Tautología)

de (2): [~(r v s) → ~q] ↔ [q → (r v s)] (6) (La implicación directa es igual a la contrarrecíproca).

Ahora como:

de (5) y (6): (p → q) ∧ [q → (r v s)] → [p → (r v s)] (7) (SH)

de (7) y (3): {[p → (r v s)] ∧ p} → (r v s) (8) (MPP)

de (8) y (4): [(r v s) ∧ ~r] → s

Conclusión: s

Ejemplo 2.14: Dada las siguientes premisas, hallar la conclusión:

p ∧ ~q premisa (1)

r → q premisa (2)

r v s premisa (3)

(s v p) → t premisa (4)

Entonces,

5) p Regla de simplificación (1)

6) ~ q Regla de simplificación (1)

7) $\sim r$	MTT (2, 6)
8) s	MTP (3, 7)
9) $s \vee p$	Adición disyuntivo (8)
10) t	MPP (4, 9)

Ejemplo 2.15: Dada las siguientes premisas, hallar la conclusión:

$p \rightarrow q$	premisa (1)
$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	premisa (2)
$q \rightarrow (r \rightarrow s)$	premisa (3)
Entonces,	
4) p	premisa adicionada (4)
5) q	MPP (1, 4)
5) $q \rightarrow r$	MPP (2, 4)
7) r	MPP (5, 6)
8) $r \rightarrow s$	MPP (3, 5)
9) s	MPP (7,8)
10) $p \rightarrow s$	Premisa Condicional (4, 9)

Ejemplo 2.16: Demostrar el silogismo hipotético.

Solución: Se tiene que demostrar que sí se tienen las premisas:

$a \rightarrow b$	premisa (1)
$b \rightarrow c$	premisa (2)

se debe concluir que: $a \rightarrow c$

Para verificar la validez de esta regla realizamos los siguientes pasos:

1.	$a \rightarrow b$	premisa (1)
2.	$b \rightarrow c$	premisa (2)
3.	a	premisa adicional (3)
4.	b	MPP (1, 3)
5.	c	MPP (2, 4)

6. $a \rightarrow c$ Premisa Condicionada (PC) (3, 5)

Ejemplo 2.17: Demostrar el silogismo disyuntivo.

Solución:

Se tiene que demostrar que sí se tienen las premisas:

$a \rightarrow b$ premisa (1)
$c \rightarrow e$ premisa (2)
$a \vee c$ premisa (3)
se debe concluir que: $b \vee e$

Para verificar la validez de esta regla realizamos los siguientes pasos:

1. $a \rightarrow b$ premisa (1)
2. $c \rightarrow e$ premisa (2)
3. $a \vee c$ premisa (3)
4. $\sim a \rightarrow c$ Ley del condicional en (3)
5. $\sim a \rightarrow e$ SH (2, 4)
6. $\sim e \rightarrow a$ Ley de contrarrecíproca en (5)
7. $\sim e \rightarrow b$ SH (1, 6)
8. $e \vee b$ Ley del condicional en (7)

Ejemplo 2.18: Verificar que las siguientes argumentaciones son válidas:

$(\sim p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$ premisa (1)
$\sim p \rightarrow (\sim r \vee t)$ premisa (2)
$p \vee (s \vee u)$ premisa (3)
$\sim p \wedge q$ premisa (4)
se debe concluir que: $t \vee u$

Para verificar la validez de estos argumentos se realizan los siguientes pasos:

1. $(\sim p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$ premisa (1)

2.	$\sim p \rightarrow (\sim r \vee t)$	premisa (2)
3.	$p \vee (s \vee u)$	premisa (3)
4.	$\sim p \wedge q$	premisa (4)
5.	$r \vee s$	MPP (1, 4)
6.	$\sim p$	RS (4)
7.	$\sim r \vee t$	MPP (2, 6)
8.	$s \rightarrow u$	MTP (3, 6)
9.	$r \rightarrow t$	Ley condicional en (7)
10.	$t \vee u$	SD (5, 8, 9)

Ejemplo 2.19: Encontrar la conclusión de las siguientes argumentaciones:

$(\sim p \wedge q) \rightarrow r$	premisa (1)
$(p \vee r) \rightarrow s$	premisa (2)
$t \rightarrow q$	premisa (3)
$\sim s$	premisa (4)

Demostración:

$\sim (p \vee r)$	MTT (4, 2)
$\sim p \wedge \sim r$	Ley de Morgan (5)
$\sim r$	RS en (6)
$\sim (\sim p \wedge q)$	MTT (1, 7)
$p \vee \sim q$	Ley de Morgan (8)
$\sim p$	RS en (6)
$\sim q$	MTP (9, 10)
$\sim t$	MTT (3, 11)

Luego se concluye que: $\sim t$

2.10.14 Conjunto fundamental de las reglas de inferencia

En el siguiente cuadro se encuentran las reglas fundamentales para analizar un problema de lógica inferencial.

Reglas de la inferencia lógica		
Modus Ponendo Ponens $[(a \to b) \land a] \to b$ Otra forma de representar esta regla es: $\dfrac{\begin{matrix} a \to b \\ a \end{matrix}}{b}$	**Modus Tollendo Tollens** $[(a \to b) \land \sim b] \to \sim a$ Otra forma de representar esta regla es: $\dfrac{\begin{matrix} a \to b \\ \sim b \end{matrix}}{\sim a}$	**Modus Tollendo Ponens** $[(a \lor b) \land \sim a] \to b$ Otra forma de representar esta regla es: $\dfrac{\begin{matrix} a \lor b \\ \sim a \end{matrix}}{b}$
Adición de la conjunción $\dfrac{\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}}{a \land b}$	**Adición de la disyunción** $\dfrac{a}{a \lor b}$	Regla de simplificación $\dfrac{a \land b}{a}$
Premisa condicional $\dfrac{\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{matrix}}{r \to b}$ $\quad$ $\dfrac{\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \\ r \end{matrix}}{b}$ Donde (r) es la premisa adicional	**Silogismo hipotético** $[(a \to b) \land (b \to c)] \to (a \to c)$ Otra forma de representar esta regla es: $\dfrac{\begin{matrix} a \to b \\ b \to c \end{matrix}}{a \to c}$	Silogismo disyuntivo $\dfrac{\begin{matrix} a \lor r \\ a \to b \\ r \to c \end{matrix}}{b \lor c}$

2.10.15 Aplicaciones tecnológicas

La lógica matemática es aplicada principalmente a los siguientes casos:

1. Las contingencias son empleadas por los ingenieros electrónicos y de sistemas para diseñar o construir circuitos digitales, con el objeto de automatizar y controlar los procesos; mientras que las tautologías y las contradicciones son utilizadas para verificar y probar la consistencia interna de los argumentos lógicos en un programa a aplicar.
2. Las reglas sobre la inferencia lógica se emplean como test de prueba para la consistencia lógica interna en los algoritmos o programas de computación.
3. Las propiedades usadas en el álgebra moderna y las transformaciones de sentencias lógicas en función de solo una u otra conectiva, son usadas por los ingenieros electrónicos o de sistemas para la construcción de los circuitos

integrados o microchips, pues éstos utilizan los operadores lógicos NOT, AND, y OR.

2.10.16 Tabla de verdad de la anticonjunción (NAND)

Se define la operación anticonjunción o (NAND) como la negación del (Y o AND) operadores de la conjunción, es decir: NAND = NOT AND, que simbólicamente significa:

$$(p \text{ NAND } q) \leftrightarrow \sim(p \wedge q)$$

Su tabla de verdad es:

p	q	(p NAND q)
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

2.10.17 Tabla de verdad de la antidisyunción (NOR).

Se define la antidisyunción (NOR) como la negación de la disyunción, es decir:

NOR = NOT OR, que simbólicamente significa:

$$(p \text{ NOR } q) \leftrightarrow \sim(p \vee q)$$

Su tabla de verdad es:

p	q	(p NOR q)
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

2.10.18 Tabla de verdad de la antidisyunción exclusiva (XNOR)

La antidisyunción exclusiva (XNOR) se define similarmente al. XNOR = NOT XOR, que simbólicamente significa:

$$(p \text{ XNOR } q) \leftrightarrow \sim(p \oplus q)$$

Su tabla de verdad es:

p	q	(p XNOR q)
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

ASIGNACIÓN 1 DE LA UNIDAD II

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Clasificar mediante una tabla de verdad la siguiente proposición:

$$\sim(p \wedge \sim q) \leftrightarrow (p \longrightarrow q)$$

2. Clasificar las siguientes proposiciones:

» $\sim(\sim p \vee \sim q) \leftrightarrow \sim(p \vee q)$

» $\sim(p \wedge q) \leftrightarrow (p \wedge \sim q)$

» $\sim(p \wedge \sim q) \leftrightarrow (p \rightarrow \sim q)$

» $(\sim q \rightarrow \sim p) \leftrightarrow \sim(p \leftrightarrow q)$

» $(p \rightarrow q) \wedge (\sim q \vee p)$

» $(p \rightarrow q) \wedge (\sim q \rightarrow p)$

» $(p \wedge q) \rightarrow (\sim q \vee p)$

3. Si p es verdadero (1), q es falso (0) y r es verdadero (1), determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

» $p \wedge (q \vee r)$

» $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

» $p \rightarrow \sim(q \rightarrow r)$

» $(p \wedge q) \rightarrow (\sim q \vee p)$

» $(p \vee \sim q) \vee (p \rightarrow r)$

» $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \vee r)$

» $\sim[(\sim p \wedge \sim q) \wedge (p \vee r)]$

» $\sim q \rightarrow [p \leftrightarrow (p \vee \sim q)]$

» $\sim [(\sim p \vee q) \wedge \sim(q \wedge \sim p)] \rightarrow (\sim p \vee \sim q)$

4. Determinar el tipo de proposición:

- » $p \leftrightarrow \sim[(p \to r) \wedge (q \to r)]$
- » $[(p \wedge q) \vee r] \leftrightarrow [(p \vee r) \wedge (q \vee r)]$
- » $[(p \wedge q) \wedge r] \to [(p \wedge q) \vee (\sim r)]$
- » $\sim[(\sim p \vee q) \wedge \sim(q \wedge \sim p)] \to [(\sim p \wedge r) \to q]$
- » $(p \vee q) \leftrightarrow \sim[(p \wedge (q \to r)]$
- » $\sim(p \wedge q) \to (\sim p \vee \sim q)$
- » $\sim q \to [p \leftrightarrow (p \vee \sim q)]$
- » $\sim[(\sim p \vee \sim q) \wedge (p \vee r)]$
- » $\sim\{[(p \vee q) \to q] \wedge [(p \to r) \to (q \to r)]\}$
- » $[p \to (q \vee r)] \leftrightarrow [(p \to q) \vee (p \to r)]$

5. Ejercicios: concluir de los siguientes grupos de premisas.

- » $p \to \sim r$ (1) $\quad \sim r \to q$ (2) $\quad p$ (3)
- » $p \to (q \wedge r)$ (1) $\quad p$ (2) $\quad (q \wedge r) \to s$ (3)
- » $\sim q$ (1) $\quad p \to q$ (2) $\quad \sim p \to r$ (3)
- » $q \to \sim p$ (1) $\quad$ p (2)
- » $p \vee q$ (1) $\quad \sim r$ (2) $\quad q \to r$ (3)
- » $t \to (p \vee q)$ (1) $\quad \sim(\sim t)$ (2) $\quad \sim q$ (3)

6. Si p es verdadero (1), si q es falso (0) y r es verdadero (0), determinar el valor de verdad de cada una de las proposiciones.

- » $p \leftrightarrow \sim[(p \to r) \wedge (q \to r)]$
- » $[(p \wedge q) \vee r] \leftrightarrow [(p \vee r) \wedge (q \vee r)]$
- » $[(p \wedge q) \wedge r] \to [(p \wedge q) \vee (\sim r)]$
- » $\sim[(\sim p \vee q) \wedge \sim(q \wedge \sim p)] \to [(\sim p \wedge r) \to q]$
- » $(p \vee q) \leftrightarrow \sim[(p \wedge (q \to r)]$
- » $\sim(p \wedge q) \to (\sim p \vee \sim q)$

» $\sim q \rightarrow [p \leftrightarrow (p \vee \sim q)]$

» $\sim[(\sim p \vee \sim q) \wedge (p \vee r)]$

» $\sim\{[(p \vee q) \rightarrow q] \wedge [(p \rightarrow r) \rightarrow (q \rightarrow r)]\}$

» $[p \rightarrow (q \vee r)] \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)]$

7. Mediante una tabla de verdad demostrar que:

$$(p \oplus q) \leftrightarrow [(\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)]$$

8. Elaborar la tabla de verdad de la siguiente proposición:

$$\sim[(\sim p \vee q) \wedge \sim(q \wedge \sim p)] \rightarrow [(\sim p \wedge r) \rightarrow q]$$

9. Clasificar las siguientes proposiciones

» $(p \wedge q) \vee (\sim p \vee \sim q)$

» $(p \vee q) \vee \sim p$

10. Determinar qué tipo de proposiciones son las siguientes:

» $p \rightarrow p$

» $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$

» $\sim p \rightarrow (p \rightarrow q)$

» $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (q \rightarrow r)$

11. Verificar el valor de validez de cada uno de los siguientes argumentos:

» $p \wedge q$
$\underline{\sim p \rightarrow q}$
$\sim q$

P
» $p \vee q$
$(p \vee q) \rightarrow rr \rightarrow s$
___
S

» P
$p \rightarrow [q \rightarrow (r \rightarrow s)]$
____
S

» $[(p \rightarrow q) \rightarrow r] \rightarrow s$
r
____
s

12. Demostrar:

» $(p \vee p) \leftrightarrow p$

» $(p \wedge p) \leftrightarrow p$

» $(p \vee 1) \leftrightarrow 1$

» $(p \vee 0) \leftrightarrow 0$

» $[p \vee (p \wedge q)] \leftrightarrow p$

» $[p \wedge (p \vee q)] \leftrightarrow p$

» $\sim(\sim p) \leftrightarrow p$

» $\sim(p \vee q) \leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$

» $\sim(p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$

13. Sean p, q dos proposiciones tales que q↔1, es decir, q es una proposición siempre verdadera. Demostrar que:

» $(p \vee q) \leftrightarrow q$

» $(p \wedge \sim q) \leftrightarrow 0$, es decir, es una proposición falsa o una contradicción.

» $(p \wedge q) \leftrightarrow p$

» $(\sim p \vee q) \leftrightarrow 1$ es decir, es una proposición siempre verdadera o tautología.

ASIGNACIÓN 2 DE LA UNIDAD II

EJERCICIOS PROPUESTOS

14. La proposición p $\oplus$ q se denomina disyunción exclusiva y es tal que solamente es verdadera cuando las proposiciones tienen diferentes valores de verdad. Demostrar, utilizando las leyes del álgebra de proposiciones que:

» $(p \oplus q) \leftrightarrow [(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)]$

» $\sim (p \oplus q) \leftrightarrow \sim [(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)]$

» $\sim (p \oplus q) \leftrightarrow [(\sim p \vee \sim q) \wedge (p \vee \sim q)]$

15. Dadas tres proposiciones p, q, r, demostrar utilizando las leyes del álgebra de proposiciones las siguientes equivalencias:

» $[(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge r) \vee (q \wedge r)] \leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge r)]$

» $[(p \vee q) \wedge (\sim p \vee r) \wedge (q \vee r)] \leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (\sim p \vee r)]$

» $(\sim p \wedge q \wedge r) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \sim r) \vee (p \wedge \sim q \wedge \sim r) \leftrightarrow (\sim p \wedge r) \vee (p \wedge \sim r)$

» $(p \wedge q) \wedge (\sim p \vee q) \leftrightarrow (\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)$

» $(p \vee \sim q) \wedge (p \vee r) \wedge (p \vee \sim r) \leftrightarrow (p \wedge q)$

» $(p \vee \sim q) \wedge (q \vee \sim r) \wedge (\sim p \vee r) \wedge (\sim p \vee \sim q) \leftrightarrow \sim p \wedge \sim q \wedge \sim r$

» $(p \wedge q \wedge r) \vee [(p \vee q) \wedge (p \vee r)] \leftrightarrow [p \vee (q \wedge r)]$

» $(p \wedge \sim q) \vee (p \wedge r) \vee (p \wedge q) \leftrightarrow \mathrm{p}$

» $[(p \vee q) \wedge (\sim p \vee q)] \leftrightarrow \mathrm{q}$

» $(p \wedge q \wedge r) \vee (\sim p \vee \sim q \vee \sim r) \leftrightarrow 1$ es una tautologia

» $[q \vee (\sim r \wedge q) \wedge (q \vee (p \wedge r)] \leftrightarrow \mathrm{q}$

» $[(p \wedge r) \vee (q \wedge r)] \wedge [(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (p \wedge r)] \leftrightarrow (p \wedge r)$

UNIDAD III | 3. CONJUNTO

Los conjuntos tienen una relación con los procesos de contar, lo que conlleva resolver una serie de interrogantes relacionados con la noción de cantidad. Los conceptos, definiciones y demostraciones utilizadas en la geometría y la aritmética se pueden formular de una forma clara y concisa en términos de conjunto. Desde el momento en que se incorporó la teoría de conjuntos, se abrió una puerta al desarrollo de diversas ramas de la matemática como son: la geometría, la aritmética, el análisis y la topología.

El concepto de conjunto no está definido aún ya que el concepto que se tenía sobre la colección de objetos no satisface a todos los conjuntos. Para denotar los conjuntos se utilizan las letras mayúsculas: A, B, C… y para denotar sus elementos, se usan las letras minúsculas: a, b, c, …, número, símbolos o variables subindizadas.

Ejemplo 3.1: Conjuntos

- **a.** A = {1, 3, 5, 7} significa que el conjunto A se compone de los cuatro números impares.
- **b.** B = {a, b, c, d, e, f} los elementos del conjunto B son las seis primeras letras del alfabeto.
- **c.** C = {x / x es un número primo} la notación x/x se lee “x tal que x”, o sea que C es el conjunto de los “x tal que x es un número primo”.
- **d.** D = {x/x es un número natural par} el conjunto D consta de todos los naturales pares.

3.1 Relaciones entre conjuntos

3.1.1 Subconjunto

Un conjunto A es un subconjunto de un conjunto B, lo cual se escribe $A \subset B$ y se lee "A es subconjunto de B", si todo elemento de A es elemento de B. esto es: $x \in A \rightarrow x \in B$.

Ejemplo 3.2:

a. A = {6, 9, 12} y B = {x/x es múltiplo de 3} esto implica que: $A \subset B$.

b. G = {x/x es un número natural divisible por tres} y H = {x/x es un número natural} entonces: $G \subset H$

c. A = {a, b, p} y B = {a, b, p, m} entonces: $A \subset B$

3.1.2 Igualdad de conjuntos

Dos A y B conjuntos son iguales si todos los elementos de A pertenecen a B y todos los elementos de B pertenecen a A. Esto es:

$$A = B \leftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A)$$

Ejemplo 3.3: A = {1, 5, 7, 10} y B = {1, 5, 7, 10} son iguales, es decir: A = B.

3.1.3 Conjuntos especiales

- **CONJUNTO VACÍO:** Es el conjunto que carece de elementos, se simboliza por: { } o por $\emptyset$.

Ejemplo 3.4: El conjunto de personas que viven actualmente con más de 800 años. Es un conjunto vacío porque no existe una que actualmente tenga esa edad.

- **CONJUNTO UNIVERSAL:** Es el conjunto de referencia, cuyos elementos son todos los elementos de los conjuntos que intervienen en una situación dada. El conjunto se denota por: U.

Ejemplo 3.5: Si U = N, el conjunto formado por los números naturales con A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, B = {x/x es un número primo menor que 31}, C = {x/x es un número natural par menor que 1000}. Entonces los conjuntos A, B y C son subconjuntos de U.

- **CONJUNTO DE PARTES:** Si se tiene un conjunto B, el conjunto de partes del conjunto B, denotado por P(B), es el conjunto formado por todos los subconjuntos de B.

Para conseguir los subconjuntos de B hay que tener en cuenta dos subconjuntos especiales: el conjunto vacío $\emptyset$ y el mismo conjunto B.

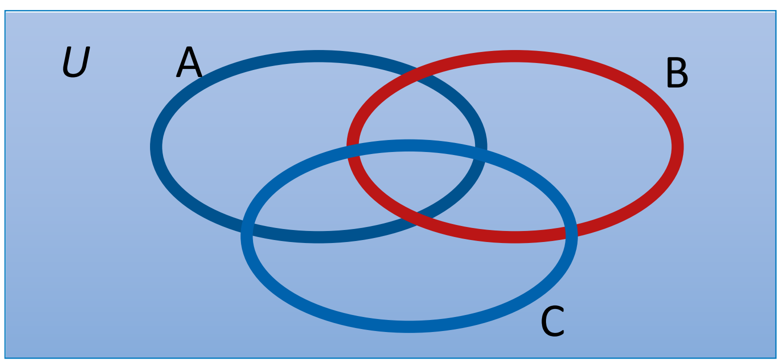
Ejemplo 3.6: si B = {x, y, z}, entonces:

Como B tiene 3 (tres) elementos, entonces el conjunto parte tendrá: $2^3 = 8$ subconjuntos.

$$P(B) = \{\emptyset, \{a\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{x, y, z\}\}$$

3.2 Diagramas de Venn

Los diagramas de Venn o de Euler son una manera de representar los conjuntos de forma esquemática, son muy usados en la teoría de conjuntos. Además, forman una herramienta didáctica valiosa para apreciar las relaciones entre conjuntos, como son la pertenencia, inclusión y las operaciones con conjunto. En la siguiente figura se pueden apreciar unos diagramas de Venn.



3.3 Operaciones con conjuntos

Así como los números se combinan mediante operaciones de adición, sustracción y multiplicación, los conjuntos se pueden combinar para obtener otros conjuntos con ciertas operaciones como son:

- Unión de conjuntos.
- Intersección de conjuntos.

- Diferencia de conjuntos.
- Diferencia simétrica de conjuntos.
- Complemento de un conjunto.

3.3.1 Unión de conjuntos

Dados los conjuntos A y B, la unión entre ellos será denotada por A ∪ B, que se lee "A unión B", y es el nuevo conjunto formado por los elementos que pertenecen a: A o a B, o a los dos conjuntos. Simbólicamente es:

$$A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\}$$

Ejemplo 3.7: Si A = {a, b, c, d}, B = {c, d, e, f} entonces A ∪ B = {a, b, c, d, e, f}

3.3.2 Intersección de conjuntos

Dado los conjuntos A y B, la intersección entre ellos denotada por A ∩ B, que se lee "A intersección B", es el conjunto que surge de tener los elementos que pertenecen a A y a B, es decir, por sus elementos comunes en A y B. Simbólicamente es:

$$A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\}$$

Ejemplo 3.8: Si A = {a, b, c, d}, B = {c, d, e, f} entonces A ∩ B = {c, d}

3.3.3 Diferencia de conjuntos

La diferencia de dos conjuntos A y B, representado por A – B, y que se lee "A menos B", es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B. Simbólicamente es:

$$A - B = \{x / x \in A \wedge x \notin B\}$$

Ejemplo 3.9: Si A={a, b, c, d}, B={c, d, e, f} entonces A - B = {a, b}

3.3.4 Diferencia simétrica de conjuntos

La diferencia de dos conjuntos A y B, denotada por A ⊕ B (que se lee "A diferencia simétrica B") es el nuevo conjunto formado por los elementos que pertenecen a A o B, pero no pertenecen a su intersección. Simbólicamente es:

$$A \oplus B = \{x / x \in A \vee x \in B \wedge x \notin (A \cap B)\}$$

Ejemplo 3.10: Si A = {a, b, c, d}, B = {c, d, e, f} entonces $A \oplus B$ = {a, b, e, f}

3.3.5 Complemento de un conjunto

El complemento de un conjunto A con respecto al conjunto universal U, denotado por A' (que se lee "el complemento de A") es el nuevo conjunto formado por los elementos que pertenecen al Universo U y que no pertenecen a A. Simbólicamente es:

$$A' = \{x / x \in U \wedge x \notin A\} = U - A$$

Ejemplo 3.11: Si A = {a, b, c, d}, U = {a, b, c, d, e, f} entonces A' = {e, f}

3.3.6 Número de elementos de un conjunto

Se puede establecer cuántos elementos tiene un conjunto A finito. Es decir, que al conjunto A se le puede asignar un número natural, denotado por n(A) que también se llama la cardinalidad de A y que es igual al número de elementos de A.

Ejemplo 3.12: Si A = {a, b, c, d}, U= {a, b, c, d, e, f} entonces n(A) = 4 y n(U) = 6

3.4 Propiedades de las operaciones entre conjuntos

A continuación, se presentan las propiedades que son válidas para realizar operaciones con la unión e intersección:

- Leyes de Idempotencia
    - » A U A = A
    - » A ∩ A = A
- Leyes asociativas
    - » (A U B) U C = A U (B U C)
    - » (A ∩ B) ∩ C = A ∩ (B ∩ C)
- Leyes conmutativas

» A U B = B U A

» A ∩ B = B ∩ A

- Leyes distributivas

» A U (B ∩ C) = (A U B) ∩ (A U C)

» A ∩ (B U C) = (A ∩ B) U (A ∩ C)

Propiedades relacionadas con los conjuntos Universal y Vacío:

- Leyes de identidad

» A U U = U　　A ∩ U = A

» A U ∅ = A　　A ∩ ∅ = ∅

Propiedades relacionadas con respecto al complemento:

- Leyes del complemento

» A u A' = U　　A ∩ A' = ∅

» (A')' = A　　U' = ∅　　∅' = U

- Leyes de D'Morgan

» (A U B)' = A' ∩ B'

» (A ∩ B)'= A' u B'

3.5 Relación entre la lógica y los conjuntos

Todas las leyes del álgebra de conjuntos se apoyan en el análisis lógico.

p = ser un elemento de A
Q = ser un elemento de B

Conjuntos	Proposiciones	Se lee
A ∪ B	p v q	Ser de A o B
A ∩ B	p ∧ q	Ser de A y B
A'	~ p	No ser de A
(A ∪ B)'	~ (p v q)	No ser de A ni ser de B
A' ∩ B'	~p ∧ ~q	No ser de A ni ser de B
(A ∩ B)'	~ (p ∧ q)	No ser de A y B

A' ∪ B'	~p v ~q	No ser de A y B
A ⊂ B	p → q	Si es de A entonces es de B
A ∩ B ≠ ∅	p ∧ q ≠ F	Algunos elementos de A son elementos de B
A ∩ B = ∅	p ∧ q = F	Ningún elemento de A es elemento de B

3.6 PRODUCTO CARTESIANO

- **Pares ordenados:** Un par ordenado (a, b) está formado por un par de objetos, en el cual el orden en que estén es importante, en este caso se tiene que: primero a y después b. Donde las letras a y b se denominan la primera y la segunda componentes, respectivamente, de la pareja ordenada.
- **Producto cartesiano:** Dados los conjuntos A y B, entonces el producto cartesiano (o conjunto producto) de A y B, es el conjunto de todos los pares ordenados (a, b) de tal forma que la primera componente a pertenece al conjunto A y la segunda componente b pertenece al conjunto B. Este conjunto se denomina A x B y se lee "A cruz B", simbólicamente es:

$$A \times B = \{ (a, b) / a \in A \wedge b \in B \}$$

Ejemplo 3.13: A={m, n, p}, B={x, y} entonces:

$$A \times B = \{ (m, x), (m, y), (n, x), (n, y), (p, x), (p, y) \}$$

3.7 Sistemas numéricos

3.7.1 El conjunto de los números naturales (N)

Es el conjunto de los números que utiliza el hombre para contar, como son: {1, 2, 3, 4...} a este conjunto de números se le denota con N. El conjunto de los números naturales se caracteriza por:

- Poseer un primer elemento natural. (Actualmente existen dos teorías de los números N, una afirma que el cero (0) no es un natural y otra que afirma que el cero (0) es un natural.).
- Es un conjunto infinito y su infinitud esta hacia la derecha.

- Es un conjunto ordenado, ya que dado un número natural cualquiera podemos hallar el siguiente, $n < n + 1$ con $n \in \mathbb{N}$.
- Para representar el conjunto de números naturales se utiliza una recta numérica, la cual contiene un punto llamado origen, que es el cero; está dividida en semirrectas de igual tamaño y cumple con una correspondencia biunívoca entre cada punto y sus respectivos números.
- Las operaciones permitidas son: la suma y la multiplicación

3.7.2 El conjunto de los números enteros (Z)

El conjunto de los números enteros ($\mathbb{Z}$), está constituido por los números naturales y los números enteros negativos, es decir:

$$Z = \{...-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3...\}$$

Al analizar el conjunto de los números enteros se puede concluir que:

- Los números naturales están contenidos en los números enteros, esto es: $N \subset Z$.
- No poseen un primer elemento.
- Es un conjunto infinito tanto a la izquierda como a la derecha.
- Es un conjunto ordenado, ya que dado un número natural cualquiera podemos hallar el siguiente, $z < z + 1$ con $z \in \mathbb{Z}$.
- Para representar el conjunto de números enteros se utiliza una recta numérica, la cual contiene un punto llamado origen, que es el cero; está dividida en semirrectas de igual tamaño y cumple con una correspondencia biunívoca entre cada punto y sus respectivos números.
- Las operaciones permitidas con los números enteros son: la suma, multiplicación y diferencia.

3.7.3 El conjunto de los números racionales (Q)

Es un conjunto formado por:

$$Q = \{ x / x = p/q \text{ con } p \wedge q \in Z \text{ pero con } q \neq 0\}$$

Notaciones:

- Q+ = Representa a los números racionales positivos, esto implica que el numerador y el denominador tienen el mismo signo.
- Q- = Representa a los números racionales negativos, esto implica que el numerador y el denominador tienen diferente signo.

CLASES DE FRACCIONES

- **Fraccionario puro:** Es aquel número que se presenta en la forma p/q, $p \wedge q \in Z$ pero con $q \neq 0$.
- **Fraccionario decimal:** Es aquel número que se obtiene al efectuar la división entre el numerador y el denominador, ejemplos: 0.5, 0.75, 1.5, 0.333..., etc. Dentro de los fraccionarios decimales encontramos:
    - » A los fraccionarios decimales periódicos: que es aquel número cuyas cifras decimales se repiten por periodos, ejemplo:
        - * 0.7575 fraccionario periódico cuyo periodo es 75
        - * 0.9999 fraccionario periódico cuyo periodo es 9
    - » Fraccionario decimal no periódico: es aquel número cuyas cifras decimales no se repiten, ejemplo:
        - * 3.1415926535 = pi
        - * 2.7182 = e

Analizando la definición de los racionales podemos afirmar que:

- Es un conjunto infinito.
- Es un conjunto ordenado, pero se desconoce la estructura de cómo van ordenados o secuenciados.
- Los números racionales están formados por los fraccionarios puros, los números con decimales periódicos o exactos.
- Además, se tiene que: $N \subset Z \subset Q$.
- Las operaciones definidas en los racionales son: la suma, multiplicación, diferencia y división.

3.7.4 El conjunto de los irracionales (Q)*

Es el conjunto que se caracteriza por:

- Ser un conjunto infinito.
- Ser un conjunto ordenado, pero se desconoce la estructura de cómo van ordenados o secuenciados.
- Estar formado por los números con decimales no periódicos, ejemplo: el número pi, el número e, raíz cuadrada de 3, etc.
- Permitir realizar las cuatro operaciones básicas que son: la suma, multiplicación, diferencia y división.
- Además, se tiene que el conjunto de los números racionales y el conjunto de los números irracionales son disjuntos es decir que: $Q \cap Q^* = \phi$

3.7.5 El conjunto de los números reales (R)

Ese el conjunto formados por la unión de los conjuntos de los números racionales e irracionales, esto es:

$$R = N \cup Z \cup Q \cup Q^* = Q \text{ u } Q^*$$

Este conjunto se caracteriza por:

- Ser un conjunto infinito.
- Es un conjunto ordenado, pero se desconoce la estructura de cómo van ordenados o secuenciados.
- La definición anterior implica que los, N, Z, Q y los Q* están contenidos en los R.
- Permitir todas las operaciones básicas como son: la suma, resta, multiplicación y división.
- Asignar un número a cada punto de la recta numérica.

3.7.6 El conjunto de los números imaginarios (I)

Es el conjunto de números que poseen la forma:

$$I = \{x/\ x = a\,i \quad con \quad a \in \mathbb{R} \quad y \quad i = \sqrt{-1}\}$$

Este conjunto se caracteriza por:

- Ser un conjunto infinito.
- Es un conjunto ordenado, pero se desconoce la estructura de cómo van ordenados o secuenciados.
- El conjunto de los números reales y el conjunto de los números imaginarios son disjuntos, lo que implica que: $\mathbb{R} \cap I = \phi$.
- En el conjunto de los números imaginarios están permitidas todas las operaciones básicas como son: la suma, resta, multiplicación y división.
- Se representan en la recta numérica de los números imaginarios.

3.7.7 El conjunto de los números complejos ($\mathbb{C}$)

Es el conjunto universal de todos los conjuntos numéricos, y está dado por los números de la forma:

$$\mathbb{C} = \{x/\ x = a + b\,i \quad con \quad a, b \in R \quad y \quad i = \sqrt{-1}\}$$

Al analizar el conjunto de los números enteros se puede concluir que:

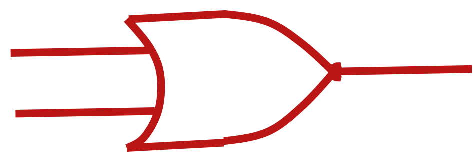
- Es un conjunto infinito.
- Es un conjunto ordenado, pero se desconoce la estructura de cómo van ordenados o secuenciados.
- Se puede apreciar que este conjunto es la unión de los números reales con los imaginarios, es decir: $\mathbb{C} = \mathbb{R} \cup I$.
- Los puntos están formados por una pareja ordena de la forma (a, b i), los cuales se puede representar en plano complejo.

3.8 Variables y constantes booleanas

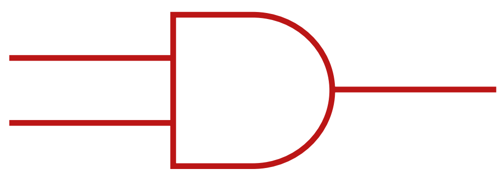
En el álgebra booleana las variables y constantes solo pueden tener dos valores que son: el cero (0) o uno (1). Una variable booleana conocida también como una variable lógica, se caracteriza por ser igual a 0 o a 1 en muchas ocasiones. Estas variables booleanas son utilizadas para representar el nivel de voltaje que tienen los terminales de entrada y salida de un circuito.

3.9 Operaciones del álgebra booleana

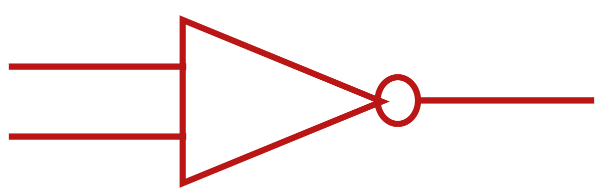
- **Adición o suma lógica:** También llamada operador OR, corresponde a la disyunción de proposiciones lógicas y a la unión de conjuntos; su símbolo es (+). Este dispositivo electrónico que realiza esta operación recibe el nombre de compuerta OR. Su representación es:



- **Multiplicación o producto lógico:** Llamada También operación AND, corresponde a la conjunción de proposiciones en lógica y a la intersección de conjuntos; su símbolo es el punto (.). Este dispositivo electrónico que realiza esta operación se llama compuerta AND. Su representación es:



- **Complementación o inversión lógica:** Denominada También operación NOT, corresponde a la negación de una proposición en lógica o a la operación de complementación en conjuntos; su símbolo es el apóstrofe en la variable complementada. Este dispositivo electrónico que realiza esta sentencia u operación es un inversor. Su representación es:



3.10 Álgebra de Boole postulados y teoremas

En el álgebra de Boole, es de gran utilidad definir operaciones bivalentes, es decir realizar operaciones con solo dos elementos. Considerando así el álgebra como un conjunto de elementos binarios relacionados entre sí mediante las operaciones lógicas como son el producto [.] y la suma [+], que cumplen con las siguientes propiedades o postulados:

Si consideramos que las letras a, b, c, etc., indican variables binarias se tiene que:

Existe el elemento identidad

$$a + 0 = a$$
$$a . 1 = a$$

Las dos operaciones cumplen con la propiedad conmutativa

$$a + b = b + a$$
$$a . b = b . a$$

Propiedad distributiva

$$a . (b + c) = (a . b) + (a . c)$$
$$a + (b . c) = (a + b) . (a + c)$$

Complementación o inversión lógica

$$a + a' = 1$$
$$a . a' = 0$$

Algunos teoremas importantes son:

- **Dualidad:** Toda igualdad lógica sigue siendo válida si se intercambian los operadores (+ y .) y los elementos de identidad (0 y 1). La simetría de los postulados demuestra este teorema.

El álgebra es un conjunto cerrado; es decir, los resultados de aplicar las operaciones lógicas a las variables pertenecen al álgebra.

En el álgebra se cumple que

$$a + 1 = 1$$
$$a \,.\, 0 = 0$$

Ley de Idempotencia

$$a + a = a$$
$$a \,.\, a = a$$

Ley de involución

$$(a')' = a$$

Las operaciones lógicas son asociativas

$$a + (b + a) = (a + b) + c$$
$$a \,.\, (b \,.\, c) = a \,.\, (b \,.\, c)$$

Absorción

$$a = a + (a \,.\, b)$$
$$a = a \,.\, (a + b)$$

Leyes de D'Morgan

$$(a + b + c + d + \ldots\ldots\!+ n)' = a' \,.\, b' \,.\, c' \,.\, d' \ldots\ldots\ldots n'$$
$$(a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \ldots\ldots\ldots n)' = a' + b' + c' + d' + \ldots\ldots\ldots + n'$$

3.11 Funciones lógicas

Una función lógica es una variable binaria que depende de otras variables binarias relacionadas entre sí por las operaciones lógicas. Una función lógica se nota de la siguiente manera:

$$f(a, b, c, \ldots, n) = \{expresión\ lógica\ que\ involucra\ a\ las\ variables\ a, b, c, d, \ldots\ldots, n\}$$

La función adoptará el valor 0 o 1 de acuerdo con la expresión y al valor determinado de las variables.

Por ejemplo 3.14: $f(a, b, c) = ab' + ac$

Se trata de una función de tres variables a la cual le corresponde la siguiente Tabla de Verdad. Puede decirse que la tabla de verdad es otra forma de expresar una función lógica.

c	b	a	b'	a b'	a c	f(a, b, c) = ab' + ac
0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	1	1

Las expresiones booleanas se representan en dos formas muy útiles para sus aplicaciones tecnológicas o de sistemas, y por ello es conveniente expresarlas por una suma de productos o por un producto de las sumas denominadas, esto se conoce como la estructura o forma normal disyuntiva y la forma normal conjuntiva.

3.12 Expresión booleana de la forma normal disyuntiva

Son aquellas que se pueden escribir como una suma de términos algebraicos, en cuyo caso los términos son conocidos como término minimal, lo que hace que la función que contenga esta expresión se le denomina función polinomial con términos minimales. Es importante resaltar que para llevar expresiones de esta forma se requiere aplicar las Leyes D'Morgan

Ejemplo 3.15: las siguientes funciones son minimales:

- $y + y'$
- xy
- $xyz + x'yz + x'y'z'$

Ejemplo 3.16: Dada la función: $f(x,y,z) = (xy + yz)' + y'$, expresarla en la forma normal disyuntiva.

Solución: Primero se simplifica para eliminar todos los complementos en alguna asociación.

$$f(x,y,z) = (xy + yz)' + y' = (xy)'\,(yz)' + y' = (x' + y')(y' + z) + y' = y' + x'z + y' = y' + x'z$$

Multiplicamos para formar los productos donde estén presente todas las variables de la función

$$f(x,y,z) = y' + x'z$$
$$f(x,y,z) = y'(x + x')(z + z') + x'z(y + y')$$
$$f(x,y,z) = y'(xz + xz' + x'z + x'z') + x'yz + x'y'z)$$
$$f(x,y,z) = xy'z + xy'z' + x'y'z + x'y'z' + x'yz + x'y'z)$$
$$f(x,y,z) = xy'z + xy'z' + x'y'z + x'y'z' + x'yz$$

3.13 Expresión booleana de la forma normal conjuntiva

Cuando la función booleana se puede escribir como un producto de los términos de la expresión. Y en la cual dada uno de los productos deben contener la suma de cada una de las variables presentes en la expresión algebraica.

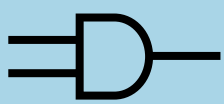
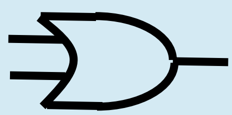
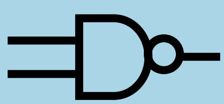
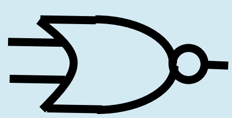
Ejemplo 3.16: Dada la función: $f(x,y,z) = (xy + yz)' + y'$, expresarla en la forma normal conjuntiva.

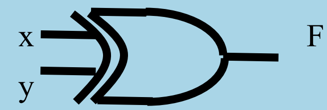
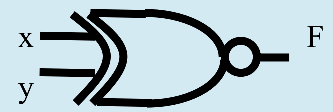
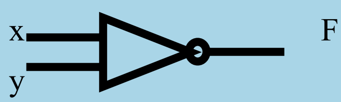
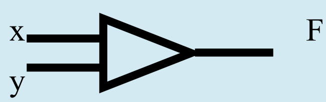
Solución:

$$f(x,y,z) = (xy + yz)' + y' = (xy)'.(yz)' + y' = (x' + y').(y' + z) + y'$$
$$f(x,y,z) = y' + (x' + y').(y' + z)$$
$$f(x,y,z) = (y' + x' + y')\,(y' + y' + z)$$
$$f(x,y,z) = (x' + y')\,(y' + z)$$
$$f(x,y,z) = (x' + y' + z\,z').(x\,x' + y' + z)$$
$$f(x,y,z) = (x' + y' + z)(x' + y' + z')\,(x + y' + z)\ \ (x' + y' + z)$$
$$f(x,y,z) = (x' + y' + z).(x' + y' + z')\,(x + y' + z)\ \ (x' + y' + z)$$

3.14 COMPUERTAS LÓGICAS

Las compuertas lógicas son utilizadas en los circuitos electrónicos, que se caracterizan por estar conformados en su interior por transistores que se encuentran diseñados para otorgar señales de voltaje como resultado o una salida de forma booleana, la cual puede usarse para realizar operaciones lógicas binarias como es la suma o la multiplicación. Estas compuertas se usan en los circuitos lógicos para ejecutar acciones como son la negación, afirmación, inclusión o exclusión según las propiedades lógicas para lo cual fueron diseñadas. Las compuertas también se aplican en otras áreas de la ciencia como son: la mecánica, la hidráulica o la neumática. A continuación, se presentan los operadores de las compuertas lógicas, así como su función y salida en un circuito.

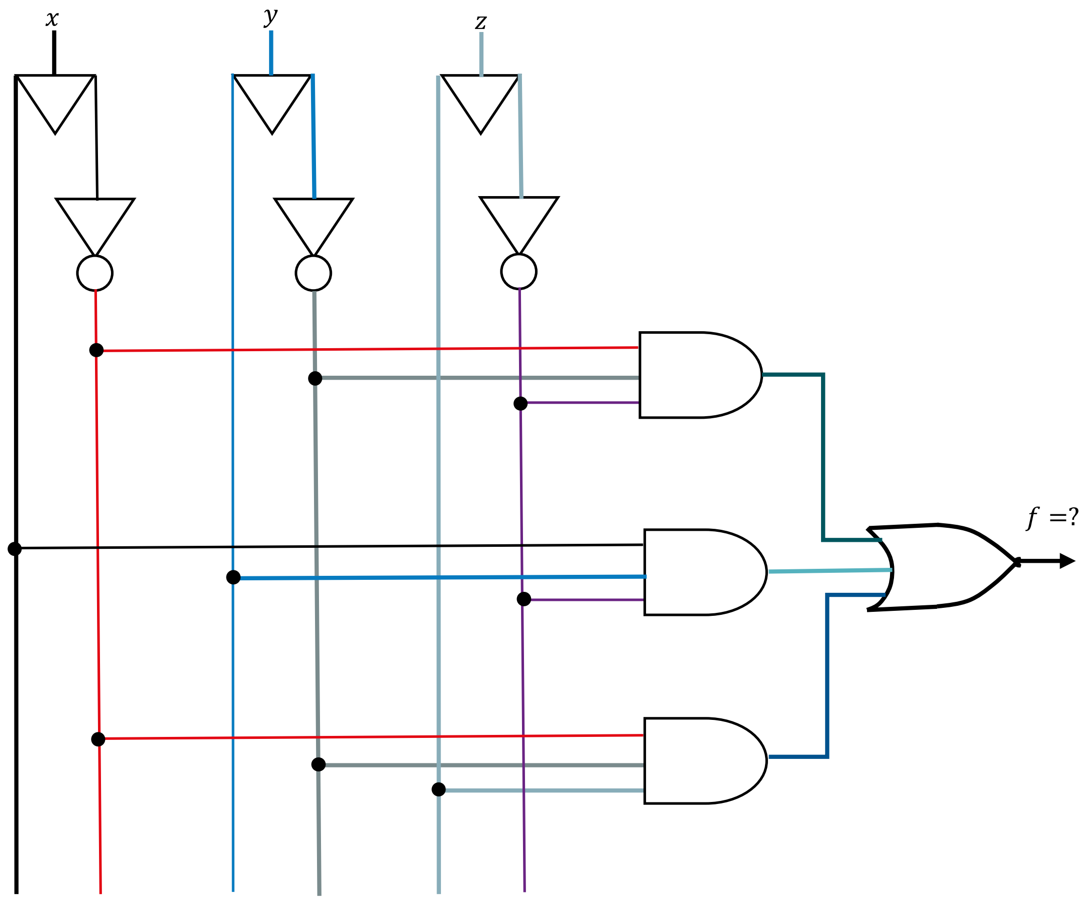
NOMBRE	SÍMBOLO	FUNCIÓN	TABLA
AND	x y  F	F = x y	x y F: 0 0 0; 0 1 0; 1 0 0; 1 1 1
OR	x y  F	F = x + y	x y F: 0 0 0; 0 1 1; 1 0 1; 1 1 1
NAND	x y  F	F = (x y)’	x y F: 0 0 1; 0 1 1; 1 0 1; 1 1 0
NOR	x y  F	F = (x + y)’	x y F: 0 0 1; 0 1 0; 1 0 0; 1 1 0

<table>
<tr><td>XOR</td><td></td><td>F = x y' + x' y</td><td><table><tr><td>x</td><td>y</td><td>F</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>XNOR</td><td></td><td>F = x y + x' y'</td><td><table><tr><td>x</td><td>y</td><td>F</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>NOT (Inversor)</td><td></td><td>F = x'</td><td><table><tr><td>x</td><td>F</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Buffer</td><td></td><td>F = x</td><td><table><tr><td>x</td><td>F</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td></tr></table></td></tr>
</table>

Aplicaciones de las compuertas lógicas

Ejemplo 3.17: Calcular la expresión Booleana para la salida de $f(x, y, z)$ del siguiente circuito lógico. Una vez encuentre la función hallar todas las posibles opciones de respuesta usando una Tabla de Verdad.

3. Conjunto



Solución: de los tres and se tienen los siguientes productos:

Del and de la parte superior: $x'y'z'$
Del and ubicado en el centro: xyz'
Del and de la parte inferior: $x'y'z$
Estos tres productos se recogen con un sumador u or:

$$f(x,y,z) = x'y'z' + xyz' + x'y'z$$

$$f(x,y,z) = x'y'z' + xyz' + x'y'z$$

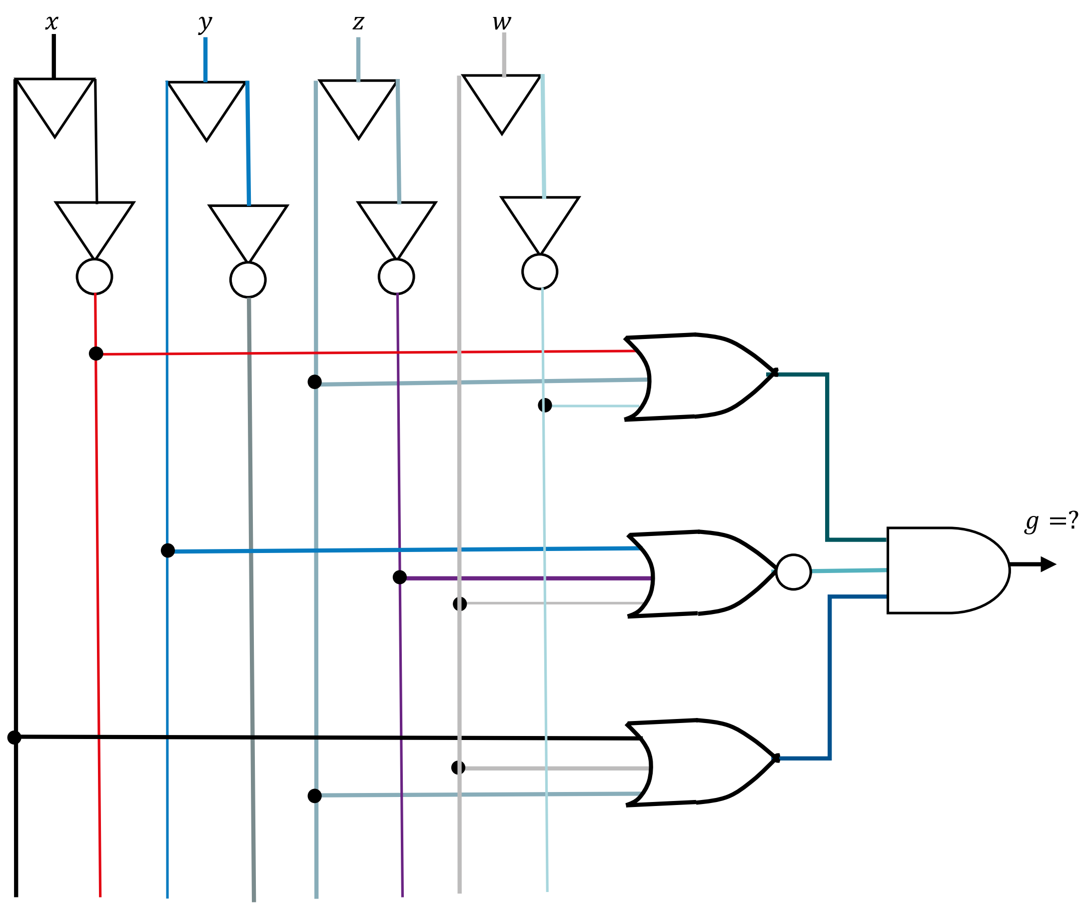
La tabla de verdad para $f(x, y, z) = x'y'z' + xyz' + x'y'z$ es:

x	y	z	x'	y'	z'	x' y' z'	x y z'	x' y' z	f = x' y' z' + x y z' + x' y' z
0	0	0	1	1	1	1	0	0	1
0	0	1	1	1	0	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0

Aplicaciones de las compuertas lógicas

Ejemplo 3.18: Calcular la expresión Booleana para la salida de $g(x, y, z, w)$ del siguiente circuito lógico. Una vez encuentre la función encuentre todas las posibles opciones de respuesta usando una tabla de verdad.

3. Conjunto



Solución: de los tres or o sumadores se tienen los siguientes productos:

Del or de la parte superior: $x' + z + w'$
Del or negado ubicado en el centro: $(y + z' + w)'$
Del or de la parte inferior: $x + w + z$

Estos tres productos se recogen con un sumador u or:

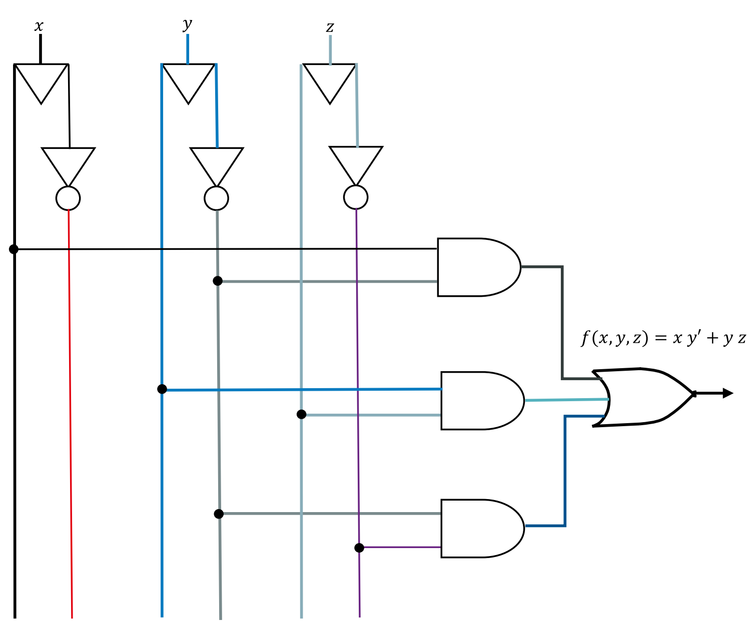
$$g(x, y, z, w) = (x' + z + w')\,(y + z' + w)'\,(x + w + z)$$

La Tabla de Verdad para $g(x, y, z, w) = (x' + z + w')\,(y + z' + w)'\,(x + w + z)$ es:

x	y	z	w	x'	z'	w'	x'+z+w'	y+ z'+w	(y+z'+w)'	x+w+z	f = (x'+z+w') (y+z'+w)' (x+w+z)
0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0
0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0
0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0
0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0
1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0
1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0
1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0
1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0
1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0

Ejemplo 3.19: Diseñar el circuito lógico representado por función $f(x, y, z) = xy' + yz + y'z'$. Construya una Tabla de Verdad para mostrar todas las posibles salidas de la función.

Solución:



La Tabla de Verdad de la función $f(x,y,z) = xy' + yz + y'z'$ es

x	y	z	y'	z'	x y'	y z	y' z'	f = x y' + y z + y' z'
0	0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0	1
1	0	0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	1	0	1

ASIGNACIÓN 1 DE LA UNIDAD III

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Sean A = {a, b}, B = {a, b, c}, C = {c, d, e}, D = {b, c}, E = {a, b, c, d, e}, establecer la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones:

- » D ⊄ B
- » C ⊂ E
- » C ⊂ D
- » E ⊂ A

2. Dado M= {0, 1, {0, 1} } establecer la verdad o falsedad de:

- » { 1 } ∈ M
- » { 0, 1 } ∈ M C. { 0, 1 } ⊂ M
- » { { 0, 1 } } ∈ M

3. Si X = {a, b, c, {a, b} }, establecer la verdad o falsedad de:

- » b ∈ X b) c ∈ X c) {a, b} ∈ X
- » { Ø } ⊂ X e) Ø ⊂ X

4. Hallar todos los subconjuntos de

- » M = {Ø, a, b, c {Ø, {a, c} } }

5. Si A, B, C, D, E son conjuntos con 3, 7, 12, 4 y 5 elementos respectivamente, cuántos elementos tiene el conjunto de partes de M = {A, B, C, D, E}

6. Si U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}, A = {1, 2, 3,4}, B= {2, 4, 5, 6} , C= {3, 4, 6, 7} comprobar que:

- » (A ∩ C) ⊂ A
- » (A ⊕ C) ⊂ (A ∪ B)
- » A ∪ (B ∩ C) = (A ∪ B) ∩ (A ∪ C)
- » (A ∩ B)’ = A’ ∩ B’

7. Para los conjuntos del ejercicio 6 hallar:

- » $A' \cap B'$
- » $(A \cup B)'$
- » $A - B$
- » $B \cap C$
- » $(C - A)' - B$
- » $(A \oplus C) \cap (B \oplus C)$

8. Hallar los conjuntos A y B si: $A' = \{3, 4, 5\}$, $B' = \{1, 2, 4\}$ y $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

9. Escribir el dual de:

- » $(A \cap \emptyset) \cup (A \cap U) = A$
- » $A \cup \cup = U$
- » $(A \cap B)' = A' \cup B'$
- » $(A \cap B) \cup C = (A \cup B) \cap (B \cup C)$

10. Hallar el dual de:

- » $X . X' = 0$
- » $X + X' = 1$
- » $X . (X + Y) = X$
- » $X . (Y + Z) = X . Y + X . Z$

11. Demostrar que:

- » $(X.Y) + (X'.Y) = Y$
- » $(X + Y).(X' + Y) = Y$

12. Dados $n(U) = 60$, $n(A) = 10$, $n(B) = 20$, $n(C) = 38$, $n(B \cap C) = 8$, $n(A \cap C) = 0$, $A \subset C$ hallar:

- » $n(C - B)$
- » $n(B \cup C)'$

- » n(A ∪ C)’
- » n[C - (A U B)’]

13. Determinar los elementos de los conjuntos X y Y, sabiendo que el complemento de Y es el conjunto (m, n, t), X U Y= (m, n, p, q, r) y X ∩ Y= (p, q)

14. Determinar cuál de los conjuntos dados es vacío:

- » A= {a/ a ∈ N y a2 – 1 = 0}
- » B= {b/ b ∈ R y b2 – 2 = 0}
- » C= {c/ c ∈ Q y c2 – 9 = 0}
- » D= {d/ d ∈ Q’ y d2 – 3 = 0}
- » E= {e/ e ∈ R y e2 + 9 = 0}

15. En un examen a 200 estudiantes relacionado con la habilidad para leer inglés, francés, español. Se obtuvieron los siguientes resultados: 80 leen inglés, 105 leen francés, 80 leen español, 55 leen español y francés, 55 leen inglés y no leen francés, 60 leen inglés y no leen español, 15 leen inglés y español, pero no francés. Cuántos de estos estudiantes

- » Leen los tres idiomas. B) cuántos leen únicamente francés. C) cuántos leen uno de los tres idiomas. D) cuántos leen español, pero no inglés ni francés.

16. Dados los conjuntos no disyuntos A y B, usar diagramas de ven para mostrar que:

- » A U (A ∩ B) = A
- » A ∩ (A ∪ B) = A
- » (A U B)’ = A’ ∩ B’
- » (A ∩ B)’ = A’ U B’

17. Si A ⊂ B demuestre que:

- » A ∪ B = B
- » A ∩ B’ = Ø

- $A \cap B = A$
- $A' \cup B = U$

18. Demostrar utilizando las leyes del álgebra de conjuntos:

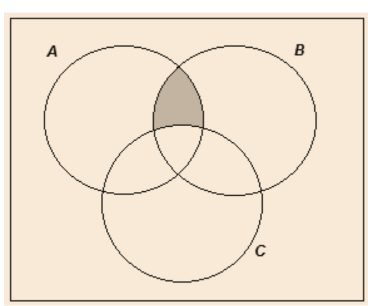
- $(A \oplus B) = (A \cap B') \cup (A' \cap B)$
- $(A \oplus B)' = [(A \cap B') \cup (A' \cap B)]'$
- $(A \oplus B)' = (A' \cup B) \cap (A \cup B')$

19. Dados tres conjuntos A, B, C demuestre utilizando las leyes del álgebra de conjuntos las siguientes igualdades:

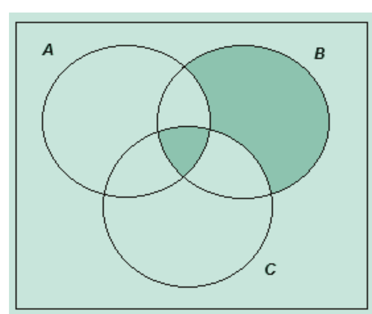
- $(A \cap B') \cup (A \cap C) \cup (A \cap B) = A$
- $(A \cup B) \cap (A' \cup B) = B$
- $(A \cap B \cap C) \cup (A' \cup B' \cup C') = U$
- $(A \cup B') \cap (B \cup C) \cap (B \cup C') = A \cap B$
- $(A \cap B) \cup (A' \cap C) \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A' \cap C)$
- $(A \cup B) \cap (A' \cup B') = (A' \cap B) \cup (A \cap B')$

20. En cada uno de los diagramas de ven identificar el área sombreada.

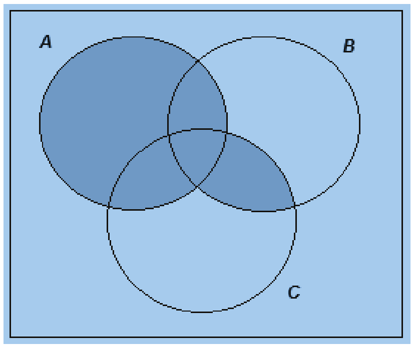
a)



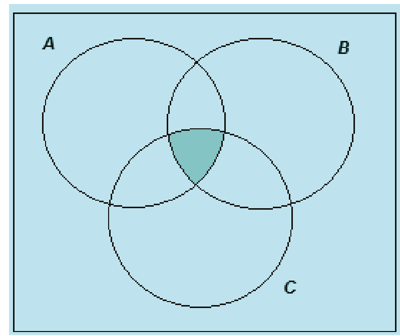
b)



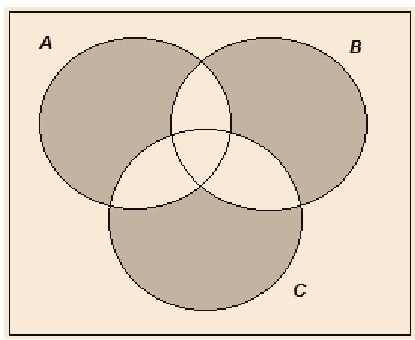
c)



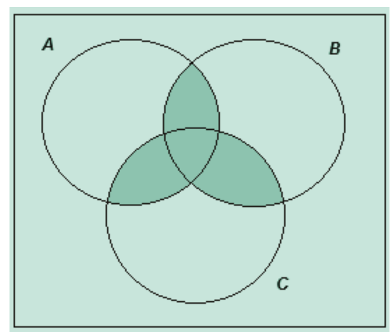
d)



e)



f)



21. Simplificar utilizando las leyes:

» A ∩ B’ ∩ A’ ∩ B’

» (A ∩ B) ∪ (A ∩ B’) ∪ (A’ ∩ B) ∪ (A’ ∩ B’)

» (A ∩ C’) ∪ (A ∩ B ∩ C) ∪ (A ∩ C)

» (A ∩ B ∩ C) ∪ A’ ∪ B’ ∪ C’

» (A ∪ B) ∩ (A’ ∪ B)

» [B ∪ (C’ ∩ B)] ∩ [B ∪ (A ∩ C)]

» (A ∩ B’) ∪ (A ∩ C) ∪ (A ∩ B)

ASIGNACIÓN 2 DE LA UNIDAD III

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Construya el circuito lógico de las funciones:

» $f(x,y) = (x + y')(x' + y)$

» $f(x,y,z) = x + y' + z + xy + xyz'$

» $f(x,y,z) = xy + yz' + x'y'z$

» $f(x,y,z) = (xyz + x'z)x'y'z' + xy'z + x'z'$

2. Simplificar las siguientes expresiones booleanas para diseñar el circuito lógico equivalente:

» $(x + y)(x' + y)$

» $(x + xy + xyz)(x + y + z)$

» $(xy' + xy + x'y)'.(xy + x'y')'$

3. Simplificar las siguientes expresiones booleanas:

» $(yz + xuw)(yz + x' + u' + w')$

» $xyz + xy'z + x'yzx$

» $(x + y + z + x'y'z')(yz + yz' + y'z)$

» $(yz + y'z' + yz')[(y' + z')(y + z')]'$

» $xy + x'z + yz$

» $(x + y)(x' + z)(y + z)$

4. Escribir cada una de las siguientes expresiones en la forma normal disyuntiva con el menor número posible de variables:

» $(x + y')(y + z')(z + x')(x' + y')$

» $(x + y')(y + z)(y + z')$

» $x'yz + xy'z' + x'yz' + x'y'z + xyz' + x'y'z'$

5. Escribir cada una de las siguientes expresiones en la forma normal conjuntiva con el menor número posible de variables:

» $(x + y')(y + z')(z + x')(x' + y')$

» $(x + y')(y + z)(y + z')$

» $x'yz + xy'z' + x'yz' + x'y'z + xyz' + x'y'z'$

6. Completar cada expresión:

» $x + 1 =$

» $x.x =$

» $y.y' =$

» $z + z =$

» $x.0 =$

» $x.1 =$

» $x + 0 =$

» $z + z' =$

» $y + yz =$

» $x + z\acute{y} =$

7. Simplificar las siguientes expresiones mediante Ley de D´Morgan:

» $(x'y\,z')' =$

» $(x' + y'z)' =$

» $[xy(zw)']' =$

» $[x(y + z')']'w =$

» $[(x + y')(x' + y)]' =$

» $\{[(xy)'z]'\}' =$

8. Para cada una de las siguientes expresiones construir el circuito lógico correspondiente: 1) Utilizando compuertas AND y OR. 2) Utilizando compuertas NAND y NOR. Use inversores si es necesario.

3. Conjunto

- $f = [xy(z+w)]'$
- $g = (x + y + z'w\,u')' + y'z\,w'$
- $h = (x + y)' + z'w$
- $i = (x + zw')'$
- $j = xy(z + y')$

BIBLIOGRAFÍA

BARCO, C y Otros. Matemática Digital. McGraw-Hill. Colombia, 2001.

LIDL, R. y PILZ, G. Applied Abstract Algebra. Ed Springer Verlag, New York, 1984.

MANO, M. Arquitectura de Computadores, tercera edición, ED Prentice Hall Hispanoamericana S. A, México, 1994.

ROMERO, Julio. Notas de Clase de Lógica Matemáticas, Universidad del Atlántico, Colombia. 2016.

ACERCA DE LOS AUTORES

JULIO CESAR ROMERO PABÓN.
Docente de matemáticas de la Universidad del Atlántico.
Licenciado en Matemáticas y Física.
Especialista en Administración y Docencia Universitaria.
Magíster en Matemática Aplicada.
Doctor en Ciencias de las Educación Mención Matemática.

GABRIEL MAURICIO VERGARA RÍOS.
Docente de matemáticas de la Universidad del Atlántico.
Licenciado en Matemáticas y Física.
Especialista en Matemáticas.
Magíster en Ciencias Matemática.
Doctor en Ciencias de las Educación Mención Matemática.

ROBERTO ENRIQUE FIGUEROA MOLINA.
Docente de educación de la Universidad del Atlántico.
Químico Farmacéutico.
Magíster en Docencia de la Química.
Doctor Educación.