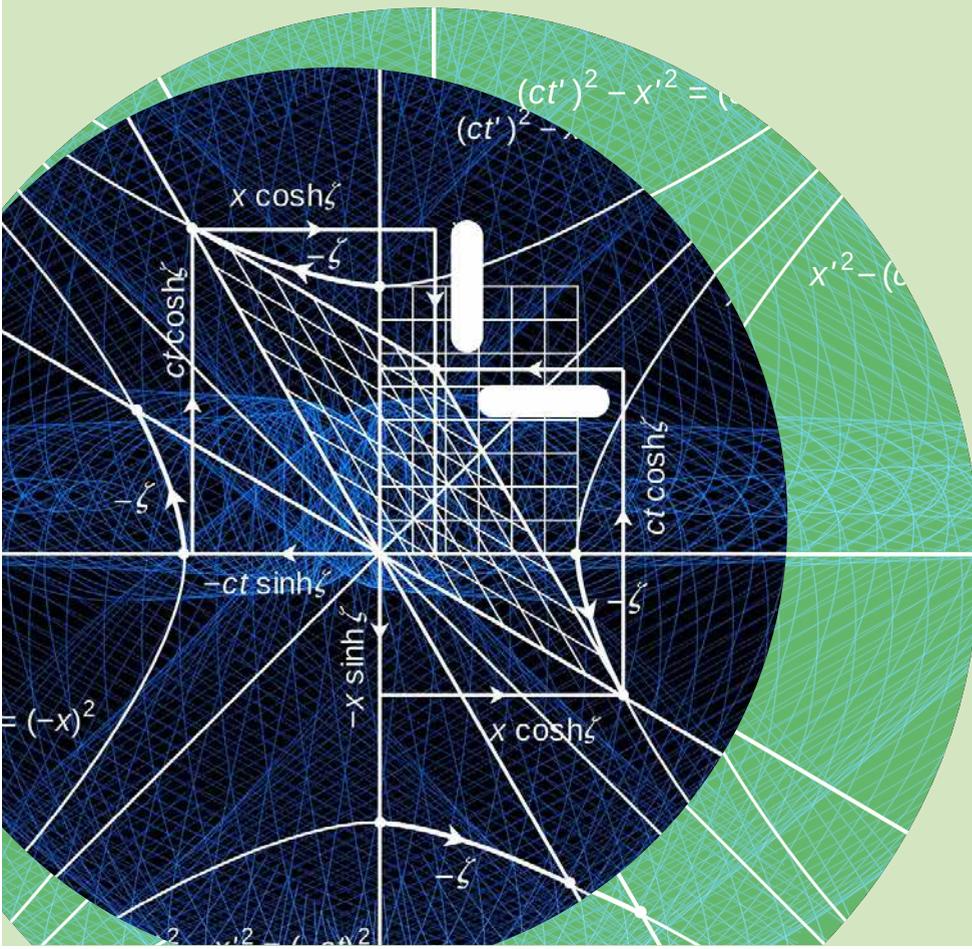


COLECCIÓN INVESTIGACIÓN Y DESARROLLO PARA TODOS

Estudio cualitativo y algebraico de sistemas diferenciales multiparamétricos

JORGE LUIS RODRÍGUEZ CONTRERAS
ALBERTO MARIO REYES LINERO



COLECCIÓN INVESTIGACIÓN Y DESARROLLO PARA TODOS

Estudio cualitativo y algebraico de sistemas diferenciales multiparamétricos

JORGE LUIS RODRÍGUEZ CONTRERAS

ALBERTO MARIO REYES LINERO



Sello Editorial

UNIVERSIDAD
DEL ATLÁNTICO

Rodríguez Contreras, Jorge Luis y Reyes Linero, Alberto Mario.

Estudio cualitativo y algebraico de sistemas diferenciales multiparamétricos.

/ -- Barranquilla

: Sello Editorial Universidad del Atlántico, 2020.

246 p. : il. ; 24 cm.

(Colección Investigación y desarrollo para todos. Facultad de Ciencias Básicas de la Universidad del Atlántico)

Incluye referencias bibliográficas

1. Seguridad industrial--Colombia. 2. Salud ocupacional--Colombia 3. Seguridad Social--Colombia I. Tít.

(348.8 R673 18 ed.) (CO-BrUNB)



Sello Editorial
UNIVERSIDAD
DEL ATLÁNTICO

www.unitlantico.edu.co
Kilómetro 7, Antigua Vía a Puerto Colombia.
Barranquilla, Colombia.

© 2020, Sello Editorial Universidad del Atlántico.

ISBN 978-958-5173-30-9

Coordinación editorial

Sonia Ethel Durán.

Asistencia editorial

Estefanía Calderón Potes.

Diseño y diagramación

Joaquín Camargo Valle.

Revisión y corrección

Lorenzo Elejalde.

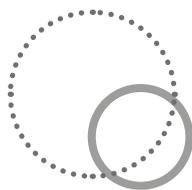
Impreso y hecho en Barranquilla, Colombia.

Ditar S.A. www.ditar.co
Kilómetro 7, Vía a Juan Mina.
Parque Industrial Clavería.

Printed and made in Barranquilla, Colombia.



Esta obra se publica bajo una licencia Creative Commons Reconocimiento-No Comercial-CompartirIgual 4.0 Internacional (CC BY-NC-SA 4.0). Esta licencia permite la distribución, copia y exhibición por terceros de esta obra siempre que se mencione la autoría y procedencia, se realice con fines no comerciales y se mantenga esta nota. Se autoriza también la creación de obras derivadas siempre que mantengan la misma licencia al ser divulgadas.



La presente colección es posible gracias a las siguientes autoridades académicas de la Universidad del Atlántico:

José Rodolfo Henao Gil

Rector

Leonardo Niebles Núñez

Vicerrector de Investigaciones, Extensión y Proyección Social

Danilo Hernández Rodríguez

Vicerrector de Docencia

Mariluz Stevenson

Vicerrectora Financiera

Josefa Cassiani Pérez

Secretaria General

Miguel Caro Candezano

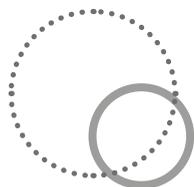
Jefe del Departamento de Investigaciones

Agradecimientos especiales

Facultad de Ciencias Básicas

Decano Alberto Moreno Rossi

2020



La colección ***Investigación y desarrollo para todos*** es una iniciativa liderada por la Vicerrectoría de Investigaciones, Extensión y Proyección Social de la Universidad del Atlántico, pensada como herramienta para la divulgación de la investigación y el conocimiento que se genera en el Caribe colombiano.

Contenido

Introducción	1
---------------------------	----------

Capítulo 1

Función de Lyapunov en un sistema diferencial multiparamétrico	6
---	----------

Jorge Rodríguez Contreras, Angélica Arroyo Cabrera, Osmín Ferrer Villar

Resumen	6
Introducción.....	6
Función de Lyapunov.....	8
Bibliografía	26

Capítulo 2

Sólido invariante e integrales de Darboux en un sistema diferencial multiparamétrico.....	27
--	-----------

Jorge Rodríguez Contreras, Angélica Arroyo Cabrera, Ismael Cohen

Resumen	27
Introducción.....	28
Bibliografía	56

Capítulo 3

Sistemas, teoría cualitativa y herramientas algebraicas en un caso particular – Una revisión57

Jorge Rodríguez Contreras, Alberto Reyes Linero, Primitivo B. Acosta-Humánez

Resumen 57

Introducción..... 58

Bibliografía 78

Capítulo 4

Polinomios ortogonales y campos polinomiales cuadráticos79

Jorge Rodríguez Contreras, Alberto Reyes Linero, María Campo Donado,

Primitivo B. Acosta-Humánez

Resumen 79

Introducción..... 80

Bibliografía 106

Capítulo 5

Bifurcaciones transcriticals de una familia cuadrática multiparamétrica 108

Jorge Rodríguez Contreras, Alberto Reyes Linero, Bladimir Blanco Montes,

Luz A. Rodríguez Paba

Resumen 108

Introducción..... 109

Preliminares 111

Bibliografía 147

Capítulo 6

Retrato de fase global y diagrama de bifurcación para un sistema lineal multiparamétrico 148

Jorge Rodríguez Contreras, Alberto Reyes Linero, Juliana Vargas Sánchez

Resumen 148

Introducción..... 149

Bibliografía 182

Capítulo 7

Ciclos límites en un sistema multiparamétrico de la forma $\dot{x}=1-x^2+xy$ $\dot{y}=\beta(1-x^2+xy)+mxy$.....	183
--	------------

Jorge Rodríguez Contreras, Alberto Reyes Linero, Fiana Jiménez Ochoa

Resumen	183
---------------	-----

Bibliografía	203
--------------------	-----

Capítulo 8

Ciclos límites en un sistema multiparamétricos de la forma $\dot{x}=1-x^2+xy$ $\dot{y}=\beta(1-x^2+xy)+mxy+sy^2$.....	205
--	------------

Jorge Rodríguez Contreras, Alberto Reyes Linero, Fiana Jiménez Ochoa

Resumen	205
---------------	-----

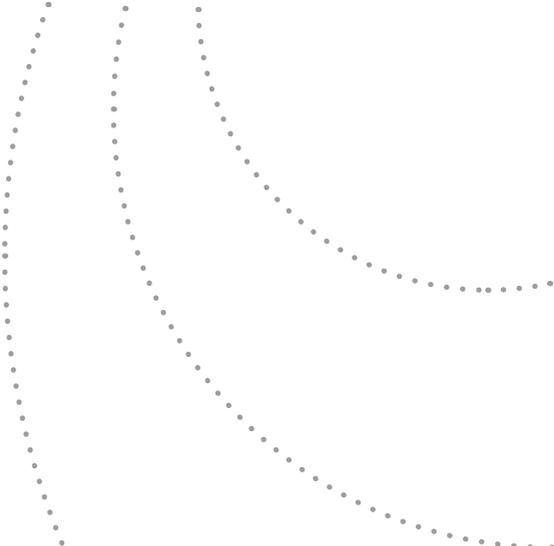
Bibliografía	233
--------------------	-----

Los editores y autores	234
-------------------------------------	------------

Índice de figuras

Figura 1.1. Gráfica de $h(x)$	8
Figura 1.2. Caso $(b\alpha+1)^2-3(b\alpha-\alpha+\beta)<0$	12
Figura 1.3. Caso 4 $(b\alpha-\alpha+\beta)>(b\alpha+1)^2>3(b\alpha-\alpha+\beta)$	13
Figura 1.4. Caso $(b\alpha+1)^2>4(b\alpha-\alpha+\beta)$	13
Figura 2.1. (k,m) para que la función sea polinomial	61
Figura 3.1. Retrato de fase global para caso 1 (3.2)	73
Figura 3.2. Retrato de fase global para caso 2 (3.2)	74
Figura 3.3. Retrato de fase global para caso 3 (3.2)	74
Figura 4.1. Retratos de fase para 3.20.....	95
Figura 5.1. Cuando $c > 0$	136
Figura 5.2. Cuando $c = 0$	137
Figura 5.3. Cuando $c > 0$	137
Figura 5.4. Subconjuntos $c < 0$	138
Figura 5.5 Subconjuntos $c > 0$	138
Figura 5.6. Espacio	139
Figura 5.7. Retratos de fase de familias I, II, III, IV y IV.....	145
Figura 6.1. Superficie paramétrica del sistema	157
Figura 6.2. Proyecciones de superficies paramétricas	160
Figura 6.3. Diagrama de bifurcación.....	164
Figura 6.4. Superficie $a^2+b^2+c>0$ y $2ab-c<0$	165
Figura 6.5. Bifurcación vertical	166
Figura 6.6. Superficie B_1	167
Figura 6.7. Superficie B_2	168
Figura 6.8. Superficie B	169
Figura 6.9. Región $a^2+b^2+c>0$, $2ab-c<0$	180
Figura 6.10. Región $a^2+b^2+c>0$, $2ab-c>0$	180
Figura 6.11. Región $a^2+b^2+c=0$, $2ab-c>0$	181
Figura 6.12. Región $a^2+b^2+c<0$, $2ab-c>0$	181
Figura 6.13. Región $a^2+b^2+c=0$, $2ab-c=0$	181
Figura 7.1. Regiones.....	189
Figura 7.2. $\beta+m-1>0$	191

Figura 7.3. $\beta+m-1 < 0$	192
Figura 7.4. Estabilidad.....	193
Figura 7.5. Retratos de fase global.....	194
Figura 7.5. Diagrama de bifurcación.....	195
Figura 7.6. Diagrama de bifurcación y una familia biparamétrica $\Gamma_{(m,\beta)}$ de ciclos límites.....	196
Figura 7.7. Diagrama de bifurcación homoclínica	196
Figura 7.8. Diagrama de bifurcación silla-nodo	197
Figura 7.9. Retrato de la fase global del sistema.....	198
Figura 7.10. Retratos de fase global en cada posición	198
Figura 8.1. Dos sectores hiperbólicos.....	210
Figura 8.2. Retrato de fase $\Delta(0) < 0$	221
Figura 8.3. Retrato de fase $\Delta(0) > 0$	221
Figura 8.4. Retrato de fase $\Delta(0) = 0$	222
Figura 8.5. Retrato de fase $\Delta(s) < 0$	222
Figura 8.6. Retrato de fase $\Delta(s) = 0$	223
Figura 8.7. Retrato de fase $\Delta(s) > 0$	223
Figura 8.8. Caso en donde $\Delta(0) < 0$	224
Figura 8.9. Caso en donde $\Delta(0) = 0$	224
Figura 8.10. Caso en donde $\Delta(0) > 0$	225
Figura 8.11. Caso en donde $\Delta(s) < 0$	225
Figura 8.12. Caso en donde $\Delta(s) = 0$	226
Figura 8.13. Caso en donde $\Delta(s) > 0$	226
Figura 8.14. Caso $\Delta(s) < 0$	228
Figura 8.15. Caso $\Delta(s) = 0$	229
Figura 8.16. Caso $\Delta(s) > 0$	229
Figura 8.17. 1.1 $\Delta(0) < 0$	230
Figura 8.18. 1.2 $\Delta(0) = 0$	230
Figura 8.19. 1.3 $\Delta(0) > 0$	231
Figura 8.20. 2.1 $\Delta(s) < 0$	231
Figura 8.20. 2.2 $\Delta(s) = 0$	232
Figura 8.21. 2.3 $\Delta(s) > 0$	232



Introducción

En la actualidad, la ciencia y la tecnología se han convertido en herramientas fundamentales para explicar los diferentes hechos que ocurren en la naturaleza y sus posibles causas. Hoy en día el hombre las utiliza con el objeto de predecir el futuro y controlarlo activamente. Desde que I. Newton y G. Leibniz introdujeron el cálculo diferencial en 1682, las ecuaciones diferenciales se han constituido en una herramienta fundamental para matemáticos, físicos, ingenieros y demás técnicos y científicos, dado que las leyes físicas que gobiernan los fenómenos de la naturaleza se reflejan habitualmente en ellas. Así, constituyen una expresión cuantitativa de dichas leyes: un ejemplo claro son las leyes de conservación de la masa y de la energía térmica, que se expresan en forma de ecuaciones diferenciales.

Las ecuaciones diferenciales han servido como modelo para realizar estudios de problemas de diferentes disciplinas. En su historia se consideran cinco etapas, donde cada una marca un desarrollo fundamental. La primera etapa ocurre aproximadamente desde los inicios hasta el año 1820, cuando Cauchy hace la publicación de su teorema de existencia, lo cual da comienzo a la segunda etapa de rigor. La tercera etapa inicia en 1870 con M.S. Lie (1842-1899), quien aplica la teoría de grupos continuos a las ecuaciones diferenciales. La cuarta etapa inicia en 1880 con el trabajo de E. Picard (1856-1941) y su teorema de existencia. La última etapa comienza en 1930, cuando se hace un análisis de forma más general. E. H. Moore estudia en 1908 ecuaciones con una cantidad infinitas de variables.

Poincaré se propuso como objetivo investigar el comportamiento de las soluciones de una ecuación diferencial o de un sistema de dos ecuaciones

en el plano sin integrarlas, haciendo uso solamente de sus propiedades. Clasificó las singularidades estudiando el comportamiento de las soluciones alrededor de esos puntos. A él se debe la técnica del análisis de las soluciones en un espacio de fases, en el cual a través de un sistema autónomo bidimensional se muestran las soluciones como curvas paramétricas y al eliminar el parámetro se hace una representación de las trayectorias. También se le atribuye el estudio local de los puntos críticos, puntos silla, centros, etc. Además, estudió las singularidades de ecuaciones en el campo complejo. Por otra parte, en su obra *Les Méthodes Nouvelles De La Mécanique Céleste*, introdujo la idea de expresar los Hamiltonianos en formas canónicas y analizó la estructura compleja que pueden tener algunas variedades estables e inestables de iteraciones en diversos problemas de mecánica clásica.

Quizás los problemas más interesantes de la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales han estado centrados en el estudio de la naturaleza de los puntos críticos, ciclos límites, comportamiento global y asintótico de las trayectorias alrededor de un punto crítico, en la teoría de las bifurcaciones y, en parte, en los conceptos de estabilidad estructural, la cual fue introducida por Andronov y Pontryagin en 1937.

Newton dijo hace tres siglos que es de gran utilidad resolver ecuaciones diferenciales; sin embargo, el auge del estudio de las ecuaciones diferenciales no llegó sino hasta hace cien años, aproximadamente, gracias al matemático francés H. Poincaré. El interés de este matemático estaba dirigido hacia la integración y cuadratura de las ecuaciones diferenciales. En su época, este enfoque parecía complicado de comprender.

Para Poincaré, las ecuaciones diferenciales no son solo objetos puramente formales sujetos a reglas de cálculo, sino que también constituyen objetos con significado geométrico. Esta idea postulada por Poincaré dio inicio al estudio cualitativo de las ecuaciones diferenciales. Además, propuso la descripción del retrato de fase de una ecuación diferencial con el objeto de conocer el comportamiento de las órbitas y determinar su estructura topológica.

Con la contribución en 1902 del matemático sueco I. Bendixson acerca de este mismo estudio se constituye el Teorema de Poincaré-Bendixson, el cual consiste en una afirmación sobre el comportamiento que tienen a largo plazo las órbitas de un sistema dinámico en el plano, cilindro o 2-esfera. Según este teorema, los resultados en los cuales estamos interesados son aquellos puntos llamados singularidades, puntos críticos u

órbitas periódicas, las cuales describen de forma más clara el comportamiento del retrato de fase de la ecuación diferencial. De esta manera, la teoría cualitativa basa su estudio fundamentalmente en las soluciones singulares del sistema.

Aunque hoy en día se aprecian de forma significativa los aportes de Poincaré, la introducción a la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales se desarrolla hacia la segunda mitad del siglo. Por ejemplo, en Rusia, A. Liapunov se ha interesado en el tema y Hilbert en el año 1900 planteó el siguiente problema que corresponde a la segunda parte del problema 16.

¿Cuál es el número máximo $H(n)$ de los ciclos límite de un campo vectorial polinomial del grado n ?

$$\dot{x} = P(x, y)$$

$$\dot{y} = Q(x, y)$$

¿Cuál es su configuración?

Otras contribuciones importantes fueron:

En 1923, H. Dulac prueba (de forma errónea, como se descubrió después) que el número de ciclos límite de un campo vectorial polinomial concreto en el plano es finito. A pesar de lo errada de su demostración, las ideas que usa en el desarrollo de la prueba fueron beneficiosas para otros matemáticos como Hilbert.

En los años treinta, A. Andronov y L. Pontryagin se ocupan del estudio de la estabilidad estructural, la cual consiste en saber cuál de los retratos fase mantiene su estructura topológica bajo variaciones pequeñas o cambios de los parámetros que conforman la ecuación diferencial.

Por otro lado, en el año 1926, el físico neerlandés. B. van der Pol obtiene una ecuación diferencial para describir las oscilaciones de amplitud constante en un triodo al vacío, y con la ayuda de los métodos gráficos prueba la existencia de una órbita periódica. Luego de esto, Andronov establece semejanzas entre el experimento de Van der Pol y la idea de ciclo límite planteada años atrás por Poincaré.

En 1928, el ingeniero francés A. Liénard realiza un estudio acerca del oscilador de Van der Pol y lo publica en una revista. Hasta 1981 se confió en la idea de que el problema de la finitud trabajado por Dulac entre los

años 1889 y 1923 era verdadero. Sin embargo, en 1985, Y. Ilyashenko y J. Ecalle solucionaron esta conjetura por caminos diferentes. Esto ha traído consigo que muchos matemáticos en la actualidad estén estudiando problemas referentes a finitud.

Estos primeros estudios fomentaron el estudio cualitativo de las ecuaciones diferenciales. Muchos trabajos en la tecnología electrónica, desarrollados fundamentalmente en la antigua Unión Soviética, siguieron el camino planteado por la ecuación de Van der Pol.

Por otra parte, la teoría de modelos presa-depredador tomó un impulso fuerte gracias a los trabajos realizados por A. Kolmogorov (1934) y G. Gause (1936), los cuales buscaban generalizar y refinar la idea inicial de A. Lotka y V. Volterra. Gracias a todos estos estudios, los modelos con ecuaciones diferenciales han solucionado problemas de diversos campos, incluyendo la biología, la física y la química.

En este trabajo de investigación presentamos una contribución al estudio cualitativo y algebraico de las ecuaciones diferenciales.

En los capítulos 1 y 2 se presenta un estudio de los fenómenos críticos de un caso particular del circuito de Chua; se construye una función de Lyapunov para este sistema, con la que se demuestra que el único punto de equilibrio es asintóticamente estable; se construye una superficie esférica en \mathbb{R}^3 positivamente invariante que encierra al punto crítico y que tiene la propiedad de que cada recta dirigida desde el origen de coordenadas a la superficie la interseca en uno y solo un punto y tal que toda trayectoria del sistema autónomo la cruza hacia el interior, para t suficientemente grande; y se estudia la integrabilidad del sistema, calculando la integral primera racional generalizada y demostrando que esta es única.

En el capítulo 3 estudiamos el comportamiento de las singularidades de algunas familias tipo Polyanin-Zaitsev desde un punto de vista algebraico y cualitativo. Este estudio incluye la restricción del problema, la búsqueda de puntos críticos, el análisis de su estabilidad, la construcción de los grupos de Galois diferencial asociados y algunas integrales de primeras a partir del método de Darboux.

En el capítulo 4 se realiza un análisis algebraico y cualitativo de campos polinomiales cuadráticos asociados a los polinomios ortogonales clásicos. Es decir, se analizan las condiciones que deben cumplir el sistema diferencial $\dot{x} = P(v, x)$ y $\dot{y} = Q(v, x)$ para que pueda asociarse a una

ecuación hipergeométrica, la cual es bien sabido que en algunos casos tiene como solución algún polinomio ortogonal clásico. Habiendo determinado la estructura del sistema, se realiza el estudio algebraico para analizar sus curvas algebraicas invariantes, pues estas son también muy determinantes para hacer el análisis cualitativo, determinar dónde están los puntos críticos en el plano finito e infinito, la existencia de ciclos límites, y así poder construir los retratos de fase globales para algunos sistemas particulares.

En el capítulo 5 se presenta una investigación sobre las familias cuadráticas multiparamétricas asociadas a un sistema diferencial polinomial, considerando casos específicos para así obtener con facilidad las familias. Luego, se hace un estudio a cada familia en el plano finito, aplicando tópicos de la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales, para así hallar sus puntos críticos, analizar su estabilidad y observar las bifurcaciones presentes en una familia cuadrática multiparamétrica.



Capítulo 1

Función de Lyapunov en un sistema diferencial multiparamétrico

Jorge Rodríguez Contreras^{1,2}

Angélica Arroyo Cabrera³

Osmín Ferrer Villar⁴

Resumen

En este capítulo se presenta un estudio de los fenómenos críticos en un caso particular del circuito de Chua. Se construye una función de Lyapunov para este sistema, con la que se demuestra que el único punto de equilibrio es asintóticamente estable.

Introducción

La ciencia y la tecnología se desarrollan por la necesidad que tiene el hombre de dar explicación a los fenómenos naturales y, de esta mane-

1 Departamento de Matemática y Estadística, Universidad del Norte, Barranquilla, Colombia. Correo electrónico: jrodri@uninorte.edu.co.

2 Programa de Matemáticas, Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia. Correo electrónico: jorgelrodriguez@mail.uniatlantico.edu.co.

3 Programa de Matemáticas, Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia. Correo electrónico: angelicarroyo1020@gmail.com.

4 Departamento de Matemáticas, Universidad de Sucre. Correo Electrónico: osmin.ferrer@unisucre.edu.co

ra, predecir el futuro y lograr controlarlo activamente. Desde que Isaac Newton y Gottfried Leibnitz introdujeron el cálculo diferencial en 1682, las ecuaciones diferenciales han sido una de las herramientas más efectivas y utilizadas para modelar la realidad en un lenguaje abstracto. A pesar de la importancia del estudio de las ecuaciones diferenciales, su auge no llegó sino hasta hace aproximadamente cien años, gracias a Henri Poincaré, quien centraba su interés en la integración y cuadratura de las ecuaciones diferenciales. En la época de Poincaré, este camino era bastante difícil en comparación con los resultados que proporcionaba. En un trabajo que constaba de cuatro partes, realizado entre 1881 y 1886, Poincaré demuestra la originalidad de su contribución al presentar una concepción diferente de las ecuaciones diferenciales. Para él, estas no solo constituyen objetos puramente formales sujetos a algunas reglas de cálculo, sino que también tienen significado geométrico. Es aquí donde da inicio a la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales. Aunque Poincaré solo considera ecuaciones en dos variables, muchas de sus ideas se han aplicado a ecuaciones de tres o más variables (véanse [2], [3], [5], [6], [7]).

El **circuito de Chua**, introducido por Leon Ong Chua en 1983, es un circuito electrónico simple que exhibe el comportamiento caótico clásico. Gracias a que es un circuito muy fácil de construir, se ha convertido en un ejemplo común de un sistema caótico, y algunos lo han declarado un paradigma de caos. Podemos encontrar antecedentes del estudio de estos sistemas en ([4], [8], [9], [10]).

El circuito de Chua puede ser modelado a través de un sistema de tres ecuaciones lineales diferenciales con las variables $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$:

Donde la función de transferencia $h(x)$ esta dada por:

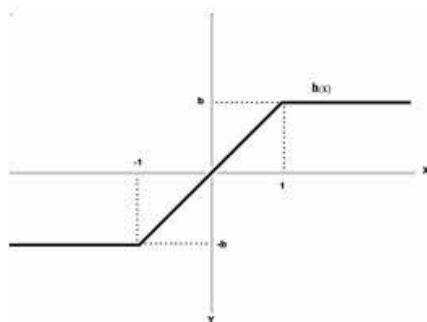
$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = \alpha(y - h(x)) \\ \frac{dy}{d\tau} = x - y + z \\ \frac{dz}{d\tau} = -\beta y \end{cases} \quad (1.1)$$

donde la función $h(x)$ esta dada por:

$$h(x) = \begin{cases} b & \text{si } x \geq 1 \\ bx & \text{si } |x| < 1 \\ -b & \text{si } x \leq -1 \end{cases} \quad (1.2)$$

La gráfica de la función h está dada por la Figura 1.1:

Figura 1.1. Gráfica de $h(x)$



Fuente: elaboración propia.

$$h(x) = \begin{cases} bx + c - b & \text{si } x \geq 1 \\ cx & \text{si } |x| < 1 \\ bx - c + b & \text{si } x \leq -1 \end{cases}$$

Función de Lyapunov

Punto de equilibrio.

En esta sección caracterizamos el comportamiento cualitativo del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales no lineales (véase [1]):

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = \alpha(y - h(x)) \\ \frac{dy}{d\tau} = x - y + z \\ \frac{dz}{d\tau} = -\beta y \end{cases}$$

La función h es de Lipschitz, h' existe y es continua en un entorno de $\mathbf{0}$ y $h'(\mathbf{0}) = \mathbf{b} > \mathbf{0}$, $xh(x) > \mathbf{0}$ si $x \neq \mathbf{0}$, $\alpha > \mathbf{0}$, $\beta > \mathbf{0}$.

El sistema de ecuaciones diferenciales (1.1) y (1.2) presenta un único punto de equilibrio en $(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$, esto es:

$$\frac{dz}{d\tau} = 0 \Rightarrow -\beta y = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$\frac{dy}{d\tau} = 0 \Rightarrow x - y + z = 0 \Rightarrow x + z = 0 \Rightarrow x = -z$$

$$\frac{dx}{d\tau} = 0 \Rightarrow -\alpha(y - h(x)) = 0 \Rightarrow y - h(x) = 0 \Rightarrow h(x) = y \Rightarrow h(x) = 0$$

Se puede observar en (1.2) que $h(x) = \mathbf{0}$ si $x = \mathbf{0}$, luego $(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ es el único punto de equilibrio que presenta el sistema (1.1).

La parte lineal en el equilibrio.

Para el estudio del punto singular linealizamos el sistema y obtenemos:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = \alpha y - \alpha b x \\ \frac{dy}{d\tau} = x - y + z \\ \frac{dz}{d\tau} = -\beta y \end{cases} \quad (1.3)$$

la matriz jacobiana evaluada en $(0,0,0)$ es:

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha b & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

y el polinomio característico está dado por:

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -(\alpha b + \lambda) & \alpha & 0 \\ 1 & -(1 + \lambda) & 1 \\ 0 & -\beta & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= -(\alpha b + \lambda) \begin{vmatrix} -(1 + \lambda) & 1 \\ -\beta & -\lambda \end{vmatrix} - \alpha \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & -(1 + \lambda) \\ 0 & -\beta \end{vmatrix} \\ &= \lambda^3 + (\alpha b + 1)\lambda^2 + (\alpha b - \alpha + \beta)\lambda + \alpha\beta b = 0 \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$p(\lambda) = \lambda^3 + (\alpha b + 1)\lambda^2 + (\alpha b - \alpha + \beta)\lambda + \alpha\beta b = 0 \quad (1.5)$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ son las raíces del polinomio característico (1.5), las cuales satisfacen:

$$\begin{cases} A_2 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = -(\alpha b + 1) \\ A_1 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 & = \alpha(b - 1) + \beta \\ A_0 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 & = -\alpha\beta b \end{cases}$$

donde A_2 representa la traza de la matriz jacobiana, A_1 la suma de los menores diagonales de segundo orden y A_0 el determinante de la matriz.

Averiguaremos ahora algunas de las propiedades que presentan los autovalores de la matriz jacobiana, cuando variamos los parámetros b , α y β positivos, y además estableciendo que el parámetro α cumpla la siguiente condición:

$$\alpha b + \beta > \alpha \quad (1.6)$$

Se puede ver que el término independiente de $P(\lambda)$ no se anula, lo cual implica que no existen valores propios nulos.

Por otra parte, tenemos que la gráfica de función $\phi(x) = x^3 + (\alpha b + 1)x^2 + (\alpha b - \alpha + \beta)x + \alpha\beta b$; $b > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ tiene un punto de inflexión en $(-\frac{b\alpha+1}{3}, \phi(-\frac{b\alpha+1}{3}))$. Esto se puede verificar con el criterio de la tercera derivada. Además, utilizando el criterio de la segunda derivada, si $(b\alpha + 1)^2 - 3(b\alpha - \alpha + \beta) > 0$, se puede verificar que $\phi(x)$ tiene un máximo en:

$$x_M = \left(-\frac{b\alpha + 1}{3} - \frac{\sqrt{(b\alpha + 1)^2 - 3(b\alpha - \alpha + \beta)}}{3} \right)$$

y un mínimo en:

$$x_m = \left(-\frac{b\alpha + 1}{3} + \frac{\sqrt{(b\alpha + 1)^2 - 3(b\alpha - \alpha + \beta)}}{3} \right),$$

ambos valores negativos. Ahora bien, si $\alpha\beta b$ es tal que $\phi(x_m) < 0$, entonces tendremos tres raíces reales y negativas de ϕ , que corresponden a un nodo atractor del sistema, y si $\alpha\beta b$ es tal que $\phi(x_m) > 0$, tendremos una raíz real y negativa λ_1 y dos raíces conjugadas complejas λ_2 y λ_3 .

Cuando $3(b\alpha - \alpha + \beta) > (b\alpha + 1)^2$, entonces ϕ es creciente. Y para $\alpha\beta b$ positiva, tenemos una raíz real negativa λ_1 y dos raíces conjugadas complejas λ_2 y λ_3 . La parte real de las raíces λ_2 y λ_3 , en función de una raíz real λ_1 , viene dada por $-\frac{((b\alpha+1)+\lambda_1)}{2}$. Será negativa cuando

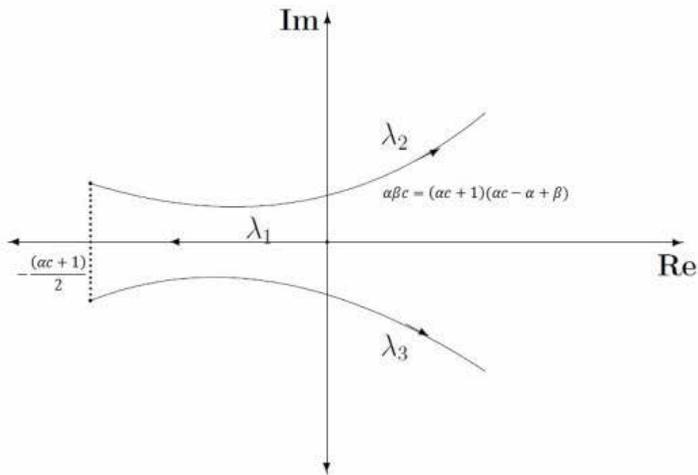
$(b\alpha + 1) + \lambda_1 > 0$, con lo que el origen será foco-nodo, y positiva cuando $(b\alpha + 1) + \lambda_1 < 0$, con lo que el origen será una silla-nodo con una superficie asintóticamente inestable. Los valores de las raíces λ_2 y λ_3 , en función de una raíz real λ_1 , vienen dadas por la fórmula:

$$\lambda_{2,3} = -\frac{((b\alpha + 1) + \lambda_1)}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3\lambda_1 - 2\lambda_1(b\alpha + 1) + (b\alpha + 1)^2 - 4(b\alpha - \alpha + \beta)} \quad (1.7)$$

que permite obtener los diagramas de las raíces al variar λ_1 .

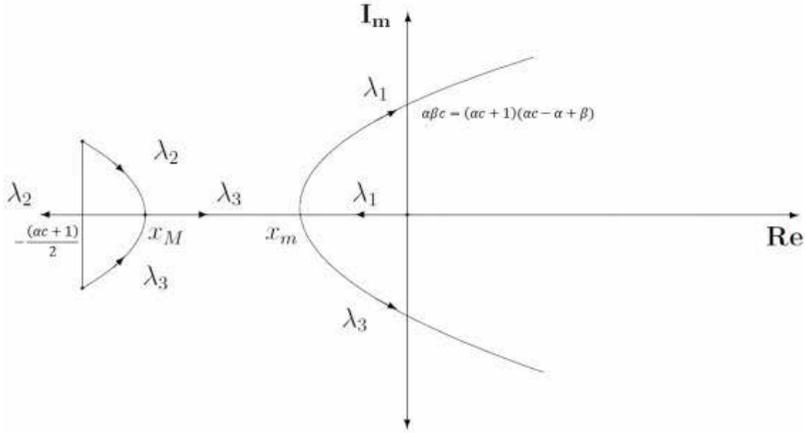
En las figuras a continuación se ilustran las trayectorias de las raíces en el plano complejo cuando $\alpha\beta b$ crece.

Figura 1.2. Caso $(b\alpha+1)^2-3(b\alpha-\alpha+\beta)<0$



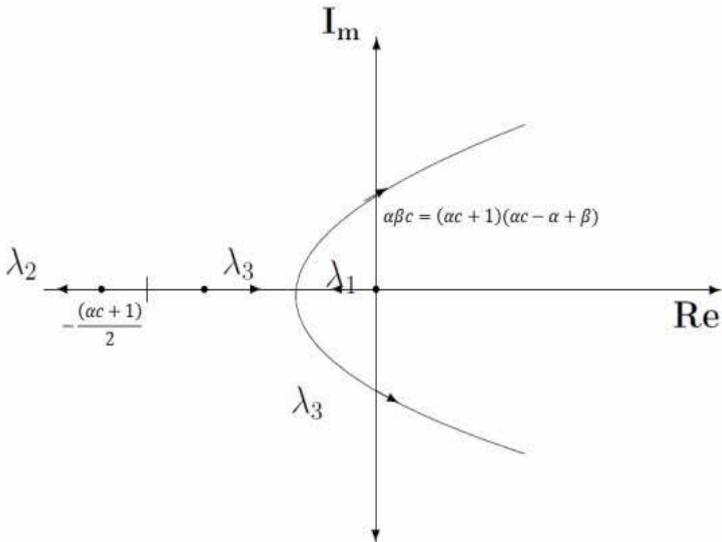
Fuente: elaboración propia.

Figura 1.3. Caso $4(ba-a+\beta) > (ba+1)^2 > 3(ba-a+\beta)$



Fuente: elaboración propia.

Figura 1.4. Caso $(ba+1)^2 > 4(ba-a+\beta)$



Fuente: elaboración propia.

Proposición 1.1

a) Sean $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 = \sigma + i\omega$, $\lambda_3 = \sigma - i\omega$ raíces del polinomio característico, entonces:

$$\sigma > 0 \Leftrightarrow (\alpha b + 1)(\alpha b - \alpha + \beta) < \alpha \beta b$$

$$\sigma < 0 \Leftrightarrow (\alpha b + 1)(\alpha b - \alpha + \beta) > \alpha \beta b$$

$$\sigma = 0 \Leftrightarrow (\alpha b + 1)(\alpha b - \alpha + \beta) = \alpha \beta b$$

b) Sean $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ raíces reales, entonces λ_2 y λ_3 son negativas y $(\alpha b + 1)(\alpha b - \alpha + \beta) > \alpha \beta b$

Demostración

Primero hallemos $-(\alpha b + 1)(\alpha b - \alpha + \beta) + \alpha \beta b$ en términos de las raíces:

$$\begin{aligned} A_2 A_1 &= (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3) \\ &= \lambda_1^2 \lambda_2 + \lambda_1^2 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_2^2 + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_2^2 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_3^2 + \lambda_2 \lambda_3^2 \end{aligned}$$

luego,

$$-(\alpha b + 1)(\alpha b - \alpha + \beta) + \alpha \beta b = 2\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_2^2 + \lambda_1 \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \lambda_2 + \lambda_1^2 \lambda_3 + \lambda_2^2 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3^2$$

así que:

$$-(\alpha b + 1)(\alpha b - \alpha + \beta) + \alpha \beta b = (\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_3) \quad (1.8)$$

a) Como $\lambda_2 = \sigma + i\omega$, y $\lambda_3 = \sigma - i\omega$, se tiene de la ecuación (1.8) que:

$$-(\alpha b + 1)(\alpha b - \alpha + \beta) + \alpha \beta b = 2\sigma((\sigma + \lambda_1)^2 + \omega^2)$$

por lo tanto,

$$\sigma > 0 \Leftrightarrow (ab + 1)(ab - \alpha + \beta) < \alpha\beta b$$

$$\sigma < 0 \Leftrightarrow (ab + 1)(ab - \alpha + \beta) > \alpha\beta b$$

$$\sigma = 0 \Leftrightarrow (ab + 1)(ab - \alpha + \beta) = \alpha\beta b$$

b) Supongamos que $\lambda_1 < 0$, λ_2 y λ_3 son reales. Dado que $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -\alpha\beta c < 0$, se tiene que $\lambda_2\lambda_3 > 0$, entonces tenemos que $\lambda_2 < 0 \wedge \lambda_3 < 0$.

Porque si $\lambda_2 > 0$ y $\lambda_3 > 0$, y como $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -(ab + 1) < 0$, entonces $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$ y $\lambda_1 + \lambda_3 < 0$. De esta manera, obtenemos que $\alpha(b - 1) + \beta = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_3(\lambda_2 + \lambda_1) < 0$, contradicción con el hecho de que $\alpha(b - 1) + \beta > 0$.

Por otro lado, de la ecuación (1.8):

$$(\lambda_1 + \lambda_2) < 0 \quad ; \quad (\lambda_1 + \lambda_3) < 0 \quad ; \quad (\lambda_2 + \lambda_3) < 0$$

luego,

$$-(ab + 1)(ab - \alpha + \beta) + \alpha\beta b = (\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_3) < 0 \Rightarrow \alpha\beta b < (ab + 1)(ab - \alpha + \beta)$$

Vectores propios y forma normal

Efectuemos un cambio lineal de coordenadas P , que nos lleva la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha b & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

a una forma normal.

Si $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 = \sigma + i\omega$, $\lambda_3 = \sigma - i\omega$, $\omega > 0$, se tiene que la forma normal puede ser de la siguiente manera:

$$N = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & -\omega \\ 0 & \omega & \sigma \end{pmatrix}$$

Se sabe que una matriz cuadrada A es diagonalizable si mediante un cambio de base se puede reducir a una forma diagonal. En este caso la matriz podrá descomponerse de la forma $A = PNP^{-1}$, en donde P es una matriz invertible cuyos vectores columna son vectores propios de A y N es una matriz diagonal formada por los valores propios de A .

Hallemos P :

Como $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 = \sigma + i\omega$, $\lambda_3 = \sigma - i\omega$, para λ_1 , tenemos:

$$Av = \lambda_1 v_1 \quad \text{donde} \quad v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

entonces,

$$\begin{pmatrix} -\alpha bx + \alpha y \\ x - y + z \\ -\beta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x \\ \lambda_1 y \\ \lambda_1 z \end{pmatrix}$$

Al resolver el sistema de ecuaciones que se obtiene al igualar estos dos vectores columna, obtenemos que:

$$v_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 + \lambda_1 + \beta \\ \lambda_1 \\ -\beta \end{pmatrix}$$

para λ_2 , tenemos:

$$Av = \lambda_2 v_2 \quad \text{donde} \quad v_2 = \begin{pmatrix} x_1 + ix_2 \\ y_1 + iy_2 \\ z_1 + iz_2 \end{pmatrix}$$

entonces,

$$\begin{pmatrix} (\alpha y_1 - \alpha b x_1) + i(\alpha y_2 - \alpha b x_2) \\ (x_1 - y_1 + z_1) + i(x_2 - y_2 + z_2) \\ -\beta y_1 - i\beta y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\sigma x_1 - \omega x_2) + i(\sigma x_2 - \omega x_1) \\ (\sigma y_1 - \omega y_2) + i(\sigma y_2 - \omega y_1) \\ (\sigma z_1 - \omega z_2) + i(\sigma z_2 - \omega z_1) \end{pmatrix}$$

Al resolver el sistema de ecuaciones que se obtiene al igualar estos dos vectores columna obtenemos que:

$$v_2 = \begin{pmatrix} -\omega(2\sigma + 1) \\ -\omega \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} \sigma^2 - \omega^2 + \sigma + \beta \\ \sigma \\ -\beta \end{pmatrix}$$

y entonces, estableciendo que:

$$AP = PN$$

obtenemos:

$$P = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 + \lambda_1 + \beta & -\omega(2\sigma + 1) & \sigma^2 - \omega^2 + \sigma + \beta \\ \lambda_1 & -\omega & \sigma \\ -\beta & 0 & -\beta \end{pmatrix}$$

Esta transformación nos lleva a un sistema de coordenadas (x_1, x_2, x_3) , cuyos ejes están a lo largo de los vectores columna de P y en el cual la ecuación lineal queda:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 \\ \dot{x}_2 = \sigma x_2 - \omega x_3 \\ \dot{x}_3 = \omega x_2 + \sigma x_3 \end{cases} \quad (1.10)$$

En el caso complejo, la matriz P^{-1} viene dada por:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$$

donde:

$$r_{11} = \frac{1}{[(\lambda_1 - \sigma)^2 + \omega^2]}$$

$$r_{12} = \frac{-(2\sigma + 1)}{[(\lambda_1 - \sigma)^2 + \omega^2]}$$

$$r_{13} = \frac{-(\sigma^2 + \omega^2 - \beta)}{\beta[(\lambda_1 - \sigma)^2 + \omega^2]}$$

$$r_{21} = \frac{\lambda_1 - \sigma}{\omega[(\lambda_1 - \sigma)^2 + \omega^2]}$$

$$r_{22} = \frac{\sigma^2 - \omega^2 - \lambda_1^2 + \sigma - \lambda_1}{\omega[(\lambda_1 - \sigma)^2 + \omega^2]}$$

$$r_{23} = \frac{\lambda_1 \sigma^2 - \lambda_1 \omega^2 - \lambda_1^2 \sigma + \lambda_1 \beta - \sigma \beta}{\beta \omega [(\lambda_1 - \sigma)^2 + \omega^2]}$$

$$r_{31} = \frac{-1}{[(\lambda_1 - \sigma)^2 + \omega^2]}$$

$$r_{32} = \frac{2\sigma + 1}{[(\lambda_1 - \sigma)^2 + \omega^2]}$$

$$r_{33} = \frac{-(\lambda_1^2 - 2\lambda_1\sigma + \beta)}{\beta[(\lambda_1 - \sigma)^2 + \omega^2]}$$

La parte no lineal.

Aplicando la misma transformación al sistema no lineal, tenemos:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} -\alpha bx + \alpha y \\ x - y + z \\ -\beta y \end{pmatrix} - P^{-1} \begin{pmatrix} h(x) - bx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} -\alpha b & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - P^{-1} \begin{pmatrix} h(x) - bx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El sistema en la parte no lineal queda de la forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & -\omega \\ 0 & \omega & \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - P^{-1} \begin{pmatrix} h(x) - cx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

por lo tanto,

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \sigma x_2 - \omega x_3 \\ \omega x_2 + \sigma x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{[(\lambda_1 - \sigma)^2 + \omega^2]} [h(x) - bx] \\ \frac{\lambda_1 - \sigma}{\omega[(\lambda_1 - \sigma)^2 + \omega^2]} [h(x) - bx] \\ \frac{-1}{[(\lambda_1 - \sigma)^2 + \omega^2]} [h(x) - bx] \end{pmatrix}$$

El sistema nos queda de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 - \frac{1}{[(\lambda_1 - \sigma)^2 + \omega^2]} [h(x) - bx] \\ \dot{x}_2 = \sigma x_2 + \omega x_3 - \frac{\lambda_1 - \sigma}{\omega[(\lambda_1 - \sigma)^2 + \omega^2]} [h(x) - bx] \\ \dot{x}_3 = -\omega x_2 + \sigma x_3 + \frac{1}{[(\lambda_1 - \sigma)^2 + \omega^2]} [h(x) - bx] \end{cases} \quad (1.11)$$

Construcción de la función de Lyapunov.

La determinación de la estabilidad global asintótica en los puntos de equilibrio de un sistema diferencial ordinario no lineal tiene una importancia especial.

Un método útil para trabajar este problema de estabilidad es el método directo de Lyapunov (véanse [1],[5]), con el cual podemos determinar la estabilidad asintótica global de nuestro sistema de ecuaciones diferenciales de tres variables a través de la construcción y estudio de una función positiva, llamada función de Lyapunov, que es similar a la función de energía del sistema. Este es el objetivo principal en esta sección.

Por medio de analogías se obtiene la correspondiente función de Lyapunov y se establecen algunas condiciones suficientes de estabilidad asintótica global para este tipo de sistemas.

Estudiaremos, entonces, el sistema de ecuaciones diferenciales **(1.1)** y **(1.2)**. Para ello, primero se construye una función de Lyapunov para el sistema lineal asociado, el sistema **(1.10)**, y a partir de este resultado se obtiene una función de Lyapunov para el sistema no lineal, y así se prueba que la solución del sistema es globalmente asintóticamente estable. La demostración se basa en Li Qing.

Se quiere construir una función de Lyapunov V . El método de construcción que se empleará es una adaptación de Cartwright y del teorema de Lyapunov, que establece la correspondencia entre cada forma cuadrática definida positiva $U(x, y, z)$ y una forma cuadrática positiva $V(x, y, z)$, tal que:

$$\dot{V} = -U$$

Empezamos con la parte lineal del sistema de ecuaciones **(1.1)**, el sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = \alpha y - abx \\ \frac{dy}{d\tau} = x - y + z \\ \frac{dz}{d\tau} = -\beta y \end{cases}$$

donde α , β y b son constantes que satisfacen las siguientes condiciones:

$$(\alpha b + 1) > 0 \quad (\alpha b + 1)(\alpha b - \alpha + \beta) > \alpha \beta b > 0 \quad (1.12)$$

De la ecuación **(1.12)**, existe una constante κ tal que:

$$\frac{1}{(\alpha b + 1)} < \kappa < \frac{\alpha b - \alpha + \beta}{\alpha \beta b} \quad (1.13)$$

Esto es, de **(1.12)** se obtiene:

$$\frac{(\alpha b + 1)(\alpha b - \alpha + \beta)}{(\alpha b + 1)\alpha\beta b} > \frac{\alpha\beta b}{(\alpha b + 1)\alpha\beta b}$$

$$\frac{\alpha b - \alpha + \beta}{\alpha\beta b} > \frac{1}{(\alpha b + 1)}$$

Y luego, por densidad de racionales se puede garantizar que existe una constante κ , como se ve en (1.13).

Ahora, sea V una función definida positiva, dada por:

$$V = \kappa_1(Ax + By)^2 + \kappa_2(Dy + Ez)^2 + \kappa_3y^2 \quad (1.14)$$

donde $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, A, B, D, E$ son constantes positivas, busquemos las constantes de manera que:

$$\dot{V} = -U = -(\alpha b - \alpha + \beta - \kappa\alpha\beta b)x^2 - (\kappa(\alpha b + 1) - 1)z^2 \quad (1.15)$$

Se puede verificar que \dot{V} es negativa, ya que por (1.13) se tiene:

$$\alpha b - \alpha + \beta > \kappa\alpha\beta b \text{ y } \kappa(\alpha b + 1) > 1$$

Y, por otro lado:

$$\begin{aligned} \dot{V} = & (2\kappa_1AB - 2\kappa_1A^2\alpha b)x^2 + (2\kappa_1A^2\alpha - 2\kappa_1AB - 2\kappa_1AB\alpha b + 2\kappa_1B^2 \\ & + 2\kappa_2D^2 + 2\kappa_3)xy + (2\kappa_1AB + 2\kappa_2ED)xz + (2\kappa_1AB\alpha - 2\kappa_1B^2 \\ & - 2\kappa_2D^2 - 2\kappa_2ED\beta - 2\kappa_3)y^2 + (2\kappa_1B^2 + 2\kappa_2D^2 - 2\kappa_2E^2\beta \\ & - 2\kappa_2ED + 2\kappa_3)yz + 2\kappa_2EDz^2 \end{aligned} \quad (1.16)$$

Entonces, de las ecuaciones (1.15) y (1.16) obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2\kappa_1 AB - 2\kappa_1 A^2 ab = -(ab - \alpha + \beta - \kappa\alpha\beta b) \\ \kappa_1 A^2 \alpha - \kappa_1 AB - \kappa_1 AB\alpha b + \kappa_1 B^2 + \kappa_2 D^2 + \kappa_3 = 0 \\ \kappa_1 AB + \kappa_2 ED = 0 \\ \kappa_1 AB\alpha - \kappa_1 B^2 - \kappa_2 D^2 - \kappa_2 ED\beta - \kappa_3 = 0 \\ \kappa_1 B^2 + \kappa_2 D^2 - \kappa_2 E^2 \beta - \kappa_2 ED + \kappa_3 = 0 \\ 2\kappa_2 ED = -(\kappa(ab + 1) - 1) \end{cases}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, tenemos que:

$$2\kappa_1 = \frac{1}{ab} \quad 2\kappa_2 = \frac{1}{\beta b}$$

$$2\kappa_3 = (\alpha + \beta)(\kappa(ab + 1) - 1) - \left(\frac{\alpha b}{ab - \alpha + \beta - \kappa\alpha\beta b + \kappa(ab + 1) - 1} + \frac{\beta b}{b(2 + ab)(\kappa(ab + 1) - 1) - (ab - \alpha + \beta - \kappa\alpha\beta b + \kappa(ab + 1) - 1)} \right)$$

$$A = \sqrt{ab - \alpha + \beta - \kappa\alpha\beta b + \kappa(ab + 1) - 1}$$

$$B = \frac{\alpha b(\kappa(ab + 1) - 1)}{\sqrt{ab - \alpha + \beta - \kappa\alpha\beta b + \kappa(ab + 1) - 1}}$$

$$E = \sqrt{b(2 + ab)(\kappa(ab + 1) - 1) - (ab - \alpha + \beta - \kappa\alpha\beta b + \kappa(ab + 1) - 1)}$$

$$D = \frac{-\beta b(\kappa(ab + 1) - 1)}{\sqrt{b(2 + ab)(\kappa(ab + 1) - 1) - (ab - \alpha + \beta - \kappa\alpha\beta b + \kappa(ab + 1) - 1)}}$$

Por lo tanto, V para el sistema lineal asociado al sistema **(1.1)** es:

$$\begin{aligned} 2V &= \frac{1}{ab} \left(\sqrt{\gamma + \eta} x + \frac{\alpha b \eta}{\sqrt{\gamma + \eta}} y \right)^2 + \frac{1}{\beta b} \left(\sqrt{b(2 + ab)\eta - (\gamma + \eta)z} - \frac{\beta b \eta}{\sqrt{b(2 + ab)\eta - (\gamma + \eta)}} y \right)^2 \\ &\quad + (\alpha + \beta)\eta - \left(\frac{\alpha b}{\gamma + \eta} + \frac{\beta b}{b(2 + ab)\eta - (\gamma + \eta)} \eta^2 \right) y^2 \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}\eta &= \kappa(\alpha b + 1) - 1 \\ \gamma &= \alpha b - \alpha + \beta - \kappa\alpha\beta b\end{aligned}$$

Desarrollando las expresiones de V , tenemos:

$$V = \frac{1}{2\alpha b}(\gamma + \eta)x^2 + \eta xy + \frac{1}{2}Ay^2 - \eta zy + \frac{\Psi}{\beta b}z^2.$$

$$\text{Con } A = \left(\frac{\alpha b \eta^2}{\gamma + \eta} + \frac{\beta b \eta^2}{\Psi} + (\alpha + \beta)\eta - \frac{\alpha b}{\gamma + \eta} - \frac{\beta b}{\Psi}\eta^2 \right)$$

$$V = \frac{\gamma + \eta}{2\eta\alpha b} \int_0^x 2\eta x dx + 2\eta xy + Ay^2 - 2\eta zy + \frac{\Psi}{\beta b}z^2$$

donde:

$$\Psi = b(2 + \alpha b)\eta - (\gamma + \eta) \neq 0$$

Por analogía, y tomando $h(x) = 2\eta x$, obtenemos la función de Lyapunov para la parte no lineal del sistema:

$$V(x, y, z) = \frac{\gamma + \eta}{2\eta\alpha b}H(x) + h(x)y + A\phi(y) - 2\eta zy + \frac{\Psi}{\beta b}\varphi(z) \quad (1.17)$$

donde:

$$H(x) = \int_0^x h(x)dx \quad \phi(y) = \int_0^y y dy \quad \varphi(z) = \int_0^z z dz$$

luego, para $x \geq 0$ y $y > 0$

$$\dot{V}(x, y, z) = \frac{\gamma + \eta}{2\eta\alpha b}H'(x)\frac{dx}{dt} + h'(x)y\frac{dx}{dt} + h(x)\frac{dy}{dt} + A\phi'(y)\frac{dy}{dt} - 2\eta y\frac{dz}{dt} - 2\eta z\frac{dy}{dt} + \frac{\Psi}{\beta b}\varphi'(z)\frac{dz}{dt}$$

Nota:

$$H'(x) = h(x) \text{ cuando } x \geq 0 \text{ y } H'(x) = -h(x) \text{ cuando } x \leq 0$$

Entonces, \dot{V} para $h(x) = -b$ es igual a \dot{V} para $h(x) = b$, es decir, debemos analizar si $\dot{V} < 0$ para $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ en:

- $h(x) = b$ o $h(x) = -b$
- $h(x) = bx$, cuando $x \geq 0$
- $h(x) = bx$, cuando $x \leq 0$

$\dot{V} < 0$ para $h(x)$ de 1, y 2 y 3 son análogas porque cuando $x < 0$, $-h(x) > 0$, así que basta con probar para una de las dos que $\dot{V} < 0$.

Luego, si $x \geq 0$, $h(x) = bx$:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{\gamma + \eta}{2\eta\alpha} x[y - bx] + by[\alpha y - abx] + bx[x - y + z] + Ay(x - y + z) + 2\eta\beta y^2 - 2\eta z(x - y + z) - \beta yz \\ &= \left(-\frac{\gamma + \eta}{2\eta\alpha} b + b\right) x^2 + (b\alpha - A + 2\eta\beta) y^2 - 2\eta z^2 + \left[\frac{\gamma + \eta}{2\eta\alpha} - \alpha b^2 - b + A\right] xy + [b - 2\eta] xz \\ &\quad [A + 2\eta - \beta] yz \end{aligned}$$

Así, $\dot{V} < 0$ bajo las condiciones:

$$-\frac{\gamma + \eta}{2\eta\alpha} + 1 < 0, \quad \text{pues } b > 0$$

$$\frac{\gamma + \eta}{2\eta\alpha} + 1 < 0$$

$$\frac{\gamma + \eta}{2\eta\alpha} - \alpha b^2 - b + A < 0$$

$$b - 2\eta = 0$$

$$A + 2\eta - \beta = 0$$

Bibliografía

- [1] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*, vol. 7. Estados Unidos de América: Springer Science & Business Media, 2013.
- [2] E. Vásquez, "Existencia de soluciones periódicas en un sistema diferencial no lineal en el espacio", trabajo de grado para el título de pregrado, Universidad del Atlántico, 2014.
- [3] J. Rodríguez Contreras y J. Rodríguez Ripoll, *Amortiguamiento de soluciones periódicas*. Barranquilla: Universidad del Atlántico, 2016.
- [4] J. M. Ginoux, C. Letellier y L. L. Chua, "Topological Analysis of Chaotic Solution of a Three-Element Memristive Circuit", *Int. J. Bifurcation Chaos*, vol. 20, 2010.
- [5] L. Qing, "On the Construction of Globally Asymptotically Stable Liapunov's Functions of a Type of Nonlinear Third-Order Systems", *Ann. of Diff. Eqs.*, vol. 7, no. 1, pp. 39-51, 1991.
- [6] X. Zhang y F. Guo, "Existence of periodic solutions of a particular type of super-quadratic Hamiltonian systems", *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 421, no. 2, pp. 1587-1602, 2015.
- [7] J. Kuang, "Existence of homoclinic solutions for higher-order periodic difference equations with p-Laplacian", *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 417, no. 2, pp. 904-917, 2014.
- [8] S. Li, F. Liao y Z. Hailong, "Periodic solutions of second order non-autonomous differential systems", *Fixed Point Theory*, vol. 15, no. 2, pp. 487-494, 2014.
- [9] M. Jiang, "Traveling Wave Solutions, Periodic and Chaotic Solutions of a PDE Approximation of Coupled Chua's Circuits", disertación, 2013.
- [10] A. Zapata y F. Caballero, "Diversas rutas al caos en el circuito de Chua", investigación universitaria multidisciplinaria, 2008. J. Balvuela, C. Beltrán, J. Ponce, A. Rodríguez y F. Caballero, "Formación de oscilaciones y caos en el circuito de Chua", Investigación universitaria disciplinar, 2007.

Capítulo 2

Sólido invariante e integrales de Darboux en un sistema diferencial multiparamétrico

Jorge Rodríguez Contreras^{1,2}

Angélica Arroyo Cabrera³

Ismael Cohen⁴

Resumen

En este capítulo se construye una superficie esférica en \mathbb{R}^3 , positivamente invariante, que encierra al punto crítico y que tiene la propiedad de que cada recta dirigida desde el origen de coordenadas a la superficie la interseca en uno y solo un punto, tal que toda trayectoria del sistema autónomo la cruza hacia el interior, para t suficientemente grande. Se estudia la integrabilidad del sistema, calculando la integral primera racional generalizada y demostrando que esta es única.

1 Departamento de Matemática y Estadística Universidad del Norte, Barranquilla, Colombia. Correo electrónico: jrodri@uninorte.edu.co.

2 Programa de Matemáticas, Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia. Correo electrónico: jorgelrodriguez@mail.uniatlantico.edu.co.

3 Programa de Matemáticas, Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia. Correo electrónico: angelicarroyo1020@gmail.com.

4 Programa de Matemáticas, Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia.

Introducción

Varios autores, incluyendo a Ezeilo, Pliss, McCarthy, Violet Haas y Rolf Reissig, han examinado la estabilidad de la solución nula y la existencia de soluciones periódicas en una ecuación diferencial de orden superior, tal como la escrita abajo:

$$\frac{d^3x}{dt^3} + (b\alpha + 1)\frac{d^2x}{dt^2} + [\alpha(b - 1) + \beta]\frac{dx}{dt} + \beta h(x) = 0$$

donde α, β son constantes positivas, h es la función continua de nuestro sistema de ecuaciones objeto de estudio y $-\sqrt{\gamma + \eta} < b < \sqrt{\gamma + \eta}$.

En [3], J. Rodríguez construye una superficie esférica en \mathbb{R}^3 que encierra al origen y que es atravesada hacia adentro por las curvas integrales del campo vectorial asociado al sistema de ecuaciones diferenciales de estudio, en nuestro caso, el sistema (2.1).

Por otro lado, Darboux presentó en 1878 su método para construir integrales primeras de campos vectoriales polinomiales utilizando sus curvas invariantes algebraicas. En su trabajo, Darboux investigó la posible relación entre las curvas algebraicas y las integrales primeras para sistemas (diferenciales) polinómicos en el plano. En particular, este investigador probó que, si un sistema admite un número suficiente de curvas, entonces se puede construir una función tipo Darboux usando tales curvas. Esta función juega el papel de factor integrante del sistema y su existencia es muy importante en el problema de centro-foco. Actualmente, la teoría de integrabilidad Darboux ha sido extendida a hipersuperficies algebraicas regulares ([4], [5], [6], [7], [1]).

En este capítulo consideramos la ecuación autónoma:

$$\ddot{x} + (b\alpha + 1)\dot{x} + [\alpha(b - 1) + \beta]x + \beta h(x) = 0 \tag{2.1}$$

o su sistema equivalente:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\tau} &= \alpha(y - h(x)), \\ \frac{dy}{d\tau} &= x - y + z, \\ \frac{dz}{d\tau} &= -\beta y,\end{aligned}\tag{2.2}$$

h del tipo considerado en el *Teorema 2.1*, con el origen asintóticamente estable, es decir, foco-atractor. Mostraremos que existe una superficie esférica positivamente invariante.

Diremos que una superficie en E_3 tiene la propiedad $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_1$ si es acotada y cada recta dirigida desde el origen de coordenadas a la superficie en E_3 la interseca en uno y solo un punto.

Teorema 2.1

Suponga que $b > 0$, h Lipschitz, no decreciente, con derivada continua en 0 y $h'(0) = b > 0$. Existe un $b > 0$ tal que para toda x $|h(x)| < b$ y $\frac{|h(x)|}{|x|} < b$ para $0 < |x| < 1$.

Entonces, existe una superficie esférica \mathbf{S} en el espacio que cumple la propiedad \mathbf{P}_1 y tal que toda trayectoria del sistema autónomo la cruza hacia el interior, para t suficientemente grande.

La función $\Gamma(\lambda, \kappa)$

La prueba del teorema es directamente en la construcción de la superficie \mathbf{S} .

En este capítulo buscaremos superficies de la forma:

$$\Gamma(\lambda, \kappa) \equiv V(x, y, z) + \lambda(z + ay + bx) - \kappa = 0 \quad (2.3)$$

donde λ y κ son constantes finitas.

Técnicas de construcción.

El principal objetivo en esta parte del trabajo es proporcionar una estructura para la construcción de funciones definidas positivas. La discusión está en el contexto de la ecuación particular bajo estudio. De esta manera podemos construir la superficie (véanse [1], [2], [8]).

Proposición 2.1

Sean las constantes γ, η, α, c definidas en este capítulo, la función $F(x, y) = \frac{\gamma + \eta}{\eta \alpha b} H(x) + 2h(x)y + 2\eta \alpha y^2$ está definida positivamente en un entorno cerca de cero.

Demostración

Hallemos primero los puntos críticos de $F(x, y)$ calculando sus derivadas parciales e igualando a cero:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\gamma + \eta}{\eta \alpha b} h(x) + 2by, & \frac{\partial F}{\partial y} &= 2h(x) + 4\eta \alpha y \\ \frac{\partial F}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial F}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

luego,

$$\frac{\gamma + \eta}{\eta \alpha b} h(x) + 2by = 0 \quad (2.4)$$

$$2h(x) + 4\eta\alpha y = 0 \quad (2.5)$$

multiplicando a (2.4) por $\frac{-2\eta\alpha b}{\gamma + \eta}$:

$$\begin{aligned} -2h(x) - \frac{4\eta\alpha b^2}{\gamma + \eta} y &= 0 \\ 2h(x) + 4\eta\alpha y &= 0 \\ \Rightarrow y &= 0 \end{aligned}$$

reemplazando en (2.5):

$$2h(x) = 0 \Rightarrow h(x) = 0 \Rightarrow bx = 0 \Rightarrow x = 0$$

entonces, el único punto crítico de $F(x, y)$ es $(0, 0)$.

Veamos ahora la naturaleza de este punto crítico. Para ello, hallaremos el hessiano de $F(x, y)$:

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} b \frac{\gamma + \eta}{\eta\alpha b} & 2b \\ 2b & 4\eta\alpha \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det H(x, y) = 4\eta\alpha \frac{\gamma + \eta}{\eta\alpha} - 4b^2 = 4(\gamma + \eta) - 4b^2$$

$\Rightarrow \det H(x, y) > 0$, ya que $-\sqrt{\gamma + \eta} < b < \sqrt{\gamma + \eta}$.

Por otro lado,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\gamma + \eta}{\eta\alpha} > 0$$

luego, como $\det H(0,0) > 0$ y $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0,0) > 0$, entonces $(0,0)$ es un mínimo absoluto y, por tanto, $F(0,0) \leq F(x,y) \forall (x,y)$, es decir, $F(x,y) \geq 0$ en un entorno cerca de cero.

Lema 2.1

$V(x,y,z)$ tiende a infinito cuando (x,y,z) tiende a infinito.

Demostración

Sabemos que $z^2 + y^2 \geq 2zy \Rightarrow -4\eta zy \geq -2\eta(z^2 + y^2)$

$$2V \geq -2\eta(z^2 + y^2) + \frac{\gamma + \eta}{\eta ab} H(x) + 2h(x)y + 2A\phi(y) + \frac{b(2+ab)\eta - (\gamma + \eta)}{\beta b} \varphi(z)$$

$$2V \geq -2\eta(z^2 + y^2) + \frac{\gamma + \eta}{\eta ab} H(x) + 2h(x)y + Ay^2 + \frac{b(2+ab)\eta - (\gamma + \eta)}{\beta b} z^2$$

$$2V \geq -2\eta(z^2 + y^2) + \frac{\gamma + \eta}{\eta ab} H(x) + 2h(x)y + 2\eta\alpha y^2 + (A - 2\eta\alpha)y^2 + \frac{b(2+ab)\eta - (\gamma + \eta)}{\beta b} z^2$$

$$2V \geq \lambda_1(z^2 + y^2) + F(x,y)$$

donde $\lambda_1 = \min\{-2\eta + A - 2\eta\alpha, -2\eta + \frac{b(2+ab)\eta - (\gamma + \eta)}{\beta b}\}$, con $A < 1 + \alpha$.

por lo tanto:

$$0 \leq F(x,y) + \lambda_1(y^2 + z^2) \leq 2V(x,y,z), \quad (2.6)$$

Dado que $F(x,y) \geq 0$ por el lema anterior, para todo $x \neq 0$ y $F(x,y) \rightarrow \infty$ cuando $|x| \rightarrow \infty$, $V(x,y,z)$ es definida positivamente, y

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow \infty} V(x,y,z) = \infty$$

Lema 2.2

La superficie \mathbf{S} es acotada para $\kappa \in \mathbb{R}$. Además, si Q es un punto variable de la superficie $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\lambda, \kappa)$ y O es el origen de coordenadas, entonces:

$$\rho = \rho(\lambda, \kappa) \equiv \inf_{Q \in \mathbf{S}} OQ \rightarrow \infty$$

cuando k tiende al infinito.

Demostración

Recordemos que

$$V(x,y,z) = \frac{\gamma + \eta}{2\eta\alpha b} H(x) + h(x)y + A\phi(y) - 2\eta zy + \frac{b(2 + \alpha b)\eta - (\gamma + \eta)}{\beta b} \varphi(z)$$

donde:

$$\begin{aligned} H(x) &= \int_0^x h(x) dx \\ \phi(y) &= \int_0^y y dy \quad , \quad h(x) = 2\eta x \\ \varphi(z) &= \int_0^z z dz \end{aligned}$$

Ahora, sabemos que existe C tal que:

$$|h(x)| \leq C|x|$$

$$\int_0^x h(x)dx \leq \int_0^x C|x|dx$$

$$\int_0^x h(x)dx \leq C \frac{x^2}{2}$$

$$2 \int_0^x h(x)dx \leq Cx^2$$

$$2H(x) \leq Cx^2$$

y entonces, como:

$$|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2), \quad |yz| \leq \frac{1}{2}(y^2 + z^2),$$

luego,

$$2V = \frac{\gamma + \eta}{\eta\alpha b} H(x) + 2h(x)y + 2A\phi(y) - 4\eta zy + 2 \frac{b(2 + \alpha b)\eta - (\gamma + \eta)}{\beta b} \varphi(z)$$

$$2V = BH(x) + Ch(x)y + D\phi(y) - Ezy + F\varphi(z)$$

$$|2V| = |BH(x) + Ch(x)y + D\phi(y) - Ezy + F\varphi(z)|$$

$$2V \leq |BH(x)| + |Ch(x)y| + |D\phi(y)| + |Ezy| + |F\varphi(z)|$$

$$\leq Cx^2 + |\eta|(x^2 + y^2) + |G|y^2 + 2|\eta|(z^2 + y^2) + |H|z^2$$

$$= (C + |\eta|)x^2 + (|\eta| + |G| + 2|\eta|)y^2 + (2|\eta| + |H|)z^2$$

Sea $D_1 = \max\{C + |\eta|, |\eta| + |G| + 2|\eta|, 2|\eta| + |H|\}$,

entonces $2V \leq D_1(x^2 + y^2 + z^2)$

Por otro lado, tenemos que $2V \geq F(x, y) + \lambda_1(y^2 + z^2)$ (por lema anterior).

Ahora, combinando los resultados y recordando que $\Gamma(\lambda, \kappa) \equiv V(x, y, z) + \lambda(z + ay + bx) - \kappa = 0$, tenemos que:

$$\frac{F(x, y)}{2} + \frac{\lambda_1}{2}(y^2 + z^2) \leq V \leq \frac{D_1(x^2 + y^2 + z^2)}{2}$$

$$\frac{F(x, y)}{2} + \frac{\lambda_1}{2}(y^2 + z^2) + \lambda(z + ay + bx) - \kappa \leq \Gamma \leq \frac{D_1(x^2 + y^2 + z^2)}{2} + \lambda(z + ay + bx) - \kappa \quad (2.7)$$

Denotemos por Δ_2 al dominio esférico:

$$F(x, y) + \lambda_1(y^2 + z^2) + 2\lambda(z + ay + bx) - 2\kappa \leq 0$$

y Δ_1 al sólido esférico:

$$D_1(x^2 + y^2 + z^2) + 2\lambda(z + ay + bx) - 2\kappa \leq 0 \quad (2.8)$$

entonces, por (2.7),

$$\Delta_1 \subset \Delta_2, \quad \mathbf{S} \subset (\Delta_2 - \Delta_1) \quad (2.9)$$

ya que $\Delta_2 - \Delta_1 \neq \emptyset$; por lo tanto, existe una superficie $\mathbf{S} \subset (\Delta_2 - \Delta_1)$.

Luego, $\mathbf{S} \subset \Delta_2$, y como Δ_2 es acotado, entonces \mathbf{S} es acotado. Y, supon-
gamos que $\sup\{x | x \in \mathbf{S}\} = M$.

Por otra parte, si tomamos un $(x, y, z) = Q \in \mathbf{S}$, entonces como $\mathbf{S} \subset (\Delta_2 - \Delta_1)$, $Q \in \Delta_2$ y $Q \notin \Delta_1$, es decir, se satisface que:

$$D_1(x^2 + y^2 + z^2) + 2\lambda(z + ay + bx) \geq 2\kappa$$

y, por tanto:

$$2\kappa \leq D_1(z^2 + y^2 + x^2) + \lambda(2z + 2ay + 2bx) \leq |\lambda|(x^2 + y^2 + z^2 + 1 + a^2 + b^2)$$

así que:

$$D_1(x^2 + y^2 + z^2) + |\lambda|(x^2 + y^2 + z^2) + |\lambda|(1 + a^2 + b^2) \geq 2\kappa$$

$$(x^2 + y^2 + z^2)(D_1 + |\lambda|) + |\lambda|(1 + a^2 + b^2) \geq 2\kappa$$

Luego, si $\kappa \rightarrow \infty$, se tiene que $x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty$; por lo tanto, $\rho = \rho(\lambda, \kappa) \rightarrow \infty$ si $\kappa \rightarrow \infty$.

Lema 2.3

Existe $D_0(\lambda) \geq 0$ tal que si $\kappa \geq D_0(\lambda)$, entonces la superficie $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\lambda, \kappa)$, definida por (2.3), tiene la propiedad \mathbf{P}_1 .

Demostración

Tomemos la ecuación de la recta

$$\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n} = r$$

donde l, m, n son los cosenos directores.

En general, un punto $P \equiv (x, y, z)$ sobre esta recta tiene coordenadas:

$$x = lr, \quad y = mr, \quad z = nr,$$

donde $r = \overline{OP}$. Estas coordenadas de la recta intersecan a \mathbf{S} si

$$\Phi(r) \equiv V(lr, mr, nr) + \lambda r(n + am + bl) - \kappa = 0$$

puesto que $\Phi(0) = -\kappa < 0$, y por (2.7):

$$\Phi(r) \geq \frac{F(lr, mr)}{2} + \frac{\lambda_1}{2}(m^2 + n^2)r^2 + \lambda r(n + am + bl) - \kappa > 0$$

para r suficientemente grande.

Se puede decir entonces que $\Phi(r)$ tiene al menos un cero, pues hay un valor r para el cual Φ es negativa y uno para el cual Φ es positiva, entonces se puede decir que la recta interseca a \mathbf{S} en al menos un punto.

Nos falta probar que si κ es suficientemente grande, entonces $\Phi(r)$ tiene solamente un cero.

Supongamos que esta afirmación es falsa, y que en efecto existen al menos dos puntos $P_i = (lr_i, mr_i, nr_i)$ ($i = 1, 2$), $r_2 \geq r_1 > 0$, tal que:

$$\Phi(r_i) = 0, i = 1, 2$$

entonces, por el Teorema de Rolle, existe $R, r_1 \leq R \leq r_2$ tal que:

$$\begin{aligned} \Phi'(R) &= 0 \\ \Phi(R) &\equiv V(lR, mR, nR) + \lambda R(n + am + bl) - \kappa \\ \Phi(R) &= \frac{F(lR, mR)}{2} + \frac{\lambda_1}{2}(n^2 + m^2)R^2 + \lambda R(n + am + bl) - \kappa \end{aligned} \tag{2.10}$$

donde:

$$\begin{aligned} F(lR, mR) &= \frac{\gamma + \eta}{\eta\alpha c} H(lR) + 2h(lR)mR + 2\eta\alpha(mR)^2 \\ \Rightarrow F'(lR, mR) &= \frac{\gamma + \eta}{\eta\alpha c} lh'(lR) + 2lh'(lR)mR + 2h(lR)m + 4\eta\alpha m^2 R \end{aligned}$$

(por T. Fundamental del Cálculo).

luego,

$$\Phi'(R) = R \left\{ \frac{\gamma + \eta}{\eta\alpha c} \frac{l}{R} h(lR) + 2lh'(lR)m + \frac{2h(lR)m}{R} + 4\eta\alpha m^2 + \lambda_1(n^2 + m^2) \right\} + \lambda(n + am + bl), \tag{2.11}$$

y, dado que:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad (\text{suma de cosenos directores}) \quad (2.12)$$

se tiene que:

Para $\lambda > 0$:

$$-\lambda(1 + a + b) \leq \lambda(n + am + bl) \leq \lambda(1 + a + b)$$

pues $|n| + a|m| + b|l| \leq (1 + a + b)$ y, a su vez,

$$|n + am + bl| \leq |n| + a|m| + b|l|$$

luego,

$$|\lambda(n + am + bl)| \leq |\lambda|(1 + a + b) = D_2(\lambda)$$

Para $\lambda < 0$:

$$|n + am + b| \leq (1 + a + b)$$

$$-(1 + a + b) \leq n + am + b \leq (1 + a + b)$$

entonces,

$$\lambda(1 + a + b) \leq -\lambda(n + am + bl) \leq -\lambda(1 + a + b)$$

$$\lambda(1 + a + b) \leq \lambda(n + am + bl) \leq -\lambda(1 + a + b)$$

luego,

$$|\lambda(n + am + bl)| \leq |\lambda|(1 + a + b) = D_2(\lambda)$$

por lo tanto:

$$-D_2(\lambda) \leq \lambda(n + am + bl) \leq D_2(\lambda)$$

Así que:

$$\Phi'(R) \geq R\phi(l, m, n, R) - D_2(\lambda) \quad (2.13)$$

donde:

$$\phi = \phi(l, m, n, R) = \frac{\gamma + \eta l}{\eta \alpha c} \frac{l}{R} h(lR) + 2lh'(lR)m + \frac{2h(lR)m}{R} + 4\eta \alpha m^2 + \lambda_1(n^2 + m^2)$$

como:

$$C \geq \frac{f(x)}{x} \geq \delta = \inf\left\{\frac{f(x)}{x} \mid |x| < M\right\}$$

por lo tanto:

$$\phi \geq \delta l^2 + (4\eta \alpha + \lambda_1)m^2 + \lambda_1 n^2 + 2lcm$$

Denotemos por $\phi_0 = \phi_0(|l|, |m|, |n|)$ a la última expresión en el lado derecho. Entonces ϕ_0 es continua en todos los argumentos.

$$\begin{aligned} \phi_0 &> 0 && \text{si } l^2 + m^2 + n^2 \neq 0 \\ &= 0 && = 0 \end{aligned}$$

En particular, como l, m, n satisfacen (2.12), existe una constante D_3 tal que:

$$\phi_0 \geq D_3 > 0$$

combinando con (2.13), tenemos:

$$\Phi'(R) \geq RD_3 - D_2(\lambda) \quad (2.14)$$

Pero, por el *Lema 2.2*, existe $D_0(\lambda)$, tal que si $\kappa \geq D_0(\lambda)$, entonces:

$$\rho(\kappa) > \frac{D_2(\lambda)}{D_3}$$

Y, por lo tanto,

$$R \geq r_1 \geq \rho > \frac{D_2(\lambda)}{D_3} \quad (2.15)$$

Los resultados (2.14) y (2.15) juntos implican que:

$$\Phi'(R) > 0$$

con tal que $\kappa \geq D_0(\lambda)$, y, como esto contradice (2.10), nuestro lema queda demostrado.

Extensión del lema $\kappa \geq D_0(\lambda)$

De aquí en adelante asumiremos que:

$$\kappa \geq D_0(\lambda) \quad (2.16)$$

para cualquier par de valores λ y κ , esto es, que todas las superficies $\mathbf{S}(\lambda, \kappa)$ consideradas de ahora en adelante tienen la propiedad \mathbf{P}_1 .

Las superficies $\mathbf{S}^+, \mathbf{S}^-$.

Sea π el plano $z + ay + bx = 0$. Como π pasa a través del origen, es claro que π interseca la superficie $\mathbf{S}(\lambda, \kappa)$, esto es, la superficie:

$$V(x, y, z) = \kappa$$

en un punto real, y como $\mathbf{S}(0, \kappa)$ tiene la propiedad \mathbf{P}_1 , estos puntos evidentemente están sobre una curva de Jordan J_0 . Dado cualquier punto (ξ, η, ζ) , el cual satisface:

$$V(\xi, \eta, \zeta) - \kappa = 0, \zeta + a\eta + b\xi = 0, \quad (2.17)$$

necesariamente $\Gamma(\xi, \eta, \zeta, \lambda, \kappa) = \mathbf{0}$ para todos los valores de λ , es claro que toda superficie $\mathbf{S}(\lambda, \kappa)$ pasa a través de J_0 . En lo que sigue aquí, dada cualquier superficie $S(\lambda, \kappa)$, acostumbraremos a denotar $\mathbf{S}^+(\lambda, \kappa)$ al conjunto de todos los puntos de $\mathbf{S}(\lambda, \kappa)$, los cuales están en o sobre el plano π , y $\mathbf{S}^-(\lambda, \kappa)$ denota el conjunto de todos los puntos de $\mathbf{S}(\lambda, \kappa)$ que están debajo o en π .

$$\mathbf{S}^+(\lambda, \kappa) \cup \mathbf{S}^-(\lambda, \kappa).$$

El resultado obtenido en el *Lema 2.3* se extiende muy fácilmente a las uniones de \mathbf{S}^+ y \mathbf{S}^- correspondiente a valores distintos de λ . De hecho, tenemos:

Lema 2.4

Si λ_1, λ_2 son dos valores de λ , entonces la superficie $\mathbf{S}^+(\lambda_1, \kappa) \cup \mathbf{S}^-(\lambda_2, \kappa)$

tiene la propiedad \mathbf{P}_1 .

El resultado es una consecuencia del *Lema 2.5* y del hecho de que ambas $\mathbf{S}(\lambda_1, \kappa)$ y $\mathbf{S}(\lambda_2, \kappa)$ pasan a través de J_0 .

Propiedades de \mathbf{S}^+ y \mathbf{S}^-

Cálculo de $\frac{d}{dt} \mathbf{V}$.

Sea (x, y, z) cualquier solución de (2.2). Entonces, por un cálculo directo de (2.2), tenemos:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{V}}(x, y, z) &= \frac{\gamma + \eta}{2\eta\alpha b} h(x) \dot{x} + b\gamma \dot{x} + h(x) \dot{y} + A\gamma \dot{y} - 2\eta\gamma \dot{z} - 2\eta z \dot{y} + \frac{b(2 + \alpha b)\eta - (\gamma + \eta)}{\beta b} z \dot{z} \\ \dot{\mathbf{V}} &= \frac{\gamma + \eta}{2\eta\alpha b} h(x)(\alpha y - \alpha ax) + b\gamma(\alpha y - \alpha ax) + h(x)(x - y + z) + A\gamma(x - y + z) - 2\eta\gamma(-\beta y) \\ &\quad - 2\eta z(x - y + z) + \frac{b(2 + \alpha b)\eta - (\gamma + \eta)}{\beta b} z(-\beta y) \end{aligned}$$

Como sabemos que existe C tal que $h(x) \leq C$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= \frac{d}{dt}V(x, y, z) = Lh(x)y + Mh(x)x + Ny^2 + Oyx + h(x)z + Pyz + Qxz - 2\eta z^2 \\
 &\leq L|y||h(x)| + M|x||h(x)| + Ny^2 + \frac{O}{2}(x^2 + y^2) + |z||h(x)| + \frac{P}{2}(z^2 + y^2) \\
 &\quad + \frac{Q}{2}(x^2 + z^2) - 2\eta z^2 \\
 &= \left(\frac{O}{2} + \frac{Q}{2}\right)x^2 + \left(N + 1 + \frac{P}{2}\right)y^2 + \left(\frac{P}{2} + \frac{Q}{2} - 2\eta\right)z^2 + (L|y| + M|x| + |z|)|h(x)| \\
 &\leq -R(x^2 + y^2 + z^2) + kC(|x| + |y| + |z|)
 \end{aligned}$$

sea

$$D_4 = R = \min\left\{-\left(\frac{O}{2} + \frac{Q}{2}\right), -\left(N + 1 + \frac{P}{2}\right), 2\eta - \frac{P}{2} - \frac{Q}{2}\right\} \quad (2.18)$$

$$D_5 = kC, \text{ donde } k = \min\{L, M, 1\}$$

obtenemos que:

$$\dot{V} \leq -D_4(x^2 + y^2 + z^2) + D_5(|x| + |y| + |z|)$$

en cualquier punto (x, y, z) de la trayectoria de (2.2).

$$\lambda_0 = 16 \frac{D_5^2}{D_4}$$

Sea $\lambda_0 > 0$ definido por

$$\lambda_0 = 16 \frac{D_5^2}{D_4}$$

y sean $\mathbf{S}(\lambda_0, \kappa), \mathbf{S}(-\lambda_0, \kappa)$ las superficies denotadas en *Lema 2.3* correspondiente a los valores $\lambda = \lambda_0, -\lambda_0$, respectivamente, la constante κ en cada caso satisface la restricción de $\kappa \geq D_0(\lambda)$.

Ahora probaremos que:

Lema 2.5

Existe $D_\epsilon = D_\epsilon(\lambda_0)$, tal que si $\kappa \geq D_\epsilon$, entonces

$$\dot{\Gamma} \equiv \frac{d}{dt} \Gamma(x, y, z, \lambda_0) \leq 0$$

en cualquier punto $T(x, y, z)$ de E_3 en cualquier trayectoria τ de (2.2) que se encuentra en $\mathbf{S}^+(\lambda_0, \kappa)$.

Demostración

Ahora, sea T cualquier punto de una trayectoria τ :

$$\frac{d}{dt} \Gamma(x, y, z, \lambda_0, \kappa) = \dot{V} + \lambda_0(-f(x)), \quad (2.19)$$

y de aquí, por (2.16),

$$\Gamma \leq -D_4(x^2 + y^2 + z^2) + D_5(|x| + |y| + |z|) + \lambda_0(-f(x)) \quad (2.20)$$

Sea σ^+ el conjunto de todos los puntos de la esfera

$$D_1(x^2 + y^2 + z^2) + 2\lambda_0(z + ay + bx) - 2\kappa = 0, \quad (2.21)$$

los cuales permanecen en o sobre el plano $z + ay + bx = 0$, y escojamos, como de hecho lo hacemos, un constante D_7 bastante grande para asegurar que cada una de las condiciones siguientes se satisfacen para $\kappa \geq D_7$:

I) σ^+ interseca al plano $x = D_8 = \frac{8}{\delta}$

II) $\max(|x|, |y|, |z|) > 8 \frac{D_5}{D_4}$, en todos los puntos (x, y, z) de σ^+ los cuales permanecen debajo del plano $x = D_8$; y

III) No existe ningún punto de intersección entre σ^+ y la esfera

$$D_4(x^2 + y^2 + z^2) + 2\lambda_0\delta x = 0$$

Subsecuentemente, por (2.14), todos los puntos de $\mathbf{S}(\lambda_0, \kappa)$ permanecen fuera de la esfera (2.18). Se sigue que las condiciones (I), (II) y (III) también se cumplen para $\mathbf{S}^+(\lambda_0, \kappa)$ para los valores declarados de κ . De aquí, si $\kappa \geq D_7$, cada punto (x, y, z) de $\mathbf{S}^+(\lambda_0, \kappa)$ necesariamente queda en una de las regiones siguientes en E_3 ;

$$x \geq D_8, \quad (2.22)$$

$$0 \leq x \leq D_8, \max(|x|, |y|, |z|) > 8 \frac{D_5}{D_4} \quad (2.23)$$

$$\max(|x|, |y|, |z|) > 8 \frac{D_5}{D_4} D_4(x^2 + y^2 + z^2) + 2\lambda_0\delta x > 0; \quad (2.24)$$

y, así, el lema queda demostrado si probamos que, dado cualquier punto $T(x, y, z)$ en τ , entonces:

$$\dot{\Gamma} \equiv \frac{d}{dt} \Gamma(x, y, z, \lambda_0, \kappa) \leq 0 \quad (2.25)$$

siempre que T esté en una de las regiones (2.19), (2.20) o (2.21).

Y, entonces, por (2.16) se tiene:

$$\dot{\Gamma} \leq -D_4(x^2 + y^2 + z^2) + D_5(|x| + |y| + |z|) - \lambda_0\delta x \quad (2.26)$$

Así, en particular, si T está en la región (2.19), obtenemos:

$$\dot{\Gamma} \leq -D_4(x^2 + y^2 + z^2) + D_5(|x| + |y| + |z|) - \lambda_0\delta D_8$$

y, dado que $\delta D_8 = 8$, esto da:

$$\begin{aligned} \dot{r} &\leq -D_4(x^2 + y^2 + z^2) + D_5(|x| + |y| + |z|) - 8\lambda_0 \\ &= -D_4(x^2 + y^2 + z^2) + D_5(|x| + |y| + |z|) - 128 \frac{D_5^2}{D_4} \end{aligned}$$

por (2.16). Es conveniente tratar los casos:

$$\max(|x|, |y|, |z|) \leq 8 \frac{D_5}{D_4}, \quad \max(|x|, |y|, |z|) > 8 \frac{D_5}{D_4}$$

separadamente. En el primer caso, tenemos:

$$\begin{aligned} \dot{r} &\leq D_5(|x| + |y| + |z|) - 128 \frac{D_5^2}{D_4} \\ &\leq 16 \frac{D_5^2}{D_4} - 128 \frac{D_5^2}{D_4} < 0. \end{aligned}$$

En el segundo caso, si $\max(|x|, |y|, |z|) > 8 \frac{D_5}{D_4}$, es fácil verificar que:

$$\frac{1}{4} D_4(x^2 + y^2 + z^2) - D_5(|x| + |y| + |z|) > 0 \quad (2.27)$$

Esto es que:

$$\begin{aligned} \dot{r} &\leq -\frac{3}{4} D_4(x^2 + y^2 + z^2) - 128 \frac{D_5^2}{D_4} \\ &< 0 \end{aligned}$$

Entonces (2.22) se cumple para todas las posiciones de T en la región (2.19).

Supongamos ahora que T está en la región (2.20). Entonces, de (2.23) y (2.19):

$$\Gamma \leq -\frac{3}{4}D_4(x^2 + y^2 + z^2) - \lambda_0\delta x$$

y, dado que:

$$\max(|x|, |y|, |z|) > 8\frac{D_5}{D_4}, x \geq 0, \lambda_0 = 16\frac{D_5^2}{D_4}$$

Esto nos da:

$$\begin{aligned} \Gamma &\leq -\frac{3}{4}D_4 64\frac{D_5^2}{D_4^2} + 16\frac{D_5^2}{D_4} \\ &= -32\frac{D_5^2}{D_4} < 0. \end{aligned}$$

Supongamos finalmente que T está en la región (2.21). Entonces, a causa de

$$\max(|x|, |y|, |z|) > 8\frac{D_5}{D_4},$$

se sigue de (2.23) y (2.24) que:

$$\Gamma \leq -\frac{3}{4}D_4(x^2 + y^2 + z^2) - \lambda_0\delta x,$$

y, a causa de $D_4(x^2 + y^2 + z^2) + 2\lambda_0\delta x > 0$, obtenemos

$$\begin{aligned} \Gamma &< -\frac{1}{4}D_4(x^2 + y^2 + z^2) - \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) - \lambda_0\delta x \\ &< -\frac{1}{4}D_4(x^2 + y^2 + z^2) < 0, \end{aligned}$$

por (2.16). Entonces, (2.22) es también verdadero para el caso cuando TT está en la región correspondiente a (2.22), y esto completa el lema.

Lema para $\mathbf{S}^-(-\lambda_0, \kappa)$.

Por argumentos similares a los del *Lema 2.5*, pero con la esfera:

$$D_4(x^2 + y^2 + z^2) - 2\lambda_0\delta x = 0$$

reemplazado por

$$D_4(x^2 + y^2 + z^2) + 2\lambda_0\delta x = 0$$

puede ser probado éste.

Lema 2.6

Existe $D_\epsilon > 0$, tal que si $\kappa \geq D_\epsilon$, entonces

$$\frac{d}{dt} \Gamma(x, y, z, -\lambda_0, \kappa) \leq 0$$

en cualquier punto (x, y, z) de E_3 en el cual una trayectoria de (2.2) encuentra $\mathbf{S}^-(-\lambda_0, \kappa)$.

Teorema.

Teorema 2.2

Existe una superficie \mathbf{S} en el espacio que cumple la propiedad \mathbf{P}_1 y tal que toda trayectoria de (2.2) cruza solo hacia el interior.

Demostración

Sea $D_7 = \max(D_0(\lambda_0), D_\epsilon, D_5)$, y considerando ahora la superficie Σ definida por

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^+(\lambda_0, D_7) \mathbf{U} \mathbf{S}^-(\lambda_0, D_7) \quad (2.28)$$

donde D_0, D_6, D_5 son las constantes que aparecen en los lemas 2.4, 2.5 y 2.6, respectivamente. Luego, \mathbf{S} tiene la propiedad \mathbf{P}_1 y por lemas 2.5 y 2.6 las trayectorias de (2.2) cruzan a \mathbf{S} hacia el interior.

Integrales de Darboux

En este capítulo se estudia la integrabilidad de un caso particular del sistema de ecuaciones diferenciales que describe el comportamiento del circuito de Chua, el sistema:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha(y - h(x)) \\ \frac{dy}{dt} &= x - y + z \quad h(x) = \begin{cases} b & \text{si } x \geq 1 \\ bx & \text{si } |x| < 1 \\ -b & \text{si } x \leq -1 \end{cases} \\ \frac{dz}{dt} &= -\beta y \end{aligned} \quad (2.29)$$

Se define el espacio de vectores \mathbb{X} asociado a (2.26) como:

$$\mathbb{X} = [\alpha(y - h(x)) \frac{\partial}{\partial x} + (x - y + z) \frac{\partial}{\partial y} - \beta y \frac{\partial}{\partial z}]$$

Lo que sigue es nuestro resultado principal para el sistema (2.26) con $\beta > 0$.

Teorema 2.3

La única integral primera racional generalizada del sistema (2.29) se calcula teniendo en cuenta:

Si $\beta < 1/4$, es la función:

$$|z + x| \left[\frac{\left| \frac{y}{z+x} - r_1 \right|^{r_1}}{\left| \frac{y}{z+x} - r_2 \right|^{r_2}} \right]^{\left(\frac{\beta}{r_1 - r_2} \right)}$$

Donde r_1 y r_2 son las raíces reales distintas de $\beta s^2 - s + 1$.

Si $\beta = 1/4$, es la función:

$$\left[\frac{1}{\frac{y}{z+x} - r}\right]^\beta |z+x| E\left[\frac{\beta r}{y/(z+x) - r}\right]$$

Donde r es una raíz real doble de $\beta s^2 - s + 1$.

Si $\beta > 1/4$, es la función:

$$\left| \left(\frac{2\beta s - 1}{\sqrt{4\beta - 1}}\right)^2 + 1 \right|^{1/2} (z+x) E\left[\frac{1}{\sqrt{4\beta - 1}} \arctan\left(\frac{2\beta s - 1}{\sqrt{4\beta - 1}}\right)\right]$$

Con $x + z \neq 0$

Nota: $e^x = E(x)$.

Demostración

Consideremos el sistema (2.26) con $\beta > 0$, es decir, $\dot{x} = \alpha(y - h(x))$, $\dot{y} = x - y + z$, $\dot{z} = -\beta y$.

Podemos expresar \dot{y} como $\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dt} = -\beta y$, entonces:

$$\frac{dz}{dy} = \frac{-\beta y}{x - y + z} \tag{2.30}$$

$$(x - y + z)dz + \beta y dy = 0$$

La ecuación diferencial (2.30) se puede convertir en homogénea a través de las sustituciones:

$$\begin{aligned} z &= u - x \\ y &= v \end{aligned}$$

Que se obtienen teniendo en cuenta la solución del sistema

$$\begin{cases} z = y - x \\ y = 0 \end{cases}$$

en el punto $(0, -x)$.

Luego, (2.27) queda:

$$(-v + u)du + \beta v dv = 0 \quad (2.31)$$

Sea $v = su$, entonces $dv = uds + sdu$. Entonces, (2.28) queda convertida en:

$$(-su + u)du + \beta su(uds + sdu) = 0$$

separando variables se obtiene:

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{-\beta s}{\beta s^2 - s + 1} ds \quad (2.32)$$

La integral del miembro izquierdo de (2.29) se resuelve teniendo en cuenta lo siguiente:

Si $\beta < 1/4$, $\beta s^2 - s + 1$ tiene dos raíces reales $r_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\beta}}{2\beta}$ y $r_2 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\beta}}{2\beta}$

La ecuación (2.32) queda:

$$\ln|z + x| = -\frac{\beta}{r_1 - r_2} \ln \left[\frac{\left| \frac{y}{z+x} - r_1 \right|^{r_1}}{\left| \frac{y}{z+x} - r_2 \right|^{r_2}} \right]$$

Entonces,

$$H = \frac{\beta}{r_1 - r_2} \ln \left[\frac{\left| \frac{y}{z+x} - r_1 \right|^{r_1}}{\left| \frac{y}{z+x} - r_2 \right|^{r_2}} \right] + \ln|z + x|$$

es una integral primera racional generalizada del sistema (2.29). Por lo tanto,

$$K = E(H) = |z + x| \left[\frac{|\frac{y}{z+x} - r_1|^{r_1}}{|\frac{y}{z+x} - r_2|^{r_2}} \right]^{\left(\frac{\beta}{r_1 - r_2}\right)}$$

Si $\beta = 1/4$, $\beta s^2 - s + 1$ tiene una raíz doble $r \in \mathbb{R}$, $r = 2$.

Aquí, la ecuación (2.29) queda:

$$\ln|u| = -\frac{1}{4} \ln \left| \frac{y}{z+x} - r \right| + \frac{1/4r}{\left[\frac{y}{z+x} - r \right]}$$

Entonces,

$$H = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{y}{z+x} - r \right| - \frac{1/4r}{\left[\frac{y}{z+x} - r \right]} + \ln|z + x|$$

es una integral primera racional generalizada del sistema (2.26). Por lo tanto,

$$K = E(H) = \left| \frac{y}{z+x} - r \right|^{1/4} |z + x| E \left[\frac{1/4r}{y/(z+x) - r} \right]$$

Si $\beta > 1/4$.

En este caso, las raíces r_1 y r_2 del polinomio $\beta s^2 - s + 1$ son complejas; entonces, la integral $\int \frac{\beta s}{\beta s^2 - s + 1} ds$ la resolveremos así:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\beta s}{\beta s^2 - s + 1} ds &= \int \frac{\beta s}{\beta \left[\left(s - \frac{1}{2\beta} \right)^2 + \frac{4\beta - 1}{4\beta^2} \right]} ds \\
 &= \int \frac{\frac{4\beta^2}{4\beta - 1} s}{\left(\frac{2\beta s - 1}{\sqrt{4\beta - 1}} \right)^2 + 1} ds \\
 &= \frac{2\beta}{\sqrt{4\beta - 1}} \int \frac{\frac{2\beta s - 1}{\sqrt{4\beta - 1}}}{\left(\frac{2\beta s - 1}{\sqrt{4\beta - 1}} \right)^2 + 1} ds + \frac{2\beta}{\sqrt{4\beta - 1}} \int \frac{\frac{1}{\sqrt{4\beta - 1}}}{\left(\frac{2\beta s - 1}{\sqrt{4\beta - 1}} \right)^2 + 1} ds \\
 &= \frac{1}{2} \ln \left| \left(\frac{2\beta s - 1}{\sqrt{4\beta - 1}} \right)^2 + 1 \right| + \frac{1}{\sqrt{4\beta - 1}} \arctan \left(\frac{2\beta s - 1}{\sqrt{4\beta - 1}} \right)
 \end{aligned}$$

Reemplazando ahora en (2.29):

$$\ln|z + x| = -\frac{1}{2} \ln \left| \left(\frac{2\beta s - 1}{\sqrt{4\beta - 1}} \right)^2 + 1 \right| - \frac{1}{\sqrt{4\beta - 1}} \arctan \left(\frac{2\beta s - 1}{\sqrt{4\beta - 1}} \right)$$

Entonces,

$$H = \frac{1}{2} \ln \left| \left(\frac{2\beta s - 1}{\sqrt{4\beta - 1}} \right)^2 + 1 \right| + \frac{1}{\sqrt{4\beta - 1}} \arctan \left(\frac{2\beta s - 1}{\sqrt{4\beta - 1}} \right) + \ln|z + x|$$

es una integral primera racional generalizada del sistema (2.26). Por lo tanto,

$$K = E(H) = \left| \left(\frac{2\beta s - 1}{\sqrt{4\beta - 1}} \right)^2 + 1 \right|^{1/2} (z + x) E \left[\frac{1}{\sqrt{4\beta - 1}} \arctan \left(\frac{2\beta s - 1}{\sqrt{4\beta - 1}} \right) \right]$$

Es fácil ver que en los casos (i, ii, iii) que, para $x + z \neq 0$, H se puede escribir como el cociente de dos funciones analíticas.

Teorema 2.4

Supongamos que el sistema diferencial (2.26) tiene a p como un punto singular, y sean λ_1 , λ_2 y λ_3 los valores propios de la parte lineal del sistema (2.26) en p . Entonces, el número de integrales primeras racionales

las generalizadas linealmente independientes del sistema (2.26) es como máximo la dimensión del subespacio vectorial mínimo de \mathbb{R}^3 que contiene el conjunto:

$$\{(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{R}^3 : k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + k_3\lambda_3 = 0, (k_1, k_2, k_3) \neq (0,0,0)\}$$

Demostración

Este teorema sirve para mostrar que el número de integrales primeras racionales generalizadas son solo las calculadas en el teorema anterior, no hay otras.

En primer lugar, observemos que el punto singular del sistema (2.26) es $(0,0,0)$. Los valores propios λ_1, λ_2 y λ_3 de la matriz jacobiana del sistema (2.26) en el punto singular se relacionan a través del polinomio:

$$p(\lambda) = \lambda^3 + (\alpha b + 1)\lambda^2 + (\alpha b - \alpha + \beta)\lambda + \alpha\beta b$$

de donde:

Si $\alpha = 0$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\beta}}{2}$$

Por lo tanto, $k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + k_3\lambda_3 = 0$ es equivalente a:

$$k_2(-1 + \sqrt{1 - 4\beta}) + k_3(-1 - \sqrt{1 - 4\beta}) = 0$$

o, en otras palabras:

$$\frac{k_2}{k_3} = -\frac{-1 - \sqrt{1 - 4\beta}}{-1 + \sqrt{1 - 4\beta}}$$

Es evidente que el lado izquierdo de (2.30) es un número racional (una vez que $k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$) y que la elección de β de una manera conveniente en el lado derecho de (2.30) es irracional.

Por lo tanto, (2.26) no puede sostenerse para esta elección conveniente de β . Así, para este punto singular $(0,0,0)$, la dimensión del subespacio vectorial mínimo de \mathbb{R}^3 que contiene el conjunto

$$\{(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{R}^3 : k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + k_3\lambda_3 = 0, (k_1, k_2, k_3) \neq (0,0,0)\}$$

es claramente uno, generado por $(k_1, 0, 0)$. Entonces, de este teorema se deduce que el sistema

$$\frac{dx}{dt} = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = x - y + z$$

$$\frac{dz}{dt} = -\beta y$$

puede tener solo una integral primera racional generalizada, que debe ser una función de H .

Si $b = 0$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\beta}}{2}$$

Por lo tanto, $k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + k_3\lambda_3 = 0$ es equivalente a:

$$k_2(-1 + \sqrt{1 - 4\beta}) + k_3(-1 - \sqrt{1 - 4\beta}) = 0$$

o, en otras palabras:

$$\frac{k_2}{k_3} = -\frac{-1 - \sqrt{1 - 4\beta}}{-1 + \sqrt{1 - 4\beta}}$$

Es evidente que el lado izquierdo de (2.31) es un número racional (una vez que $k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$) y que la elección de β de una manera conveniente en el lado derecho de (2.31) es irracional.

Por lo tanto, el Teorema 2.4 no puede sostenerse para esta elección conveniente de β . Así, para este punto singular $(0,0,0)$, la dimensión del subespacio vectorial mínimo de \mathbb{R}^3 que contiene el conjunto

$$\{(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{R}^3 : k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + k_3\lambda_3 = 0, (k_1, k_2, k_3) \neq (0,0,0)\}$$

es claramente uno, generado por $(k_1, 0, 0)$. Entonces, se deduce de este teorema que el sistema

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(y - h(x))$$

$$\frac{dy}{dt} = x - y + z \quad h(x) = \begin{cases} b & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } |x| < 1 \\ -b & \text{si } x \leq -1 \end{cases}$$

$$\frac{dz}{dt} = -\beta y$$

puede tener solo una integral primera racional generalizada, que debe ser una función de H .

Con esto se completa la demostración del teorema anterior.

Bibliografía

- [1] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*, vol. 7. Estados Unidos de América: Springer Science & Business Media, 2013.
- [2] E. Vásquez, "Existencia de soluciones periódicas en un sistema diferencial no lineal en el espacio", trabajo de grado para el título de pregrado, Universidad del Atlántico, 2014.
- [3] J. Rodríguez Contreras y J. Rodríguez Ripoll, *Amortiguamiento de soluciones periódicas*. Barranquilla: Universidad del Atlántico, 2016.
- [4] J. Llibre y X. Zhang, "Darboux Theory of the Integrability in \mathbb{C}^n Taking Into Account the Multiplicity", *Journal of Differential Equations*, vol. 246, no. 2, pp. 541-551, 2009.
- [5] J. Llibre y X. Zhang, "Darboux Theory of the Integrability for Polynomial Vector Fields in \mathbb{R}^n Taking Into Account the Multiplicity al Infinity", *Bulletin des sciences mathematiques*, vol. 133, no. 7, pp. 765-778, 2009.
- [6] J. Llibre y C. Valls, "On the Integrability of de Muthuswamy-Chua System", *Int. J. Bifurcation Chaos*, pp. 488, 2012.
- [7] C. Pantazi, "El Método de Darboux", notas del *Primer Seminario de Integrabilidad de la Universitat de Catalunya*, 2005, pp. 61-72.
- [8] J. Kuang, "Existence of homoclinic solutions for higher-order periodic difference equations with p-Laplacian", *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 417, no. 2, pp. 904-917, 2014.

Capítulo 3

Sistemas, teoría cualitativa y herramientas algebraicas en un caso particular – Una revisión

Jorge Rodríguez Contreras^{1,2}

Alberto Reyes Linero³

Primitivo B. Acosta-Humánez^{4,5}

Resumen

El análisis de sistemas dinámicos ha sido un tópico de gran interés para la matemática y la física en los últimos años. Diversos métodos y variadas herramientas se han usado para encontrar soluciones o tratar de describir un comportamiento común de la familia soluciones de estos sistemas. Se observan transformaciones que permiten llevar estos sistemas a espacios donde se hacen más visibles estas características.

1 Departamento de Matemática y Estadística Universidad del Norte, Barranquilla, Colombia. Correo electrónico: jrodri@uninorte.edu.co.

2 Programa de Matemáticas, Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia. Correo electrónico: jorgelrodriguez@mail.uniatlantico.edu.co.

3 Programa de Matemáticas, Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia. Correo electrónico: areyeslinero@mail.uniatlantico.edu.co.

4 Facultad de Ciencias Básicas y Biomédicas, Universidad Simón Bolívar, Barranquilla, Colombia.

5 Instituto Superior de Formación Docente Salomé Ureña, Recinto Emilio Prud-Homme, Santiago de los Caballeros, República Dominicana.

Correo electrónico: primitivo.acosta-humanez@isfodosu.edu.do.

En este caso, tomaremos un miembro particular de una familia de ecuaciones, de la cual hace parte la ecuación de Van Der Pol, con el fin de ilustrar una forma de interacción entre el álgebra y la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales para completar un estudio de un sistema dinámico.

Introducción

Dada la familia de ecuaciones:

$$yy' = (a(2m+k)x^{m+k-1} + b(2m-k)x^{m-k-1})y - (a^2mx^{4k} + cx^{2k} + b^2m)x^{2m-2k-1} \quad (3.1)$$

Realizaremos una revisión de:

- a) Existencia de puntos críticos.
- b) Estabilidad de los puntos.
- c) Hallar grupos de Galois diferencial.
- d) Hallar integrales primeras.

Podemos ver antecedentes de su estudio en [1], [2] y [3].

Campo vectorial de Polyanin-Zaitsev

La foliación (3.1), con $a, b, c \in \mathbb{C}$, $m, k \in \mathbb{Z}$, tiene asociado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= (a(2m+k)x^{m+k-1} + b(2m-k)x^{m-k-1})y - (a^2mx^{4k} + cx^{2k} + b^2m)x^{2m-2k-1} \end{aligned}$$

A su vez, este sistema tiene asociado el campo vectorial $\mathbf{X} =: (P, Q)$, donde:

$$(P, Q) := (y, (a(2m+k)x^{m+k-1} + b(2m-k)x^{m-k-1})y - (a^2mx^{4k} + cx^{2k} + b^2m)x^{2m-2k-1})$$

En esta sección se realiza un análisis para determinar en qué condiciones el campo vectorial (P, Q) está formado por polinomios.

Proposición 3.1

Para la función

$$(a(2m+k)x^{m+k-1} + b(2m-k)x^{m-k-1})y - (a^2mx^{4k} + cx^{2k} + b^2m)x^{2m-2k-1};$$

- Si $(k, m) \in S$, donde $S = \{(x, y) / 0 \leq x \leq y + 1\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^+$, entonces es polinomial.
- Es un polinomio de grado absoluto mayor igual que 2 si y solamente si $(k, m) \in S' = \{(x, y) / x + y = 2\}$.

Para la demostración del inciso *a*, se deben considerar algunos casos especiales con relación a las constantes:

Caso 1: Si $k = 0, m = 0$, entonces el sistema original se reduce a:

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = -cx^{-1}$$

Para que este sistema sea polinomial se necesita que $c = 0$.

Caso 2: Si $k = 0$ y $m \neq 0$, entonces el sistema queda:

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = (a2mx^{m-1} + b2mx^{m-1})y - (a^2m + c + b^2m)x^{2m-1}$$

Existen dos posibilidades:

2.1: Si $m > 0$, entonces $(a2mx^{m-1} + b2mx^{m-1})$ y $(a^2m + c + b^2m)x^{2m-1}$ son polinomios de grado mayor o igual a cero (teniendo en cuenta que las condiciones $a, b, (a^2m + c + b^2m)$ pueden ser iguales a cero).

2.2: Si $m < 0$, entonces $(m - 1)$, y $(2m - 1)$ son menores que cero, por tal razón no se forman funciones polinomiales (solo racionales), al menos que las constantes $a, b, (a^2m + c + b^2m)$ sean iguales a 0.

Caso 3: Si $m = 0$ y $k \neq 0$, entonces el sistema queda:

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = akyx^{k-1} - bkyx^{-k-1} - cx^{-1}$$

Para este también existen dos posibilidades:

3.1: Si $k > 0$, entonces la única forma de que esta expresión sea un polinomio es que $b = c = 0$.

3.2: Si $k < 0$, entonces para que la expresión sea un polinomio $a = c = 0$.

Caso 4: Si $k \neq 0$ y $m \neq 0$. Para que esta función sea un polinomio, los exponentes deben cumplir las siguientes condiciones:

a. $m + k - 1 > 0$

$$m > 1 - k$$

b. $m - k - 1 \geq 0$

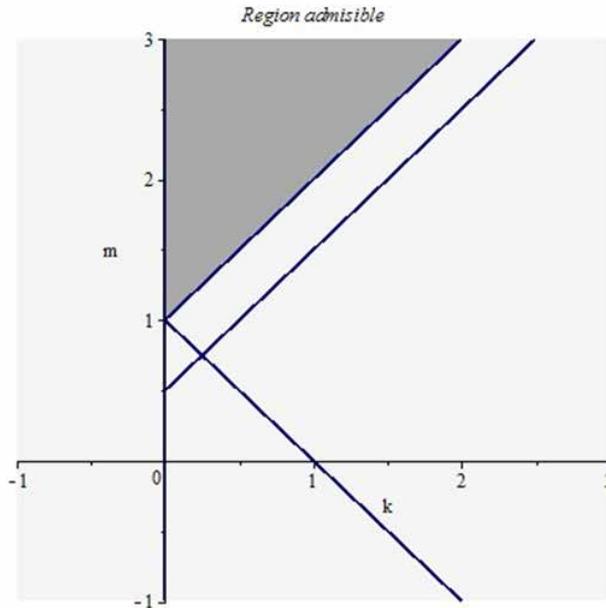
$$m \geq k + 1$$

c. $2m - 2k - 1 > 0$

$$m \geq k + \frac{1}{2}$$

Haciendo la solución gráfica del sistema de inecuaciones, con las opciones anteriores, podemos notar que parte de los puntos admisibles (k, m) (k, m) están contenidos en la región $k \geq 0$, $k \geq 0$ y $m \geq k + 1$.

Figura 2.1. (k,m) para que la función sea polinomial



Fuente: elaboración propia.

Pero analicemos qué sucede cuando alguna de las constantes se hace cero.

4.1: Si $a \neq 0$ y $k > 0$, en este caso las condiciones son:

- $m + k - 1 > m - k - 1$
- $m + k - 1 > 0$
- $m - k - 1 > 0$
- $2m - 2k - 1 > 0$
- $2m - 2k - 1 > 4k$
- $k > 0$

4.1.1: Si $k = 2m$, entonces el sistema se reduce a:

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = 4amyx^{3m-1} - a^2mx^{6m-1} - cx^{2m-1} - b^2mx^{-2m-1}$$

Entonces se deben cumplir las condiciones:

- $3m - 1 > 0$
- $-2m - 1 > 0$

Es decir $m > 1/3$ y $m < -1/2$, lo cual no se puede. Entonces, la única forma de que sea un polinomio es que $a = b = c = 0$.

4.1.2: Si $k \neq 2m$, entonces depende de b . Si $b \neq 0$, se mantienen las condiciones del principio del caso 4.1. Pero si $b = 0$, entonces las condiciones a tomar en cuenta son:

- $m + k - 1 > 0$.
- $2m - 2k - 1 > 0$.
- $k > 0$.

De lo cual se obtiene que:

$$1 - m < k < m - \frac{1}{2}$$

y

$$\frac{3}{4} = m$$

4.2: Si $a = 0$ y $k < 0$, en este caso las condiciones son:

- $m + k - 1 < m - k - 1$
- $m + k - 1 > 0$
- $m - k - 1 > 0$
- $2m - 2k - 1 > 0$
- $2m - 2k - 1 > 4k$
- $k < 0$

Para el inciso b , basta con analizar gráficamente en conjunto la región del inciso añadiendo las nuevas condiciones.

Estudio galoisiano y cualitativo caso minimal

Un caso particular para nuestra familia de sistema de ecuaciones de Lié-nard es el sistema polinomial lineal (dado cuando $m = 1, k = 0$):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= (2a + 2b)y - (a^2 + c + b^2)x \end{aligned} \quad (3.2)$$

El objeto principal de esta sección será el análisis tanto galoisiano como cualitativo del sistema. Cabe notar que las técnicas utilizadas en esta sección se pueden estudiar más a fondo en [4], [5], [6], [7] y [8].

Proposición 3.2

Para (3.2), con $\rho = 2ab - c$ se cumple que:

- i Si $(2ab - c) = 0$, entonces el grupo de Galois diferencial es $DGal \langle L/K \rangle = (\{\sigma_c: \sigma_c(y) = y + c, c \in \mathbb{C}\}, o)$.
 - ii Si $(2ab - c) \neq 0$, entonces el grupo de Galois diferencial es $DGal \langle L/K \rangle = (\{\sigma_c/\sigma_c(y) = cy, c \in \mathbb{C}\}, o)$.
 - iii Las curvas algebraicas invariantes son $f_1 = -v + \sqrt{\rho}$ y $f_2 = -v - \sqrt{\rho}$ y sus respectivos cofactores generalizados $K_1 = -1(v + \sqrt{\rho})$ $K_2 = -1(v - \sqrt{\rho})$.
 - iv Los factores exponenciales generalizados son $F_1(v, x) = \exp^{\sqrt{\rho}x+c}$ y $F_2(v, x) = \exp^{-\sqrt{\rho}x+c}$.
- Además, sus respectivos cofactores generalizados son $L_1 = (v, x) = \sqrt{\rho}$ y $L_2 = -\sqrt{\rho}$.
- v Los factores integrantes son $R_1(v, x) = \frac{\exp^{-2\sqrt{\rho}x}}{(-v+\sqrt{\rho})^2}$ y $R_2(v, x) = \frac{\exp^{2\sqrt{\rho}x}}{(-v-\sqrt{\rho})^2}$
 - vi Las integrales primeras están dadas por:

$$I_1(v, x) = \frac{-v - \sqrt{\rho} - \frac{\exp^{-2\sqrt{\rho}x}}{-2\sqrt{\rho} \exp^{-2\sqrt{\rho}x} + c}}{-v - \sqrt{\rho}} \left(-2\sqrt{\rho} \exp^{-2\sqrt{\rho}x} \right) \exp^{\frac{1}{4\rho}}$$

$$I_1(v, x) = \frac{-v + \sqrt{\rho} - \frac{\exp^{2\sqrt{\rho}x}}{-2\sqrt{\rho} \exp^{2\sqrt{\rho}x} + c}}{-v + \sqrt{\rho}} \left(2\sqrt{\rho} \exp^{2\sqrt{\rho}x} \right) \exp^{\frac{1}{4\rho}}$$

vii Si $c > 0$, $(0,0)$, es el único punto crítico en el plano finito, además es estable.

viii Si $a, b, c > 0$, los puntos críticos en el infinito para el sistema son:

$$(x, y, 0) = \left(\pm\sqrt{1 - y^2}, (a + b) \pm \sqrt{2ab - c}, 0 \right).$$

Demostración

La foliación asociada a (3.2) es:

$$yy' = (2a + 2b)y - (a^2 + c + b^2)x$$

Entonces, teniendo en cuenta que $f(x) = -2(a + b)y$ y $g(x) = (a^2 + c + b^2)x$, la ecuación de Liénard será:

$$\ddot{x} - (2a + 2b)\dot{x} - (a^2 + c + b^2)x = 0$$

Esta es una ecuación de segundo orden con coeficientes constantes.

Si la llevamos a la forma $\ddot{y} = \rho y$ con el cambio de variable $x = \exp\left\{-\frac{1}{2R}f(x)dt\right\}$, es decir, $x = \exp^{(a+b)t}$ y se obtiene la ecuación:

$$\ddot{y} = (2ab - c)y$$

Analicemos cada caso de la solución de la ecuación de Liénard asociada teniendo en cuenta lo siguiente:

$(2ab-c) = \rho$. La solución de la ecuación reducida de segundo orden es $y(t) = C_1 \exp^{\rho t} + C_2 \exp^{-\rho t}$ si se toman $(C_1, C_2) = (1, 0)$ o $(C_1, C_2) = (0, 1)$, y las soluciones particulares son:

$$y_1 = \exp^{\sqrt{\rho}t} \quad y_2 = \exp^{-\sqrt{\rho}t}$$

Con estas podemos construir las soluciones de la ecuación de Liénard, que son:

$$x_1 = \exp^{(a+b)t} y_1 = \exp^{(a+b+\sqrt{2ab-c})t}$$

Para estas tenemos los siguientes casos:

Caso 1: Si $a, b, c \in \mathbb{C}$, esto es, $(a + b + \sqrt{2ab - c}) = \alpha + i\beta = z$, entonces $x_1 = \exp^{\alpha t} \cdot \exp^{\beta t}$.

1.1: Si $\alpha \geq 0$ y $\beta = 0$, entonces x_1 es no acotada en $-\infty$ y no acotada en $+\infty$.

1.2: Si $\alpha < 0$ y $\beta = 0$, entonces x_1 es no acotada en $+\infty$ y no acotada en $-\infty$.

1.3: Si $\alpha = 0$ y $\beta = 0$, entonces la solución x_1 es periódica.

Caso 2: Si $a, b, c \in \mathbb{R}$, entonces $x_1 = \exp^{(a+b)t} \cdot \exp^{(\sqrt{2ab-c})t}$.

2.1: Si $c < 2ab$, entonces tendremos dos curvas soluciones x_1 y x_2

2.2: Si $c > 2ab$, entonces $(a + b) + \sqrt{2bc} = (a + b) + i\sqrt{c - 2ab}$, es decir que estaríamos en el caso uno con $\alpha = a + b, \beta = \sqrt{c - 2ab}$, y además si $a = -b \Rightarrow \alpha = 0$ ó $a < 0$ y $a > -b \Rightarrow \alpha > 0$.

Nuestro siguiente objetivo será realizar el cálculo de los grupos de Galois asociados a la ecuación $\ddot{y} = \rho y$, tomando como cuerpo de constantes

$K = \mathbb{C}$. Este estudio se puede ver en [2]. Debemos tener en cuenta dos casos:

Caso 1: Si $\rho = 0$, entonces tendremos la ecuación $\ddot{y} = 0$, cuyo espacio de soluciones es generado por $y_1 = 1$ e $y_2 = t$. La extensión de Picard-Vessiot es $L = \mathbb{C} \langle t \rangle$, donde $\langle t \rangle = \{\hat{k}_0 + \hat{k}_1 t; \hat{k}_0, \hat{k}_1 \in \mathbb{C}\}$. Si tomamos el automorfismo $\sigma \in DGal \langle L/K \rangle$, veamos qué forma debe tener:

Primero, debemos tener en cuenta que $\sigma: L \rightarrow L$ de manera que $\sigma|_{\mathbb{C}} = \text{identidad}$, entonces $\sigma(y_1) = 1 = y_1$. Ahora:

$$\sigma(\partial_t t) = \partial_t(\sigma(t))\sigma(1) = 1 = \partial_t(\sigma(t))$$

Resolviendo esta ecuación por variables separables, tenemos que $\sigma(t) = t + C$; por tanto, el grupo de Galois diferencial será:

$$DGal \langle L/K \rangle = (\{\sigma_c: \sigma_c(y) = y + c, \quad c \in \mathbb{C}\}, \circ)$$

También se puede ver que:

$$\sigma\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c_1 & 1 \end{pmatrix}$$

Es decir que el grupo de Galois diferencial es isomorfo al grupo:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c_1 & 1 \end{pmatrix} : c \in \mathbb{C} \right\}, \bullet$$

Caso 2: Si $\rho \neq 0$, tendremos entonces la ecuación $(y) = \rho y$, tomando el mismo campo de constantes del caso anterior K . La base de soluciones para la ecuación es $y_1 = \exp^{-\sqrt{\rho}t} = \frac{1}{y_1}$. La extensión de Picard-Vessiot será $L = \mathbb{C} \langle \exp^{\sqrt{\rho}t} \rangle$.

Ahora, supongamos que $\sigma \in DGal < L/K >$ y veamos qué acción realiza sobre las soluciones y_1, y_2 .

$$\sigma(y_1) = \sigma(\exp\sqrt{\rho t}) \Leftrightarrow \partial_t \sigma(y_1) = \sigma(\partial_t \exp\sqrt{\rho t}) = \sqrt{\rho} \sigma(y_1)$$

Resolviendo la ecuación diferencial $\partial_t \sigma(y_1) = \sqrt{\rho} \sigma(y_1)$ por el método de separación de variables, nos queda que $\sigma(y_1) = y_1 \cdot c$; además, como $y_2 = 1/y_1$, entonces $\sigma(y_2) = \frac{1}{\sigma(y_1)} = \frac{1}{c \cdot y_1} = \frac{1}{c} y_2$.

El grupo de Galois diferencial será

$$DGal < L/K > = (\{\sigma_c / \sigma_c(y) = cy, \quad c \in \mathbb{C}\}, o)$$

También se puede ver en este caso que:

$$\sigma \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1/c \end{pmatrix}$$

Es decir que el grupo de Galois diferencial es isomorfo al grupo:

$$\left\{ \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1/c \end{pmatrix} : c \in \mathbb{C} \right\}, \bullet$$

Si hacemos el cambio de variable $v = \frac{\dot{y}}{y}$ sobre la ecuación $\ddot{y} = \rho y$, tendremos la ecuación de Riccati:

$$\dot{v} = \rho - v^2$$

Y el campo vectorial asociado es $\mathbf{X} = \partial_x + (\rho - v^2) \partial_v$.

Aplicando el *Lema 1* de [1], identificamos cada uno de los elementos de la integrabilidad de Darboux (definidos también en la *Sección 1.2* de [1]), con $v_\lambda(x)$ como la solución:

a) **Curvas algebraicas invariantes:** $(f_\lambda(v, x) = -v + v_\lambda(x))$

$$f_1 = -v + \sqrt{\rho} \text{ y } f_2 = -v - \sqrt{\rho}$$

Cofactores generalizados: $(K_\lambda(v, x) = -N(x)(v + v_\lambda(x)))$

$$K_1 = -1(v + \sqrt{\rho}) \text{ y } k_2 = -1(v - \sqrt{\rho})$$

b) **Factor exponencial generalizado:**

$$(F_\lambda(v, x) = \exp^{\int (\frac{N'(x)}{2N(x)} + v_\lambda(x)) dx})$$

También

$$F_1(v, x) = \exp^{\int (\frac{0}{2} + v_1(x)) dx} = \exp^{\int \sqrt{\rho} dx} = \exp^{\sqrt{\rho}x + c}$$

$$F_2(v, x) = \exp^{\int (\frac{0}{2} + v_2(x)) dx} = \exp^{\int -\sqrt{\rho} dx} = \exp^{-\sqrt{\rho}x + c}$$

Cofactor generalizado: $L_\lambda(v, x) = N'(x)/2 + N(x)v_\lambda(x)$

$$L_1 = (v, x) = N'/2 + Nv_1 = \sqrt{\rho},$$

$$L_2 = (v, x) = N'/2 + Nv_2 = -\sqrt{\rho}$$

c) **Factor integrante:** $R_\lambda(v, x) = \frac{\exp^{\int (-\frac{N'}{N} - 2v_\lambda) dx}}{-v + v_\lambda}$

$$R_1(v, x) = \frac{\exp^{\int (-\frac{1'}{1} - 2v_1) dx}}{-v + v_1} = \frac{\exp^{-2\sqrt{\rho}x}}{(-v + \sqrt{\rho})^2}$$

$$R_2(v, x) = \frac{\exp^{\int (-1'/1 - 2v_2) dx}}{-v + v_2} = \frac{\exp^{2\sqrt{\rho}x}}{(-v - \sqrt{\rho})^2}$$

d) **Integral primera:** para este caso debemos calcular primero dos elementos:

$$1. v_{(\lambda,1)} = (\ln(y_\lambda))^i$$

$$\text{En nuestro caso } v_{(1,1)} = \sqrt{\rho} \text{ y } v_{(2,1)} = -\sqrt{\rho}$$

$$2. v_{(\lambda,2)} = v_{(\lambda,1)} + \frac{\exp^{-2\int v_{(\lambda,1)} dx}}{\int (\exp^{-2\int v_{(\lambda,1)} dx}) dx}$$

En nuestro caso

$$\begin{aligned} v_{(1,2)} &= v_{(1,1)} + \frac{\exp^{-2\int v_{(1,1)} dx}}{\int (\exp^{-2\int v_{(1,1)} dx}) dx} \\ &= \sqrt{\rho} + \frac{\exp^{-2\int \sqrt{\rho} dx}}{\int (\exp^{-2\int \sqrt{\rho} dx}) dx} \\ &= \sqrt{\rho} + \frac{\exp^{-2\sqrt{\rho}x} \cdot \exp^{C_1}}{\exp^{C_1} \int (\exp^{-2\sqrt{\rho}x}) dx} \\ &= \sqrt{\rho} + \frac{\exp^{-2\sqrt{\rho}x}}{-2\sqrt{\rho}(\exp^{-2\sqrt{\rho}x} + C_2)} \\ &= \sqrt{\rho} - \frac{\exp^{-2\sqrt{\rho}x}}{-2\sqrt{\rho}\exp^{-2\sqrt{\rho}x} + C} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{(2,2)} &= v_{(2,1)} + \frac{\exp^{-2\int v_{(2,1)} dx}}{\int (\exp^{-2\int v_{(2,1)} dx}) dx} \\ &= -\sqrt{\rho} + \frac{\exp^{2\int \sqrt{\rho} dx}}{\int (\exp^{2\int \sqrt{\rho} dx}) dx} \\ &= -\sqrt{\rho} + \frac{\exp^{2\sqrt{\rho}x} \cdot \exp^{C_1}}{\exp^{C_1} \int (\exp^{2\sqrt{\rho}x}) dx} \\ &= -\sqrt{\rho} + \frac{\exp^{2\sqrt{\rho}x}}{2\sqrt{\rho}(\exp^{2\sqrt{\rho}x} + C_2)} \\ &= -\sqrt{\rho} + \frac{\exp^{2\sqrt{\rho}x}}{2\sqrt{\rho}\exp^{2\sqrt{\rho}x} + C} \end{aligned}$$

Ahora las integrales primeras están dadas por:

$$I_\lambda(v, x) = \frac{-v - v_{(\lambda,2)}}{-v - v_{(\lambda,1)}} \exp^{\int (v_{(\lambda,2)} - v_{(\lambda,1)}) dx}$$

entonces:

$$\begin{aligned} I_1(v, x) &= \frac{-v - \sqrt{\rho} - \frac{\exp^{-2\sqrt{\rho}x}}{-2\sqrt{\rho}\exp^{-2\sqrt{\rho}x} + C}}{-v - \sqrt{\rho}} \exp^{\int \left(\sqrt{\rho} - \frac{\exp^{-2\sqrt{\rho}x}}{-2\sqrt{\rho}\exp^{-2\sqrt{\rho}x} + C} - \sqrt{\rho} \right) dx} \\ &= \frac{-v - \sqrt{\rho} - \frac{\exp^{-2\sqrt{\rho}x}}{-2\sqrt{\rho}\exp^{-2\sqrt{\rho}x} + C}}{-v - \sqrt{\rho}} (-2\sqrt{\rho}\exp^{-2\sqrt{\rho}x}) \exp^{1/4\rho} \\ I_2(v, x) &= \frac{-v + \sqrt{\rho} - \frac{\exp^{2\sqrt{\rho}x}}{2\sqrt{\rho}\exp^{2\sqrt{\rho}x} + C}}{-v + \sqrt{\rho}} \exp^{\int \left(-\sqrt{\rho} + \frac{\exp^{2\sqrt{\rho}x}}{2\sqrt{\rho}\exp^{2\sqrt{\rho}x} + C} + \sqrt{\rho} \right) dx} \\ &= \frac{-v + \sqrt{\rho} - \frac{\exp^{2\sqrt{\rho}x}}{2\sqrt{\rho}\exp^{2\sqrt{\rho}x} + C}}{-v + \sqrt{\rho}} (2\sqrt{\rho}\exp^{2\sqrt{\rho}x}) \exp^{1/4\rho} \end{aligned}$$

Analicemos ahora para los puntos críticos, tanto en el plano finito como en el infinito. Para esto se utiliza el *Teorema 1* [7, c. 3., p. 271], el cual se basa en el estudio del sistema sobre el ecuador de la esfera de Poincaré, es decir, cuando $x^2 + y^2 = 1$.

Recordemos que $P(x, y) = y$ y $Q(x, y) = 2(a + b)y - (a^2 + b^2 + c)x$ con $a, b, c > 0$, luego los puntos críticos están dados por el sistema:

$$y = 0 \quad 2(a + b)y - (a^2 + b^2 + c)x = 0$$

entonces el único punto crítico en el plano finito es $(x, y) = (0, 0)$. Ahora, para el análisis cualitativo del punto crítico hallamos la matriz jacobiana evaluada en el punto, dada por:

$$D(P, Q) |_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(a^2 + b^2 + c) & 2(a + b) \end{pmatrix}$$

Los valores propios están dados entonces por el polinomio característico $\lambda^2 - 2(a + b)\lambda + (a^2 + b^2 + c) = 0$. Así, los valores propios son:

$$\lambda_{1,2} = \frac{2(a + b) \pm \sqrt{4(a + b)^2 - 4(a^2 + b^2 + c)}}{2} = (a + b) \pm \sqrt{2ab - c}$$

Para hallar los puntos críticos y su comportamiento podemos usar el sistema:

$$\begin{aligned} \pm y &= yz^r P(1/z, y/z) - z^r Q(1/z, y/z) \\ \pm z &= z^{r+1} P(1/z, y/z) \end{aligned}$$

(véase [9])

En nuestro caso $r = 1$, al reemplazar nos resulta:

$$\begin{aligned} \pm y &= y^2 - 2(a + b)y + (a^2 + b^2 + c) \\ \pm z &= zy \end{aligned}$$

Los puntos críticos para este sistema resultan de resolver el sistema:

$$\begin{aligned} y^2 - 2(a + b)y + (a^2 + b^2 + c) &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

entonces,

$$y_{1,2} = \frac{2(a + b) \pm \sqrt{4(a + b)^2 - 4(a^2 + b^2 + c)}}{2} = (a + b) \pm \sqrt{2ab - c}$$

Además, como nos encontramos en el ecuador de la esfera de Poincaré, $x^2 + y^2 = 1$, es decir que $x = \pm\sqrt{1 - y^2}$.

Notemos también que al cambiar los signos de \bar{x} e \bar{y} obtenemos puntos que se llaman antípodos, los cuales tienen una estabilidad contraria. Teniendo en cuenta las anteriores condiciones, los puntos críticos en el infinito son:

$$(x, y, 0) = (\pm\sqrt{1 - y^2}, (a + b) \pm \sqrt{2ab - c}, 0)$$

La matriz jacobiana es:

$$D(P, Q) = \begin{pmatrix} 2y - 2(a + b) & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix}$$

En nuestro caso:

$$D(P, Q) |_{(y_{1,2}, 0)} = \begin{pmatrix} \pm 2\sqrt{2ab - c} & 0 \\ 0 & (a + b) \pm \sqrt{2ab - c} \end{pmatrix}$$

Podemos notar entonces que los signos de los valores propios dependen de los signos de los elementos en la diagonal. Lo anterior indica que se debe analizar varios casos, tanto para el plano finito como para el infinito. Sea $\Delta = 2ab - c$.

Caso 1: Si $\Delta > 0$, entonces $\lambda_1 > 0$, pero para λ_2 tenemos tres posibilidades. Pero si $\lambda_2 < 0$ y $\lambda_2 = 0$, se contradice el hecho de que $a, b, c > 0$, entonces la única opción es que $\lambda_2 > 0$. Como ambos valores propios son positivos, entonces el origen es un punto crítico repulsor.

En cuanto a los puntos críticos en el infinito, en este caso se puede ver que los elementos en la diagonal de la matriz jacobiana tienen dos opciones y_1, y_2 .

Para y_1 :

$$D(P, Q) |_{(y_1, 0)} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2ab - c} & 0 \\ 0 & (a + b) + \sqrt{2ab - c} \end{pmatrix}$$

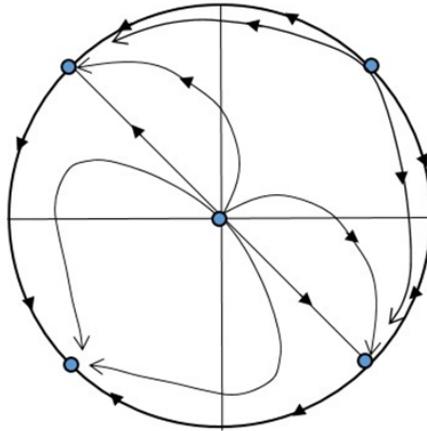
Para este punto los valores en la diagonal son positivos; luego, en el infinito este punto crítico es tipo repulsor y, por lo tanto, su antípodo es tipo atractor.

Para y_2 :

$$D(P, Q) |_{(y_2, 0)} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2ab-c} & 0 \\ 0 & (a+b) - \sqrt{2ab-c} \end{pmatrix}$$

donde $-2\sqrt{2ab-c} < 0$ y $(a+b) - \sqrt{2ab-c} = \lambda_2 > 0$; por lo tanto, el punto crítico es tipo silla. Entonces el retrato fase para el sistema en este caso es:

Figura 3.1. Retrato de fase global para caso 1 (3.2)



Fuente: elaboración propia.

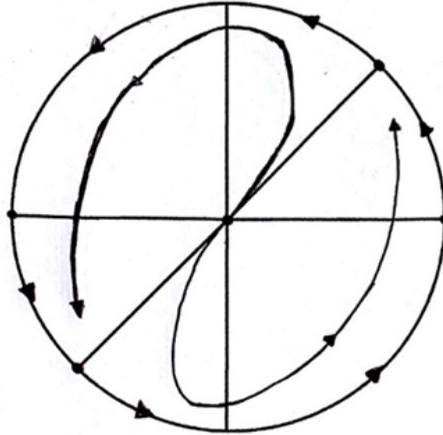
Caso 2: Si $\Delta = 0$, entonces $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, es decir que el origen es un punto crítico repulsor.

Para los puntos en el infinito, el sistema se reduce a:

$$\begin{aligned} \dot{\pm y} &= (y - a - b)^2 \\ \dot{\pm z} &= zy \end{aligned}$$

con solución $y = a + b > 0$. Luego, el retrato fase para el sistema en este caso es:

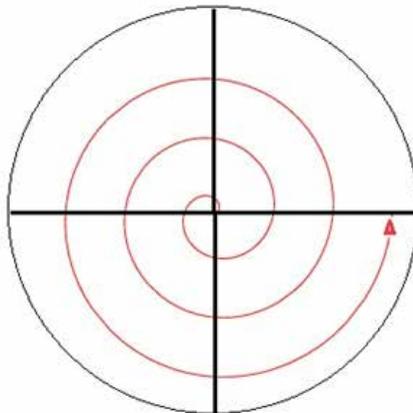
Figura 3.2. Retrato de fase global para caso 2 (3.2)



Fuente: elaboración propia.

Caso 3: Si $\Delta < 0$, entonces $\lambda_1 = (a + b) + i\sqrt{c - 2ab}$ y $\lambda_2 = (a + b) - i\sqrt{c - 2ab}$ con $(a + b) > 0$, es decir que el origen es un punto crítico tipo espiral. En cuanto al infinito, la ecuación no tiene soluciones reales, es decir que no tiene puntos críticos en el infinito. Entonces, el retrato fase para el sistema en este caso es:

Figura 3.3. Retrato de fase global para caso 3 (3.2)



Fuente: elaboración propia.

Campo vectorial con $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ y de segundo grado

Nuestro siguiente caso será identificar las condiciones para que el sistema con $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ tenga un grado específico (en este caso 2).

Si $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, el sistema se reduce a:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= a(2m+k)yx^{m+k-1} - a^2mx^{2m+2k-1} - cx^{2m-1} \end{aligned}$$

Para que este sistema tenga asociado un campo vectorial polinomial, los exponentes deben estar entre 0 y 2, es decir:

$$\begin{aligned} 0 &\leq m+k-1 \leq 2 \\ 0 &\leq 2m+2k-1 \leq 2 \\ 0 &\leq 2m-1 \leq 2 \end{aligned}$$

Si tomamos todas las posibles opciones, tenemos que:

$$\begin{array}{lll} m+k-1=0 & m+k-1=1 & m+k-1=2 \\ 2m+2k-1=0 & 2m+2k-1=1 & 2m+2k-1=2 \\ 2m-1=0 & 2m-1=1 & 2m-1=2 \end{array}$$

Ahora formaremos todos los sistemas posibles de tres ecuaciones y buscaremos cuáles tienen solución. Notamos que el único con resoluble es:

$$\begin{aligned} m+k-1 &= 0 \\ 2m+2k-1 &= 1 \\ 2m-1 &= 2 \end{aligned}$$

para el cual $m = \frac{3}{2}$, $k = -\frac{1}{2}$

Luego, el sistema se reduce a:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \frac{5}{2}ay - \frac{3}{2}a^2x - cx^2 \end{aligned}$$

A continuación, realizaremos el análisis cualitativo de este sistema polinomial de grado 2.

Primero encontraremos los puntos críticos:

$$\begin{aligned}
 y &= 0 \\
 \frac{5}{2}ay - \frac{3}{2}a^2x - cx^2 &= 0 \\
 &\Rightarrow \\
 x\left(\frac{3}{2}a^2 - cx\right) &= 0 \\
 &\Rightarrow \\
 x = 0, x &= \frac{3a^2}{2c}
 \end{aligned}$$

Es decir que los puntos críticos para el sistema son:

$$(0,0) \quad \& \quad \left(\frac{3a^2}{2c}, 0\right)$$

El siguiente paso es clasificar los puntos críticos. Para ello, usaremos la matriz jacobiana asociada al campo vectorial:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{2}a^2 - cx & \frac{5a}{2} \end{bmatrix}$$

Si evaluamos el primer punto crítico, se tiene:

$$D(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{2}a^2 & \frac{5a}{2} \end{bmatrix}$$

Con polinomio característico:

$$-\lambda\left(\frac{5}{2}a - \lambda\right) + \frac{3}{2}a^2 = 0$$

o

$$\lambda^2 - \frac{5}{2}a\lambda + \frac{3}{2}a^2 = 0$$

y valores propios asociados:

$$\lambda_1 = \frac{3}{2}a, \quad \lambda_2 = \frac{a}{2}$$

De lo anterior se puede concluir que el punto crítico $(0,0)$ es atractor si $a < 0$ o repulsor si $a > 0$.

Ahora, para el segundo punto crítico se tiene que:

$$D\left(\frac{3a^2}{2c}, 0\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{9}{2}a^2 & 5a \end{bmatrix}$$

Con polinomio característico:

$$-\lambda\left(\frac{5}{2}a - \lambda\right) + \frac{9}{2}a^2 = 0$$

o

$$\lambda^2 - \frac{5}{2}a\lambda + \frac{9}{2}a^2 = 0$$

y valores propios asociados:

$$\lambda_1 = \frac{5a}{4} + \frac{ia\sqrt{47}}{4}, \quad \lambda_2 = \frac{5a}{4} - \frac{ia\sqrt{47}}{4}$$

Es decir que cerca del punto crítico $\left(\frac{3a^2}{2c}, 0\right)$ las órbitas se comportan en forma de espiral estable o inestable, dependiendo de si a es positivo o negativo.

Bibliografía

- [1] P. B. Acosta-Humánez, J. T. Lazaro, J. J. Morales-Ruiz, C. Patanzi, "On the integrability of polynomial fields in the plane by means of Picard-Vessiot theory", *arXiv:1012.4796*, 2012.
- [2] P.B. Acosta-Humánez, "Galoisian Approach to Supersymmetric Quantum Mechanics", *arXiv:0906.3532*, 2009.
- [3] P. Acosta-Humánez, J. Morales-Ruiz y J. A. Weil, "Galoisian Approach to Integrability of Schrödinger Equation", *arXiv:1008.3445*, 2010.
- [4] J. Guckenheimer y P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dymaical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer-Verlag New York, 1983.
- [5] J. J. Morales-Ruíz, *Differential Galois Theory and Non-Integrability of Hamiltonian Systems*. Basilea: Birkhäuser, 1999.
- [6] A.D. Polyanin y V.F. Zaitsev, *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations*, segunda edición. Boca Ratón: Chapman and Hall, 2003.
- [7] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*, tercera edición. Springer-Verlag New York, 2001.
- [8] M. van der Put y M. Singer, *Galois Theory in Liénard Differential Equations*. Springer-Verlag New York, 2003.

Capítulo 4

Polinomios ortogonales y campos polinomiales cuadráticos

Jorge Rodríguez Contreras^{1,2}

Alberto Reyes Linero³

María Campo Donado⁴

Primitivo B. Acosta-Humánez^{5,6}

Resumen

El trabajo presentado en este capítulo tuvo como objeto de estudio hacer un análisis algebraico y cualitativo de campos polinomiales cuadráticos asociados a los polinomios ortogonales clásicos. Es decir, analizar las condiciones que deben cumplir las funciones $P(v, x)$ y $Q(v, x)$ para que el sistema:

1 Departamento de Matemática y Estadística Universidad del Norte, Barranquilla, Colombia. Correo electrónico: jrodr@uninorte.edu.co.

2 Programa de Matemáticas, Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia. Correo electrónico: jorgelrodriguez@mail.uniatlantico.edu.co.

3 Programa de Matemáticas, Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia. Correo electrónico: areyeslinero@mail.uniatlantico.edu.co.

4 Programa de Matemáticas, Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia. Correo electrónico: mcampodonado@mail.uniatlantico.edu.co.

5 Facultad de Ciencias Básicas y Biomédicas, Universidad Simón Bolívar, Barranquilla, Colombia.

6 Instituto Superior de Formación Docente Salomé Ureña, Recinto Emilio Prud-Homme, Santiago de los Caballeros, República Dominicana. Correo electrónico: primitivo.acosta-humanez@isfodosu.edu.do.

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = P(v, x) \\ \frac{dx}{dt} = Q(v, x) \end{cases} \quad (4.1)$$

pueda asociarse a la ecuación hipergeométrica:

$$\rho(x)y'' + \tau(x)y' + \lambda y = 0 \quad (4.2)$$

sobre la cual es bien sabido que, si $\rho(x)$ y $\tau(x)$ son polinomios de grado a lo más 2 y 1, respectivamente, tiene como solución algún polinomio ortogonal clásico para determinada constante λ . Habiendo determinado la estructura del sistema (4.1), se realizará el estudio algebraico para analizar sus curvas algebraicas invariantes, pues estas son también muy determinantes para hacer el análisis cualitativo del mismo. Luego, estudiaremos los puntos críticos en el plano finito e infinito y la existencia de ciclos límites. De esta manera, podremos construir los retratos de fase globales para algunos sistemas particulares.

En el desarrollo de este trabajo se hizo uso de tres teorías muy importantes: polinomios ortogonales clásicos [10], teorías de Galois [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], y la teoría cualitativa de sistemas dinámicos [11], [12], [13].

Introducción

Los polinomios ortogonales nacieron, en primera instancia, por una necesidad de aplicación práctica: encontrar las componentes de las fuerzas de atracción gravitacional entre cuerpos no esféricos. En un artículo publicado en 1785 (*Sur l'attraction des sphéroïdes*), Adrien-Marie Legendre introduce los polinomios que llevan su nombre, $P_{2n}(x)$, y que forman parte de uno de sus primeros estudios sobre la teoría del potencial y la determinación de la magnitud de las fuerzas gravitatorias antes mencionadas. Más adelante, prueba algunas propiedades de estos polinomios, incluyendo la ortogonalidad y la ecuación diferencial lineal que satisfacen dichos polinomios.

En 1826, el francés Olinde Rodrigues encuentra una fórmula para expresar los polinomios de Legendre, hoy día generalizada para los polinomios ortogonales clásicos y conocida como fórmula de Rodrigues.

Más tarde, el matemático Charles Hermite, interesado en el desarrollo de las series de funciones con la intención de generalizarlas para el caso de varias variables, construye los polinomios de Hermite por medio de una fórmula que se estructura como la de Rodrigues. Hermite encuentra que esta familia de polinomios también satisface una ecuación diferencial lineal de segundo orden de tipo hipergeométrico. Luego, se demuestra que cumple una relación de ortogonalidad.

Edmond Nicolas Laguerre estudió otra familia especial de polinomios, que ahora llevan su nombre. Mientras utilizaba fracciones continuas para solucionar la integral $\int_x^\infty e^{-t} t^{-1} dt$, encontró polinomios especiales que satisfacen la hoy conocida ecuación diferencial de Laguerre.

A partir de los polinomios de Legendre, Karl Jacobi introduce una familia generalizada: los polinomios de Jacobi. Este estudio surge, más que por una necesidad meramente práctica, como un desarrollo teórico del concepto de sucesión de polinomios ortogonales.

Una de las formas de caracterización de estas familias de polinomios ortogonales (Jacobi, Hermite y Laguerre), y de nuestro mayor interés, es que todas ellas, como logró demostrar Salomon Bochner, satisfacen la ecuación diferencial de tipo hipergeométrico (4.2).

La *teoría de clásica de Galois* se desarrolla, a través de la historia, por la necesidad de encontrar la solución de las ecuaciones algebraicas. Karl Friedrich Gauss demostró en 1829 que toda ecuación polinómica irreducible de grado n con coeficientes racionales tiene n raíces. Évariste Galois demostró que estas raíces pueden calcularse a partir de los coeficientes de la propia ecuación. Su mayor aporte fue determinar las condiciones en las que una ecuación es resoluble por radicales, es decir, cuando la ecuación polinómica admite un grupo, que denomina grupo soluble.

Luego de desarrollarse esta teoría, el matemático Sophus Lie utiliza este punto de vista algebraico para estudiar las ecuaciones diferenciales, contribuyendo con su teoría de grupos de Lie. Años más tarde, dos seguidores de la teoría de Galois, Charles Émile Picard y Ernest Vessiot, desarrollan una teoría análoga denominada *teoría de Galois diferencial*.

Desde la época de Newton, en la cual nacieron las ecuaciones diferenciales, surgió la inmediata necesidad de hallarles una solución acertada y eficiente. A partir de entonces muchos se interesaron en el tema, pero sin tener éxito. Solo hasta la aparición del trabajo de Henri Poincaré, entre los años 1881 y 1886, se empezó a vislumbrar un camino para resolver el problema. El éxito consistió, a diferencia de sus antecesores, en que él consideró a las ecuaciones diferenciales no solo como objetos del cálculo, sino también como objetos con un significado geométrico. Poincaré propuso la descripción del retrato de fase de la ecuación diferencial. Esto dio inicio a la *teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales*.

En 1901, el matemático sueco Ivar Otto Bendixson contribuye a la teoría que iniciaba Poincaré. Uno de sus resultados más importantes es el *teorema de Poincaré-Bendixson*, que se centra en el estudio de las singularidades: puntos singulares, órbitas periódicas y separatrices.

A pesar del gran paso de aquella época, esta nueva teoría se desarrollaba lentamente. Sin embargo, el entusiasmo por resolver el problema se extendía a otras partes del mundo; por ejemplo, en Rusia, el grupo de A. Lyase se interesó en estudiar y conseguir nuevos métodos para hallar soluciones. Por otro lado, el alemán David Hilbert proponía algunos problemas interesantes para la conferencia en París del Congreso Internacional de Matemáticos de 1900, tales como la uniformización de las relaciones analíticas por medio de funciones automórficas —resuelto por Koebe (1907) y Poincaré (1907) independientemente— y probar la existencia de ecuaciones lineales diferenciales que tengan un grupo monodrómico prescrito.

En 1923, Henri Dulac prueba (de forma errónea como se descubrió más tarde) que el número de ciclos límites de un sistema polinomial en el plano es finito. A pesar del vacío que dejó la prueba, las ideas que usaba fueron interesantes.

En 1926, Balthasar van der Pol obtiene una ecuación diferencial para describir las oscilaciones de amplitud constante de un tríodo al vacío y utiliza métodos gráficos para probar la existencia de una órbita periódica. Un tiempo después, en 1929, Aleksandr Andronov establece la relación entre el experimento de van der Pol y la idea de ciclo límite de Poincaré. Es la primera confirmación práctica de la idea de ciclo límite.

En 1928, el ingeniero francés Alfred-Marie Liénard publica un trabajo en la revista *Révue générale d'électricité*, el cual se relaciona estrictamente con el oscilador de van der Pol.

En los años 30, Aleksandr Andronov y Lev Pontryagin se ocupan de uno de los temas fundamentales de la teoría cualitativa: la estabilidad estructural. Esta teoría consiste en estudiar cuándo un retrato de fase mantiene su topología bajo variaciones pequeñas de los coeficientes de la ecuación diferencial. Cuando esto no se da, se debe entrar en el estudio de las *bi-furcaciones*.

Hasta 1981 se creyó verdadero el problema de finitud trabajado por Dulac. Finalmente se demostró que la prueba era falsa. En 1985, siguiendo caminos distintos, Yulij Ilyashenko y Jean Écalle dan solución a esta conjetura.

Polinomios ortogonales

Como parte de las propiedades básicas de los polinomios ortogonales clásicos, está dado el hecho de que son solución de la ecuación hipergeométrica:

$$\rho(x)y'' + \tau(x)y' + \lambda y = 0$$

donde los polinomios $\rho(x)$, K_1P_1 y el parámetro λ_n quedan determinados por cada familia de polinomios ortogonales mencionados, de la siguiente manera:

Familia	$\rho(x)$	$K_1P_1(x)$	λ_n
$P_n^{(\alpha, \beta)}$	$1 - x^2$	$\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x$	$n(n + 1 + \alpha + \beta)$
P_n	$1 - x^2$	$-2x$	$n(n + 1)$
T_n	$1 - x^2$	$-x$	n^2
U_n	$1 - x^2$	$-3x$	$n(n + 2)$
$C_n^{(\alpha)}$	$1 - x^2$	$-(2\alpha + 1)x$	$n(n + 1 + 2\alpha)$
$L_n^{(\alpha)}$	x	$\alpha + 1 - x$	n
L_n	x	$1 - x$	n
H_n	1	$-2x$	$2n$

A continuación, se detallarán algunos resultados del estudio de los polinomios ortogonales vistos desde una perspectiva galoisiana.

Proposición 4.1

Sea P_n un polinomio ortogonal, entonces para el cuerpo de descomposición del polinomio $P_n(x)$ sobre \mathbb{R} , sea $\mathbb{R}\{P_n(x)\}$, se tiene que $\mathbb{R}\{P_n(x)\} = \mathbb{R}$, donde \mathbb{R} denota el conjunto de los números reales.

Demostración

Se ha mostrado que las raíces de cualquier polinomio ortogonal son reales y distintas. Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ las n raíces distintas del polinomio ortogonal P_n , entonces:

$$\mathbb{R}\{P_n\} = \mathbb{R}[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$$

Si tomamos el dominio de integridad $\mathbb{R}[\alpha_1]$, por definición tenemos que:

$$\mathbb{R}[\alpha_1] = \{f(\alpha_1)/f(x) \in \mathbb{R}[x]\}$$

Evidentemente, $f(\alpha_1) \in \mathbb{R}$. De este modo, el cuerpo $\mathbb{R}[\alpha_1, \dots, \alpha_n] = \mathbb{R}$:

Observación 4.1

De la anterior proposición se puede concluir que es posible tomar como extensión de los reales, el cuerpo de descomposición de cualquier polinomio ortogonal; es decir, $L = \mathbb{R}\{P_n\}$, el grupo de Galois de la extensión $G(L \setminus \mathbb{R}) = \{Id : Id(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}\}$.

Proposición 4.2

Consideremos los polinomios $\rho(x)$, $K_1 P_1(x)$ y el parámetro λ_n de la tabla anterior, entonces la ecuación diferencial tipo Riccati para cualquier μ

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\lambda_n}{\mu} + \frac{\rho' - K_1 P_1}{\rho} v + \frac{\mu}{\rho} v^2$$

se puede transformar en la ecuación tipo hipergeométrica:

$$\rho(x)y'' + K_1 P_1 y' + \lambda_n y = 0$$

Demostración

Haciendo el cambio de variable $w = \mu v$

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dx} &= \mu \frac{dv}{dx} \\ &= \lambda_n + \frac{\rho' - k_1 P_1}{\rho} \mu v + \frac{1}{\rho} \mu^2 v^2 \\ &= \lambda_n + \frac{\rho' - k_1 P_1}{\rho} w + \frac{1}{\rho} w^2 \end{aligned}$$

obtenemos la ecuación diferencial:

$$\frac{dw}{dx} = \lambda_n + \frac{\rho' - k_1 P_1}{\rho} w + \frac{1}{\rho} w^2$$

Sobre esta ecuación se hace la transformación $w = -\rho \frac{y'}{y}$, entonces:

$$y \frac{dw}{dx} + w \frac{dy}{dx} = -\rho' y' - \rho y'' \quad (4.3)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} y \frac{dw}{dx} + w \frac{dy}{dx} &= y \left[\lambda_n - \frac{\rho' - K_1 P_1}{\rho} \left(\rho \frac{y'}{y} \right) + \frac{1}{\rho} \left(\rho \frac{y'}{y} \right)^2 + \right] + \left(\rho \frac{y'}{y} \right) y' \\ &= y \lambda_n - \rho' y' + K_1 P_1 y' \end{aligned}$$

es decir,

$$y \frac{dw}{dx} + w \frac{dy}{dx} = y\lambda_n - \rho'y' + K_1 P_1 y' \quad (4.4)$$

Ahora, igualando (4.3) y (4.4):

$$y\lambda_n - \rho'y' + K_1 P_1 y' = -\rho'y' - \rho y''$$

$$\rho y'' + K_1 P_1 y' + \lambda_n y = 0$$

De este modo, podemos asociar un sistema polinomial en el plano a cada familia de polinomios ortogonales clásicos, así:

Familia	\dot{v}	\dot{x}
$P_n^{(\alpha,\beta)}$	$\frac{\lambda_n}{\mu}(1-x^2) + (\alpha - \beta + (\alpha + \beta)x)v + \mu v^2$	$1-x^2$
P_n	$\frac{\lambda_n}{\mu}(1-x^2) + \mu v^2$	$1-x^2$
T_n	$\frac{\lambda_n}{\mu}(1-x^2) - xv + \mu v^2$	$1-x^2$
U_n	$\frac{\lambda_n}{\mu}(1-x^2) + xv + \mu v^2$	$1-x^2$
$C_n^{(\alpha)}$	$\frac{\lambda_n}{\mu}(1-x^2) + (2\alpha - 1)xv + \mu v^2$	$1-x^2$
$L_n^{(\alpha)}$	$\frac{\lambda_n}{\mu}x + (-\alpha + x)v + \mu v^2$	x
L_n	$\frac{\lambda_n}{\mu}x + xv + \mu v^2$	x
H_n	$\frac{\lambda_n}{\mu} + 2xv + \mu v^2$	1

Proposición 4.3

Sean $\rho(x)$, $K_1P_1(x)$ y λ_n como en la proposición anterior, entonces para cualquier $\mu \neq 0$, el campo vectorial polinomial cuadrático

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\lambda_n}{\mu} \rho + (\rho' - K_1P_1)v + \mu v^2$$

$$\frac{dx}{dt} = \rho$$

tiene una curva algebraica invariante de la forma $\mu v P_n(x) + \rho(x) P'_n(x) = 0$, donde P_n es cualquier polinomio ortogonal clásico asociado a $\rho(x)$, $K_1P_1(x)$ y λ_n

La ecuación diferencial asociada al sistema en la *Proposición 4.3* es:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\lambda_n}{\mu} + \frac{\rho' - K_1P_1}{\rho} v + \frac{\mu}{\rho} v^2$$

la cual, según la proposición anterior, se puede transformar en la ecuación de forma hipergeométrica:

$$\rho(x)y'' + K_1P_1y' + \lambda_n y = 0$$

y esta última, para cada n , tiene como solución $y_n = P_n$ algún polinomio ortogonal clásico asociado a las funciones $\rho(x)$, $K_1P_1(x)$ y el parámetro λ_n ; tal como se demostró en el capítulo 3.

$$\rho(x)P''_n + K_1P_1P'_n + \lambda_n P_n = 0$$

Sea X el campo vectorial asociado al sistema en la *Proposición 4.3*. Ahora, para un n fijo, consideremos el polinomio $f(v, x) = \mu v P_n(x) + \rho P'_n(x)$ y mostremos que es irreducible y satisface $Xf = Kf$, donde K es llamado el cofactor de la curva invariante $f = 0$.

Sabemos que $P_n(x)$ y $P'_n(x)$ no tienen factores comunes porque todas las raíces de los polinomios ortogonales son simples. Además, para cada $\rho(x)$ definida para cada familia de polinomios ortogonales clásicos, se tiene que $\rho(x)$ y $P_n(x)$ no comparten raíces, pues las raíces de los polinomios ortogonales permanecen en el interior del intervalo (a, b) . De hecho:

- En los polinomios de Jacobi, $\rho(x) = 1 - x^2$, cuyas raíces no se encuentran en el intervalo $(-1, 1)$.
- En los polinomios de Laguerre, $\rho(x) = x$, cuya raíz no se encuentra en el intervalo $(0, \infty)$.
- En los polinomios de Hermite, $\rho(x) = 1$

con lo cual, el polinomio $f(v, x) = \mu v P_n(x) + \rho P'_n(x)$ es irreducible.

Por otro lado, usando el campo diferencial asociado al sistema en la *Proposición 4.3*:

$$\begin{aligned}
 Xf &= \left(\frac{\lambda_n}{\mu} \rho + (\rho' - K_1 P_1) v + \mu v^2 \right) \frac{\partial f}{\partial v} + \rho \frac{\partial f}{\partial x} \\
 &= \left(\frac{\lambda_n}{\mu} \rho + (\rho' - K_1 P_1) v + \mu v^2 \right) \mu P_n + \rho (\mu v P'_n + \rho' P'_n + \rho^2 P''_n) \\
 &= \rho' (\mu v P_n + \rho P'_n) + \mu v (\mu v P_n + \rho P'_n) - \mu K_1 P_1 v P_n + \rho (\rho P''_n + \lambda_n P_n) \\
 &= \rho' (\mu v P_n + \rho P'_n) + \mu v (\mu v P_n + \rho P'_n) - \mu K_1 P_1 v P_n - K_1 P_1 \rho P'_n \\
 &= \rho' (\mu v P_n + \rho P'_n) + \mu v (\mu v P_n + \rho P'_n) - K_1 P_1 (\mu v P_n + \rho P'_n) \\
 &= (\rho' + \mu v - K_1 P_1) (\mu v P_n + \rho P'_n) \\
 Xf &= (\rho' + \mu v - K_1 P_1) f
 \end{aligned}$$

Concluyendo, de este modo, que $\mu v P_n(x) + \rho P'_n(x) = 0$ es una curva invariante para el sistema en la *Proposición 4.3*.

Proposición 4.4

El sistema polinomial cuadrático

$$\begin{cases} \dot{v} = \frac{\lambda_n}{\mu} (1 - x^2) + avx + bv + \mu v^2 = P(v, x) \\ \dot{x} = 1 - x^2 \end{cases}$$

tiene una invariante de Darboux de la forma:

$$I(v, x, t) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} e^t$$

Demostración

Las curvas algebraicas:

$$f_1(v, x) = x + 1 = 0 \quad f_2(v, x) = x - 1 = 0$$

son curvas algebraicas invariantes del sistema en la *Proposición 4.4*, con cofactores:

$$K_1(v, x) = 1 - x \quad k_2(v, x) = -1 - x$$

respectivamente.

De hecho, dado que para este sistema el campo vectorial se define como:

$$X = P(v, x) \frac{\partial}{\partial v} + (1 - x^2) \frac{\partial}{\partial x}$$

obtenemos que,

$$X(f_1) = (1 - x)f_1 \quad X(f_2) = (-1 - x)f_2$$

Ahora, utilizamos la proposición del *Teorema 2.1* [14; c. 5, p. 54], escogiendo $s = 1$:

$$\lambda_1 K_1 + \lambda_1 K_1 = -1$$

obteniendo:

$$\lambda_1 = -1/2 \quad \lambda_2 = 1/2$$

De este modo, obtenemos la invariante de Darboux:

$$I(v, x, t) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} e^t$$

Análisis cualitativo

Estudiaremos los retratos de fase sobre el disco de Poincaré de los sistemas polinomiales asociados a los polinomios ortogonales clásicos.

Proposición 4.5

El retrato de fase sobre el disco de Poincaré de cualquier sistema polinomial cuadrático

$$\begin{cases} \dot{v} = \frac{\lambda_n}{\mu}(1-x^2) + avx + \mu v^2 \\ \dot{x} = 1-x^2 \end{cases}$$

con $\mu \neq 0$, $\lambda_n > 0$ y $a \in \mathbb{R}$ es topológicamente equivalente a alguno de los retratos de fase descritos en la Figura 4.1.

Demostración

En el plano finito, los puntos singulares del sistema son:

$$(0,1) \quad (0,-1) \quad (-a/\mu, 1) \quad (a/\mu, -1)$$

con lo cual se presentan dos casos: si $a \neq 0$ existen cuatro puntos singulares y si $a = 0$ solo existen dos puntos singulares.

Caso 1: $\alpha \neq 0$

En el plano finito hay cuatro puntos singulares:

$$DX(v, x) = \begin{bmatrix} ax + 2\mu v & -2\frac{\lambda_n}{\mu}x + av \\ 0 & -2x \end{bmatrix}$$

Al evaluar esta matriz en cada uno de los puntos singulares, obtenemos:

$$DX(0,1) = \begin{bmatrix} a & -2\lambda_n/\mu \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad DX(0,-1) = \begin{bmatrix} -a & 2\lambda_n/\mu \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$DX(-a/\mu, 1) = \begin{bmatrix} -a & -(2\lambda_n + a^2)/\mu \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad DX(a/\mu, -1) = \begin{bmatrix} a & (2\lambda_n - a^2)/\mu \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Por tanto, en el plano finito existen dos puntos silla y dos nodos, uno estable y el otro inestable.

Caso 2: $\alpha = 0$

En el plano finito solo hay dos puntos singulares. La matriz jacobiana del sistema en la *Proposición 4.5* para $\alpha = 0$ es:

$$DX(v, x) = \begin{bmatrix} 2\mu v & -2\frac{\lambda_n}{\mu}x \\ 0 & -2x \end{bmatrix}$$

$$DX(0,1) = \begin{bmatrix} 0 & -2\lambda_n/\mu \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad DX(0,-1) = \begin{bmatrix} 0 & 2\lambda_n/\mu \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Es decir, los puntos singulares $(0,1)$ y $(0,-1)$ son puntos semi-hiperbólicos. Entonces, debemos utilizar el teorema escrito en los preliminares sobre este tipo de puntos para poder analizar su comportamiento en una vecindad del origen. Para ello, debemos trasladar estos puntos al origen del plano de coordenadas y luego, si es necesario, transformar el sistema para reescribirlo en una forma normal (teorema de las formas normales).

Realizamos la siguiente traslación del sistema:

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x - 1 & v &= v \\ \begin{cases} \dot{v} &= \frac{\lambda_n}{\mu}(-2\tilde{x} - \tilde{x}^2) + \mu v^2 \\ \dot{\tilde{x}} &= -2\tilde{x} - \tilde{x}^2 \end{cases} \end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \tilde{x} & \tilde{v} &= v - \frac{\lambda_n}{\mu} \tilde{x} \\ \begin{cases} \dot{\tilde{v}} &= \frac{\lambda_n^2}{\mu} \tilde{x}^2 + 2\lambda \tilde{v} \tilde{x} + \mu \tilde{v}^2 \\ \dot{\tilde{x}} &= -2\tilde{x} - \tilde{x}^2 \end{cases} \end{aligned}$$

Este último sistema es topológicamente equivalente al sistema principal y además cumple con las hipótesis del teorema para puntos semi-hiperbólicos.

Tomamos:

$$A(\tilde{v}, \tilde{x}) = \frac{\lambda_n^2}{\mu} \tilde{x}^2 + 2\lambda \tilde{v} \tilde{x} + \mu \tilde{v}^2$$

y

$$B(\tilde{v}, \tilde{x}) = -\tilde{x}^2$$

entonces,

$$\tilde{x} = f(\tilde{v}) = -\frac{1}{2}\tilde{v}^2 + o(\tilde{v}^2)$$

es la solución de:

$$-2\tilde{x} + B(\tilde{v}, \tilde{x}) = 0$$

en una vecindad del origen.

Luego,

$$g(\tilde{v}) = A(\tilde{v}, f(\tilde{v})) = \mu \tilde{v}^2 + o(\tilde{v}^2)$$

debido a que el término de menor grado de la función $g(\tilde{v})$ es par, se tiene que el punto singular $(0, 1)$ es un punto silla-nodo.

Ahora, para el punto semi-hiperbólico $(0, -1)$ hacemos las transformaciones:

$$v = v, \quad \tilde{x} = x + 1$$

$$\tilde{x} = \tilde{x} \quad \tilde{v} = v - \frac{\lambda_n}{\mu} \tilde{x}$$

y se obtiene, de forma análoga, que $(0, -1)$ es un punto silla-nodo.

Ahora se analizarán los puntos singulares en el infinito, utilizando las transformaciones sobre la esfera de Poincaré.

El flujo definido por el sistema en la *Proposición 4.5*, sobre el ecuador de la esfera de Poincaré, exceptuando $(\pm 1, 0, 0)$, es topológicamente equivalente al flujo definido por el sistema:

$$\begin{cases} \dot{v} = -\lambda_n/\mu + (a+1)v + \mu v^2 + \lambda_n/\mu z^2 - vz^2 \\ \dot{x} = -z^3 + z \end{cases}$$

cuyos puntos singulares a estudiar son:

$$(v_1, 0) = \left(\frac{-(a+1) + \sqrt{(a+1)^2 + 4\lambda_n}}{2\mu}, 0 \right) \quad (v_2, 0) = \left(\frac{-(a+1) - \sqrt{(a+1)^2 + 4\lambda_n}}{2\mu}, 0 \right)$$

$$DX(v, z) = \begin{bmatrix} (a+1) + 2\mu - z^2 - v & 2\frac{\lambda_n}{\mu}z - 2vz \\ 0 & -3z^2 + 1 \end{bmatrix}$$

luego,

$$DX(v_1, 0) = \begin{bmatrix} \sqrt{(a+1)^2 + 4\lambda_n} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad DX(v_2, 0) = \begin{bmatrix} -\sqrt{(a+1)^2 + 4\lambda_n} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

lo cual indica que $(v_1, 0)$ es un nodo inestable y $(v_2, 0)$ es un punto silla.

El flujo definido por el sistema en la *Proposición 4.5*, sobre el ecuador de la esfera de Poincaré, exceptuando $(0, \pm 1, 0)$, es topológicamente equivalente al flujo definido por el sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{\lambda_n}{\mu} xz^2 + \frac{\lambda_n}{\mu} x^3 - \mu x + z^2 - (a+1)x^2 \\ \dot{z} = -\frac{\lambda_n}{\mu} z^3 + \frac{\lambda_n}{\mu} x^2 z - axz - \mu z \end{cases}$$

en el cual solo es necesario estudiar el comportamiento del punto singular, el origen.

$$DX(x, z) = \begin{bmatrix} -\frac{\lambda_n}{\mu} z^2 + 3\frac{\lambda_n}{\mu} x^2 - \mu - 2(a+1)x & -2\frac{\lambda_n}{\mu} xz + 2z \\ 2\frac{\lambda_n}{\mu} xz - az & -3\frac{\lambda_n}{\mu} z^2 + \frac{\lambda_n}{\mu} x^2 - ax - \mu \end{bmatrix}$$

Al evaluar esta matriz en $(0, 0)$:

$$DX(0, 0) = \begin{bmatrix} -\mu & 0 \\ 0 & -\mu \end{bmatrix}$$

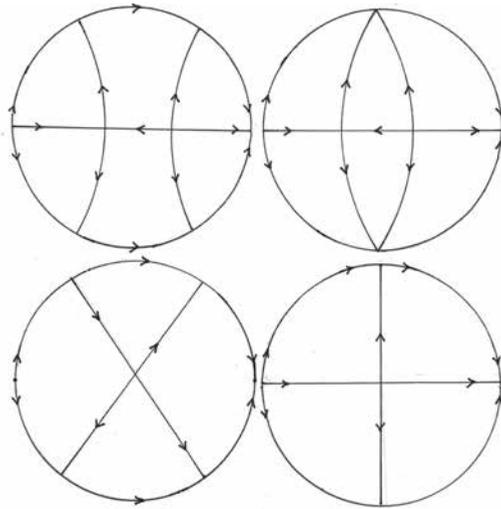
es decir, el origen de este último sistema es un nodo y su estabilidad depende del signo de μ .

Observación: 4.2

En la proposición anterior, para valores específicos del parámetro " a " se obtienen los retratos de fase para los polinomios asociados a los polinomios ortogonales siguientes:

$$\begin{array}{ll}
 a = 0, & P_n \\
 a = -1 & T_n \\
 a = 1 & U_n \\
 a = 2\alpha - 1 & C_n^{(\alpha)}
 \end{array}$$

Figura 4.1. Retratos de fase para 3.20



Fuente: elaboración propia.

Proposición 4.6

El retrato de fase sobre el disco de Poincaré de cualquier sistema polinomial cuadrático

$$\begin{cases}
 \dot{v} = \frac{\lambda_n}{\mu}x + av + bvx + \mu v^2 \\
 \dot{x} = x
 \end{cases}$$

con $\mu \neq 0, \lambda_n > 0$ y $a, b \in \mathbb{R}$ es topológicamente equivalente a alguno de los retratos de fase descritos en la Figura 4.1.

Demostración

En este sistema los puntos singulares en el plano finito tienen la forma $(0, 0)$ y $(-\frac{a}{\mu}, 0)$. Es decir, si $a = 0$ solo existe un punto singular y si $a \neq 0$ hay dos puntos singulares.

La matriz jacobiana del sistema es:

$$DX(v, x) = \begin{bmatrix} a + bx + 2\mu v & \frac{\lambda_n}{\mu}x + bv \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Caso 1: Laguerre asociado $a \neq 0$:

$$DX(0,0) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad DX(-a/\mu, 0) = \begin{bmatrix} -a & -ab/\mu \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Indistinto del signo de a en el plano finito, hay un punto silla y un nodo inestable.

Caso 2: Laguerre $a = 0$:

$$DX(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lo cual indica que el origen es un punto singular semi-hiperbólico.

Realizando las transformaciones:

$$\tilde{v} = v - \frac{\lambda_n}{\mu}x, \quad x = x$$

obtenemos el siguiente sistema, el cual es, topológicamente equivalente al sistema en la *Proposición 4.6*:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{v}} = \frac{\lambda_n(b + \lambda_n)}{\mu} x^2 + (b + 2\lambda_n) \tilde{v} x + \mu v^2 \\ \dot{x} = x \end{cases}$$

Aplicando el teorema para puntos semi-hiperbólicos, tomamos:

$$A(\tilde{v}, x) = \frac{\lambda_n(b + \lambda_n)}{\mu} x^2 + (b + 2\lambda_n) \tilde{v} x + \mu v^2 \quad B(\tilde{v}, 0) = 0$$

Entonces $x = f(\tilde{v}) = 0$ es la solución de la ecuación $x + B(\tilde{v}, 0) = 0$ en una vecindad del origen.

Luego,

$$g(\tilde{v}) = A(\tilde{v}, 0) = \mu \tilde{v}^2 + o(\tilde{v}^2)$$

por tanto, el origen es un silla-nodo.

Ahora se analizarán los puntos singulares en el infinito utilizando las transformaciones sobre la esfera de Poincaré.

El flujo definido por el sistema en la *Proposición 4.6*, sobre el ecuador de la esfera de Poincaré, exceptuando $(\pm 1, 0, 0)$, es topológicamente equivalente al flujo definido por el sistema:

$$\begin{cases} \dot{v} = \frac{\lambda_n}{\mu} z + bv + (a - 1)vz + \mu v^2 \\ \dot{z} = -z^2 \end{cases} \quad (4.5)$$

cuyos puntos singulares son $(0, 0)$ y $(-b/\mu, 0)$. Si $b \neq 0$, existen dos puntos singulares; si $b = 0$, solo hay un punto singular.

La matriz jacobiana asociada a este último sistema es:

$$DX(v, z) = \begin{bmatrix} b + (a - 1)z + 2v\mu & \frac{\lambda_n}{\mu} + (a - 1)v \\ 0 & -2z \end{bmatrix}$$

Caso 1: Laguerre y Laguerre asociado $b \neq 0$:

$$DX(0,0) = \begin{bmatrix} b & \frac{\lambda_n}{\mu} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad DX(-b/\mu, 0) = \begin{bmatrix} -b & \frac{\lambda_n + b(1-a)}{\mu} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Es decir, $(0,0)$ y $(-b/\mu, 0)$ son puntos semi-hiperbólicos.

Para llevar (4.5) a la forma canónica, y así poder aplicar el teorema para puntos semi-hiperbólicos; realizamos las siguientes transformaciones:

$$\tilde{v} = \frac{\lambda_n}{\mu} z + bv \quad z = z$$

obteniendo el siguiente sistema, que es topológicamente equivalente a (4.5):

$$\begin{cases} \dot{\tilde{v}} = b\tilde{v} + \frac{\lambda_n(-a + \lambda_n/b)}{\mu} z^2 + (a - 1 - 2\lambda_n/b)\tilde{v}z + \frac{\mu}{b}\tilde{v}^2 \\ \dot{z} = -z^2 \end{cases}$$

donde,

$$A(\tilde{v}, z) = -z^2 \quad B(\tilde{v}, z) = \frac{\lambda_n(-a + \lambda_n/b)}{\mu} z^2 + (a - 1 - 2\lambda_n/b)\tilde{v}z + \frac{\mu}{b}\tilde{v}^2$$

Sea $\tilde{v} = f(z)$ la solución de la ecuación $b\tilde{v} + B(\tilde{v}, z) = 0$ en una vecindad del origen. entonces:

$$g(z) = A(f(z), z) = -z^2$$

por lo tanto, $(0,0)$ es un silla-nodo.

Para el punto $(-b/\mu, 0)$, realizamos sucesivamente las siguientes transformaciones:

$$\tilde{v} = v + \frac{b}{\mu} \quad z = z$$

$$\bar{v} = \frac{\lambda_n + b(1-a)}{\mu} z - b\tilde{v} \quad z = z$$

obteniendo el sistema topológicamente equivalente a (4.5):

$$\begin{cases} \dot{\bar{v}} = -b\bar{v} + B(\bar{v}, z) \\ \dot{z} = -z^2 \end{cases}$$

donde:

$$B(0,0) = DB(0,0) = 0$$

y

$$A(\bar{v}, z) = -z^2$$

Sea $\bar{v} = f(z)$ la solución de la ecuación $-b\bar{v} + B(\bar{v}, z) = 0$ en una vecindad del origen de este último sistema, entonces:

$$g(z) = A(f(z), z) = -z^2$$

por lo tanto, el punto $(-b/\mu, 0)$ es un punto silla-nodo.

Caso 2: $b = 0$:

$$DX(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & \lambda_n \\ 0 & \mu \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

es decir, el origen es un punto singular nilpotente para este sistema.

Realizamos la transformación:

$$\tilde{v} = \frac{\mu}{\lambda_n} v \quad z = z$$

obteniendo el sistema topológicamente equivalente al sistema (4.5):

$$\begin{cases} \dot{\tilde{v}} = z + (a - 1) \tilde{v} z + \lambda_n \tilde{v}^2 \\ \dot{z} = -z^2 \end{cases}$$

Este último sistema cumple las condiciones del teorema para puntos singulares nilpotentes, donde;

$$A(\tilde{v}, z) = (a - 1) \tilde{v} z + \lambda_n \tilde{v}^2 \quad B(\tilde{v}, z) = -z^2$$

por otro lado, $z = f(\tilde{v}) = (1 - \lambda_n - a) \tilde{v}^2 + o(\tilde{v}^2)$ es la solución de la ecuación:

$$z + A(\tilde{v}, z) = 0$$

en una vecindad del origen de este último sistema.

Luego,

$$F(\tilde{v}) = B(\tilde{v}, f(\tilde{v})) = -(1 - \lambda_n - a)^2 \tilde{v}^4 + o(\tilde{v}^4)$$

$$G(\tilde{v}) = \left(\frac{\partial A}{\partial \tilde{v}} + \frac{\partial B}{\partial z} \right) (\tilde{v}, f(\tilde{v})) = 2\lambda_n \tilde{v} + o(\tilde{v})$$

Evidentemente, en este caso $m = 4$ y $n = 1$. Como m es par y $m > 2n + 1$, el origen es un silla-nodo.

El flujo definido por el sistema de estudio, sobre el ecuador de la esfera de Poincaré, exceptuando $(0, \pm 1, 0)$, es topológicamente equivalente al flujo definido por el sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = (1-a)xz - \frac{\lambda_n}{\mu}x^2z - bx^2 - \mu x \\ \dot{z} = -\frac{\lambda_n}{\mu}xz^2 - az^2 - xz - \mu z \end{cases}$$

En el cual solo es necesario estudiar el comportamiento del punto singular, el origen.

$$DX(x, z) = \begin{bmatrix} (1-a)z - 2\frac{\lambda_n}{\mu}xz - 2bx - \mu & (1-a)x - \frac{\lambda_n}{\mu}x^2 \\ -\frac{\lambda_n}{\mu}z^2 - z & -2\frac{\lambda_n}{\mu}xz - 2az - x - \mu \end{bmatrix}$$

Al evaluar esta matriz en $(0, 0)$:

$$DX(0,0) = \begin{bmatrix} -\mu & 0 \\ 0 & -\mu \end{bmatrix}$$

es decir, el origen de este último sistema es un nodo y su estabilidad depende del signo de μ .

Proposición 4.7

En la proposición anterior, para valores específicos del parámetro a y b se obtienen los retratos de fase para los sistemas polinomiales asociados a los polinomios ortogonales siguientes:

$$\begin{array}{lll} a = 0, & b = 1 & L_n \\ a = -\alpha, & b = 1 & L_n^{(\alpha)} \end{array}$$

Análisis galoisiano

Proposición 4.8

Para la ecuación diferencial de Chebyshev

$$y'' - \frac{x}{1-x^2} y' + \frac{\lambda_n}{1-x^2} y = 0 \quad (4.6)$$

donde $\lambda_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$, se cumple lo siguiente:

$DG\left(\frac{L}{K}\right)$ de la ecuación de Chebyshev es isomorfo a \mathbb{Z}_2 , donde $K = \mathbb{C}(x)$

Las integrales primeras de los campos

$$\begin{cases} \dot{w} = -2 - 4\lambda_n + (4\lambda_n - 1)x^2 - 4(1-x^2)^2 w^2 \\ \dot{x} = 4(1-x^2)^2 \end{cases} \quad (4.7)$$

y

$$\begin{cases} \dot{v} = \frac{\lambda_n}{\mu}(1-x^2) - xv + \mu v^2 \\ \dot{x} = 1-x^2 \end{cases} \quad (4.8)$$

asociadas a la ecuación de Chebyshev, son

$$I(w, z) = \frac{-w + \frac{U_{n-1}'}{U_{n-1}} - \frac{3x}{2(1-x^2)}}{-w + \frac{T_n'}{T_n} - \frac{x}{2(1-x^2)}} \cdot \frac{U_{n-1}}{T_n} \sqrt{1-x^2}$$

$$I(v, z) = \frac{U_{n-1}'(1-x^2) + U_{n-1}(\mu v - x)}{T_n'(1-x^2) + \mu T_n v x} \cdot \sqrt{1-x^2}$$

Demostración

Es bien sabido que $y_1 = T_n$ y $y_2 = U_{n-1}\sqrt{1-x^2}$ son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación (4.6). Si tomamos el cuerpo diferencial $K = \mathbb{C}(x)$ de todas las funciones racionales de variable x y

consideramos la extensión del cuerpo $L = K[\sqrt{1-x^2}]$, para calcular el grupo de Galois diferencial de la ecuación (4.6) se deben calcular todos los automorfismos diferenciales en la extensión L . Es decir, encontrar una matriz:

$$A_\phi = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

tal que:

$$\phi \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = A_\phi \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Por operaciones matriciales tenemos:

$$\phi(y_1) = ay_1 + by_2 \quad \phi(y_2) = cy_1 + dy_2$$

Por otro lado, debido a que $y_1, y_2 \in \mathbb{C}(x)$ y ϕ es un automorfismo, obtenemos:

$$\phi(y_1) = y_1 \quad \phi(y_2) = cy_2$$

donde $c^2 = 1$. Entonces, podemos concluir que:

$$A_\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

Por tanto,

$$Dgal(L/K) \cong \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\} \cong \mathbb{Z}_2$$

Si en la ecuación diferencial de Chebyshev consideramos $b_1(x) = \frac{-x}{1-x^2}$ y $b_0(x) = \frac{\lambda_n}{1-x^2}$,

la transformación:

$$y = ze^{-\frac{1}{2}\int b_1(x)dx}$$

nos permite obtener la ecuación reducida de segundo grado:

$$z'' = \left(\frac{-2 - x^2 - 4\lambda_n(1 - x^2)}{4(1 - x^2)^2} \right) z \quad (4.9)$$

con

$$z = y(1 - x^2)^{\frac{1}{4}}$$

esto resulta después de aplicar la **Proposición 1** del artículo *On The Integrability Of Polynomial Vector Fields In The Plane By Means Of Picard-Vessiot Theory*.

Debido a que $y_1 = T_n$ y $y_2 = U_{n-1}$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación de Chebyshev, entonces:

$$z_1 = T_n(1 - x^2)^{\frac{1}{4}} \quad z_2 = U_{n-1}(1 - x^2)^{\frac{3}{4}}$$

son soluciones linealmente independientes de la ecuación de segundo grado reducida (4.9). Por otro lado, la ecuación diferencial asociada al sistema (4.8) tiene la forma:

$$w' = \frac{-2 - 4\lambda_n + (-1 + 4\lambda_n)x^2}{4(1 - x^2)^2} - w^2$$

que al aplicar la transformación $w = \frac{z'}{z} w = \frac{z'}{z}$, es equivalente a la ecuación (4.9), con lo cual las soluciones de esta última vienen dadas por:

$$w_1 = \frac{z'_1}{z_1} = (\ln z_1)' = \frac{T'_n}{T_n} - \frac{x}{2(1 - x^2)}$$

$$w_2 = \frac{z'_2}{z_2} = (\ln z_2)' = \frac{U'_{n-1}}{U_{n-1}} - \frac{3x}{2(1 - x^2)}$$

Entonces, aplicando el **Lema 1** del artículo *Darboux Integrals for Schrödinger Planar Vector Fields via Darboux Transformations*, obtenemos que la integral primera del sistema (4.8) tiene la forma:

$$I(w, x) = \frac{-w(x) + w_2(x)}{-w(x) + w_1(x)} \cdot e^{\int (w_2(x) - w_1(x)) dx}$$

entonces,

$$I(w, x) = \frac{-w + \frac{U_{n-1}'}{U_{n-1}} - \frac{3x}{2(1-x^2)}}{-w + \frac{T_n'}{T_n} - \frac{x}{2(1-x^2)}} \cdot \frac{U_{n-1}}{T_n} \sqrt{1-x^2}$$

Ahora, para encontrar la integral primera del sistema (4.7), se debe notar que la foliación del sistema (4.8) es:

$$v' = \frac{\lambda_n}{\mu} - \frac{x}{1-x^2} v + \frac{\mu}{1-x^2} v^2$$

$$w' = \frac{-2 - 4\lambda_n + (4\lambda_n - 1)x^2}{4(1-x^2)^2} - w^2$$

la cual se relaciona a través de la transformación:

$$w = -\frac{x}{2(1-x^2)} - \frac{\mu v}{1-x^2}$$

Por tanto, reemplazando se obtiene:

$$I(v, x) = \frac{\frac{x}{2(1-x^2)} + \frac{\mu v}{1-x^2} + \frac{U_{n-1}'}{U_{n-1}} - \frac{3x}{2(1-x^2)}}{\frac{x}{2(1-x^2)} + \frac{\mu v}{1-x^2} + \frac{T_n'}{T_n} - \frac{x}{2(1-x^2)}} \cdot \frac{U_{n-1}}{T_n} \sqrt{1-x^2}$$

luego de simplificar se obtiene la integral primera.

Bibliografía

- [1] P. B. Acosta-Humánez y Ch. Pantazi, "Darboux Integrals for Schrödinger Planar Vector Fields via Darboux Transformations", *SIGMA. Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, vol. 8, 2012.
- [2] P. B. Acosta-Humánez, J. A. Charris y B. Aldana Gómez, *Algebra. Fundamentos, Grupos, Anillos, Cuerpos y Teoría de Galois*. Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 2013.
- [3] P. B. Acosta-Humánez, J. T. Lázaro, J. Morales-Ruiz y Ch. Pantazi, "On the integrability of polynomial vector fields in the plane by means of Picard-Vessiot theory", *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, vol. 35, no. 5, pp. 1767-1800, 2015.
- [4] P. B. Acosta-Humánez, *Galoisian Approach to Supersymmetric Quantum Mechanics: The integrability analysis of the Schrödinger equation by means of differential Galois theory*. VDM Publishing, 2010.
- [5] P. B. Acosta-Humánez, "La teoría de Morales-Ramis y el algoritmo de Kovacic", *Lecturas Matemáticas*, vol. 2., pp. 21-56, 2006.
- [6] P. B. Acosta-Humánez y J. H. Pérez, "Teoría de Galois diferencial: una aproximación", *Mat. Ensen. Univ.*, vol. 15, pp. 91-102, 2007.
- [7] P. Acosta-Humánez y J. H. Pérez, "Una introducción a la teoría de Galois diferencial", *Bol. Mat.*, vol. 11, pp. 138-149, 2010.
- [8] J. Claramunt Carós, "Differential Galois theory: groups of symmetries in differential equations", proyecto final de grado, 2014.
- [9] T. S. Chihara, *An introduction to orthogonal polynomials*. Courier Corporation, 2011.
- [10] J. Guckenheimer, K. Hoffman y W. Weckesser, "The forced Van der Pol equation I: The slow flow and its bifurcations", *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, vol. 2, no. 1, pp. 1-35, 2003.
- [11] F. Dumortier, J. Llibre y J. C. Artés, *Qualitative theory of planar differential systems* (pp. xvi+-298). Springer, 2006.
- [12] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*, tercera edición. Springer-Verlag New York, 2001.

- [13] P. Acosta-Humánez, “Notas del primer seminario de integrabilidad de la Universitat Politècnica de Catalunya”. *Primer Seminario de Integrabilidad de la Universitat Politècnica de Catalunya*, 2008.

Capítulo 5

Bifurcaciones transcriticals de una familia cuadrática multiparamétrica

Jorge Rodríguez Contreras^{1,2}

Alberto Reyes Linero³

Bladimir Blanco Montes⁴

Luz A. Rodríguez Paba⁵

Resumen

El objetivo principal de este trabajo es proponer el estudio de las bifurcaciones transcriticals de una familia cuadrática multiparamétrica asociada al siguiente sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= (\alpha x^{m+k-1} + \beta x^{m-k-1})y - \gamma x^{2m-2k-1} \end{cases}$$

Con $\alpha = a(2m + k)$, $\beta = b(2m - k)$ y $\gamma = (a^2 m x^{4k} + c x^{2k} + b^2 m)$.

1 Departamento de Matemática y Estadística Universidad del Norte, Barranquilla, Colombia. Correo electrónico: jrodri@uninorte.edu.co.

2 Programa de Matemáticas, Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia. Correo electrónico: jorgelrodriguez@mail.uniatlantico.edu.co.

3 Programa de Matemáticas, Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia. Correo electrónico: areyeslinero@mail.uniatlantico.edu.co

4 Programa de Matemáticas, Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia.

5 Programa de Física, Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia.

(Véanse [1], [2], [3] para estudios previos de esta familia).

Inicialmente, se hace una investigación sobre las familias cuadráticas multiparamétricas equivalentemente afines al sistema diferencial polinomial. Luego, se hace un estudio de cada familia en el plano finito, aplicando tópicos de la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales (véanse [4], [7], [8], [9], [10]), para hallar sus puntos críticos, analizar su estabilidad y luego observar las bifurcaciones (véanse [4], [5]) presentes en una familia cuadrática multiparamétrica.

Después, se hace un estudio en el plano infinito utilizando la compactificación de Poincaré en cada familia dada por medio de cartas, con base en la proyección estereográfica de la esfera en el plano. Así, es posible observar un mejor enfoque al estudiar el comportamiento de las trayectorias cercanas al infinito usando la llamada esfera de Poincaré.

Por último, se usan programas como *P4* para ilustrar el comportamiento de cada familia en el plano infinito por medio del disco de Poincaré. Además, se utiliza el software *GeoGebra* para analizar de manera detallada las bifurcaciones presentes en una familia cuadrática multiparamétrica.

Introducción

El conocimiento y crecimiento de las ecuaciones diferenciales en el mundo surgieron de la misma forma en que se plantearon otras ramas de la matemática, a través de la necesidad que tenía el ser humano de resolver problemas físicos y matemáticos de acuerdo con sus investigaciones ya obtenidas. De aquí nace una nueva rama de la matemática que hoy en día es muy importante, las ecuaciones diferenciales.

A finales del siglo XVII, Isaac Newton, Gottfried Leibniz y los hermanos Jacob y Johann Bernoulli dieron paso a las ecuaciones diferenciales. Estas se utilizaron en la solución de problemas tanto geométricos como físicos. Posteriormente, Newton vio muy útil el uso de las ecuaciones diferenciales para la soluciones de varios problemas que anteriormente no se podían solucionar. Sin embargo, el éxito de las ecuaciones diferenciales se debe en primer lugar a Henri Poincaré, quien introduce un enfoque cualitativo y desarrolla una serie de nuevas técnicas, expuestas en el *Analysis Situs*, un apéndice de *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, de donde se originan la geometría y la topología modernas.

Los sistemas dinámicos son un área “joven” de las matemáticas, aunque se remontan a Newton, con sus estudios sobre mecánica celeste, y a Poincaré, quien inició el estudio cualitativo de las ecuaciones diferenciales.

En este contexto, Poincaré concebía un sistema dinámico como un campo de vectores en el espacio fase y una solución como una curva tangente en cada punto a los vectores de dicho campo. Su mayor interés, que por aquel entonces eran los problemas de la mecánica celeste, lo llevó a enfocarse en la descripción del retrato fase, es decir, de todo el conjunto de soluciones, así como en la estabilidad de las soluciones, que para él consistían en el análisis cualitativo de los resultados.

Hoy, más de cien años después de la muerte de Poincaré, los sistemas dinámicos son una de las ramas de mayor actividad en el mundo de las matemáticas. Por sus diferentes caminos han transitado ilustres matemáticos tales como S. Smale, Sinai, A. Douady, M. Herman, D. Sullivan, Andronov, Birkhoff, Kolmogorov, Liapunov, Lorenz, Moser, V. I. Arnold, por mencionar solo algunos, quienes han nutrido con inmortales resultados a los sistemas dinámicos. Hoy en día, estos sistemas pueden explicar un sinnúmero de fenómenos en diversas áreas del conocimiento —y, desde luego, un gran número de problemas matemáticos—, desde el movimiento de un péndulo simple hasta el movimiento planetario.

Actualmente hay una “explosión” de esta área de estudio a nivel mundial en muchos contextos diferentes. Una característica fascinante de los sistemas dinámicos es la profunda interacción que tienen con otras áreas de las matemáticas y del conocimiento, como la física, la química, la biología y la economía.

Para precisar el concepto de sistemas dinámicos, podemos decir que son el estudio de fenómenos deterministas, es decir, todo lo que se mueve, todos los fenómenos en los que hay alguna magnitud que evoluciona con el tiempo. En términos matemáticos, un sistema dinámico es un par (M, F) , donde M representa el contexto espacio temporal, es decir, el ambiente del sistema. Este se conoce como espacio de estados o espacio de fases. Por su parte, F es una aplicación del espacio de estados en el mismo, denominada también ley de evolución del sistema o ley de transición estados. El conjunto M es generalmente un variedad diferenciable (una superficie suave localmente).

Si queremos ser formales, podemos decir que un sistema dinámico es una familia infinita de funciones (homeomorfismos locales) de un espa-

cio (métrico) en sí mismo, cerrada bajo composiciones, siempre que estas tengan sentido.

Como se mencionó antes, Poincaré dio inicio a la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales, proponiendo la descripción del retrato de fase de una ecuación diferencial, la cual es una herramienta valiosa en el estudio de las ecuaciones. La configuración de las curvas en el espacio de fase revela información sobre la existencia de atractores, repulsores y ciclos límite.

Además, Poincaré desarrolla un concepto teórico muy importante, el mapeo de retorno o el Teorema de la Región Anular, el cual se transformó en 1901 en el famoso Teorema de Poincaré-Bendixson gracias a la contribución del matemático Ivar Otto Bendixson.

Así, las soluciones en las cuales estamos realmente interesados son aquellas que llamamos singulares (asociadas a puntos críticos, órbitas periódicas), pues bajo condiciones de compatibilidad, cualquier otra solución tiende hacia un conjunto de curvas singulares, llamadas conjunto límite. Por lo tanto, el retrato fase se determina por el carácter y la configuración de las soluciones singulares.

Después de haberse establecido una teoría para el análisis cualitativo de los sistemas lineales de ecuaciones diferenciales, se demostró que esta se podía aplicar a los sistemas no lineales. Los sistemas cuadráticos son uno de los más simples ejemplos de ecuaciones diferenciales no lineales y también presentan la mayoría de las dificultades de los sistemas no lineales en general. Solo hasta 1987 se logró demostrar que, dado un sistema cuadrático, este tiene un número finito de ciclos límite.

El estudio de la teoría cualitativa es de vital importancia para los sistemas dinámicos, puesto que brinda una visualización del comportamiento de ciertas curvas alrededor de diversos puntos críticos del sistema, además permite modelar fenómenos de la naturaleza.

Preliminares

En esta primera parte se describen los preliminares que a nuestra consideración son necesarios para que cualquier lector pueda entender de mejor manera todas las secciones que conforman el presente trabajo de investigación.

Definición: Un sistema polinomial en el plano de grado n está dado por:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x,y) \\ \dot{y} &= Q(x,y)\end{aligned}$$

donde $P, Q \in \mathbb{C}[x,y]$ (conjunto de los polinomios en dos variables) y n es el grado absoluto de los polinomios P y Q .

Definición: El campo vectorial polinomial asociado al sistema está dado por $X := (P, Q)$, el cual también se puede escribir como:

$$X = P(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$$

Definición: Una foliación de un campo vectorial polinomial está dada por:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)}$$

Definición: Dado el sistema inicial, el punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ es un punto crítico del sistema si $P(x_0, y_0) = 0$ y $Q(x_0, y_0) = 0$. Además, en ellos la solución del sistema es constante.

Definición: Un sistema no lineal es de la forma:

$$\dot{x} = f(x)$$

donde $f: E \rightarrow \mathbb{R}^n$ y E es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n .

Definición: Un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ es un punto crítico del sistema no lineal si $f(x_0) = 0$. Un punto crítico x_0 es hiperbólico si ninguno de los valores propios de la matriz $Df(x_0)$ tiene parte real cero. El sistema no lineal con la matriz $A = Df(x_0)$ se denomina la linealización del sistema en x_0 .

Teoremas para la singularidad en el plano finito

Teorema de los puntos singulares hiperbólicos.

Sea $(0,0)$ una singularidad aislada del campo vectorial:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by + A(x, y) \\ \dot{y} = cx + dy + B(x, y) \end{cases}$$

donde F y G son analíticas en una vecindad del origen y tienen expansiones en series que comienzan con términos de grado dos en x e y . Decimos que $(0,0)$ es una singularidad no degenerada si $ad - bc \neq 0$. Sean λ_1 y λ_2 los valores propios de $DX(0,0)$, entonces:

- Si λ_1 y λ_2 son reales y $\lambda_1\lambda_2 < 0$, entonces $(0,0)$ es punto silla, cuyas separatrices tienden a $(0,0)$ en las direcciones dadas por los vectores propios asociados con λ_1 y λ_2 .
- Si λ_1 y λ_2 son reales y $\lambda_1\lambda_2 > 0$, entonces $(0,0)$ es un nodo. Si $\lambda_1 > 0$ ($\lambda_1 < 0$), entonces es inestable (estable).
- Si $\lambda_1 = \alpha + \beta_i$ y $\lambda_2 = \alpha - \beta_i$ con $\alpha, \beta \neq 0$, entonces $(0,0)$ es un foco. Si $\alpha > 0$ o ($\alpha < 0$), entonces es inestable (estable).
- Si $\lambda_1 = \beta_i$ y $\lambda_2 = -\beta_i$, entonces $(0,0)$ es un centro lineal, topológicamente un foco o un centro.

Para un estudio más detallado de la temática, véase [10, p. 71].

Teorema de los puntos singulares nilpotentes.

Sea $(0,0)$ una singularidad aislada del sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + A(x, y) \\ \dot{y} = B(x, y) \end{cases}$$

donde X e Y son analíticas en una vecindad del origen y tienen expansiones que comienzan con términos de segundo grado en x e y . Sea $y = f(x) = a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$ una solución de la ecuación $y + A(x, y) = 0$ en una vecindad de $(0,0)$, y supongamos que tiene la siguiente expansión de serie de la función $F(x) = B(x, f(x)) = ax^m(1 + \dots)$ y

$G(x) = \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y}\right)(x, f(x)) = bx^n(1 + \dots)$, donde $a \neq 0$, $m \geq 2$, $n \geq 1$, entonces:

- Si $F(x) \equiv G(x) \equiv 0$, entonces el retrato de fase de X está dado por la Fig. 2.2 del teorema en [9, p. 116] (a).
- Si $F(x) \equiv 0$ y $G(x) = bx^n + \dots$ para $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$ y $b \neq 0$, entonces el retrato de fase de X está dado por la Fig. 2.2 del teorema en [9, p. 116] (b o c).
- Si $G(x) \equiv 0$ y $F(x) = ax^m \dots$ para $m \in \mathbb{N}$ con $m \geq 1$ y $a \neq 0$:
 - i. Si m es impar y $a > 0$, entonces el origen de X es una silla como en la Fig. 2.2 del teorema en [9, p. 116] (d) y si $a < 0$, entonces es un centro o un foco como en la Fig. 2.2 del teorema en [9, p. 116] (e-g).
 - ii. Si m es par, entonces el origen de X es una cúspide como en la Fig. 2.2 del teorema en [9, p. 116] (h).
- Si $F(x) = ax^m + \dots$ y $G(x) = bx^n + \dots$ con $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $a \neq 0$ y $b \neq 0$:
 - i) Si m es par y
 - i.a) $m < 2n + 1$, entonces el origen de X es una cúspide como en la Fig. 2.2 del teorema en [9, p. 116] (h).
 - i.b) $m > 2n + 1$, entonces el origen de X es un nodo-silla como en la Fig. 2.2 del teorema en [9, p. 116] (i o j).
 - ii) Si m es impar y $a > 0$, entonces el origen de X es una silla como en la Fig. 2.2 del teorema en [9, p. 116] (d).
 - iii) Si m es impar, $a < 0$ y
 - iii.a) $m < 2n + 1$, o $m = 2n + 1$ y $b^2 + 4a(n + 1) < 0$, entonces el origen de X es un centro o un foco como en la Fig. 2.2 del teorema en [9, p. 116] (e-g).
 - iii.b) n es impar y $m > 2n + 1$ o $m = 2n + 1$ y $b^2 + 4a(n + 1) \geq 0$, entonces el origen de X consiste en

un sector hiperbólico y un sector elíptico como en la Fig. 2.2 del teorema en [9, p. 116] (k).

iii.c) n es par y $m > 2n + 1$ o $m = 2n + 1$ y

$b^2 + 4a(n + 1) \geq 0$, entonces el origen de X es un nodo, atractor si $b < 0$ o repulsor si $b > 0$ como en la Fig. 2.2 del teorema en [9, p. 116] (l y m).

Para un estudio más detallado de la temática, véase [9, p. 116].

Teorema de la variedad estable.

El *Teorema de la variedad estable* es uno de los resultados más importantes en la teoría cualitativa local de las E.D.O. Este teorema muestra que, cerca de un punto de equilibrio hiperbólico x_0 , el sistema no lineal tiene una variedad estable e inestable S y U tangente a x_0 .

Sea E un subconjunto de \mathbb{R}^n conteniendo el origen, sea $f \in C^1(E)$ y sea ϕ_t el flujo del sistema no lineal. Suponga que $f(0) = 0$ y que $Df(0)$ tiene k valores propios con parte real negativa y $n - k$ valores propios con parte real positiva. Entonces, existe una variedad k -dimensional S tangente al subespacio estable E^s del sistema $\dot{x} = Ax$ en 0 tal que para todo $t \geq 0$, $\phi_t(S) \subset S$ y para todo $x_0 \in S$.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x_0) = 0;$$

y existe una variedad $n - k$ dimensional diferenciable tangente al subespacio inestable E^u de $\dot{x} = Ax$ en 0 tal que para todo $t \leq 0$, $\phi_t(U) \subset U$ y para todo $x_0 \in U$.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x_0) = 0$$

Para un estudio más detallado de la temática, véase [8, p. 105].

Observemos que si $f \in C^1(E)$ y $f(0) = 0$, entonces el sistema puede escribirse como:

$$\dot{x} = Ax + F(x)$$

donde $A = Df(0)$, $F(x) = f(x) - Ax$, $F \in C^1(E)$, $F(0) = 0$ y $DF(0) = 0$. Además, hay una matriz $C_{n \times n}$ invertible tal que:

$$B = C^{-1}AC = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}$$

donde los valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ de la matriz P de $k \times k$ tienen parte real negativa y los valores propios $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n$ de la matriz Q de $(n - k) \times (n - k)$ tienen parte real positiva.

Tomando $y = C^{-1}x$, el sistema entonces tiene la forma:

$$\dot{y} = By + G(y)$$

donde $G(y) = C^{-1}F(Cy)$.

Luego, la solución de la ecuación integral es:

$$u(t, a) = U(t)a + \int_0^t U(t-s)G(u(s, a)) ds - \int_t^\infty V(t-s)G(u(s, a)) ds$$

satisface:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, a) = 0$$

Además, le da un esquema iterativo para computación de la solución:

$$u^{(0)}(t, a) = 0$$

$$u^{(j+1)}(t, a) = U(t)a + \int_0^t U(t-s)G(u^j(s, a)) ds - \int_t^\infty V(t-s)G(u^j(s, a)) ds$$

Para un estudio más detallado de la temática, véanse [7, p. 51] y [9, p. 314].

Bifurcaciones

Anteriormente hemos dado las diferentes definiciones y teoremas para el estudio cualitativo sobre una familia cerca de sus puntos críticos. En caso contrario, es necesario hacer un análisis propio del sistema.

Sea el siguiente sistema, considerando que ahora depende de un parámetro λ , de la forma:

$$\dot{x} = f(x, \lambda)$$

donde f es una función que depende continuamente tanto de x como del parámetro λ . Si un cambio suave en λ produce un cambio cualitativo o topológico en el comportamiento del sistema plano, se dice que ha ocurrido una bifurcación.

Las bifurcaciones pueden clasificarse como locales o globales:

- Una bifurcación local ocurre cuando el cambio en el parámetro causa un cambio en la estabilidad de un punto de equilibrio.
- Es claro que las bifurcaciones locales se presentan cuando el sistema linealizado en una vecindad de un punto crítico tiene valor propio con parte real que pasa por 0. Esto es, una bifurcación local ocurre en (x_0, λ_0) siempre que $Df(x_0, \lambda_0)$ tenga un valor propio con parte real nula. Las bifurcaciones locales pueden determinarse a través del estudio de la estabilidad del sistema.
- En contraste, las bifurcaciones globales no dependen de la estabilidad local pues se rehacen a cambios cualitativos en el comportamiento dentro de conjuntos invariantes más grandes, como lo son los ciclos límite o las trayectorias que se extienden una distancia grande.

Tipos de bifurcaciones.

Existen muchos tipos de bifurcaciones. Sin embargo, no todos están clasificados. En general, las bifurcaciones se clasifican por el cambio de estabilidad en puntos de equilibrio hiperbólicos, en los ciclos límite hiperbólicos o cambios en ambas variantes al tiempo debidos a la modificación de un parámetro.

Bifurcaciones de codimensión uno: Estas bifurcaciones requieren de la variación de un solo parámetro para darse en el sistema. Todas presentan una forma normal, es decir, un sistema topológicamente equivalente, ya sea local o global al sistema inicial. Para obtener la forma normal de cada una, en la teoría se realizan cambios de variable topológicamente equivalentes específicos en cada caso. En este trabajo solo se mostrará la forma normal.

Bifurcación transcrita: En una bifurcación transcrita, un punto crítico existe para todo valor del parámetro λ , pero intercambia su estabilidad con otro punto crítico luego de la “colisión” entre ellos.

Bifurcación silla-foco-silla: Estas bifurcaciones ocurren cuando hay un cambio de parámetro en el que dos puntos críticos, una silla, colapsan en un foco y posteriormente recuperan su estabilidad original.

Para un estudio más detallado de la temática, véanse [7, p. 51] y [9, p. 314].

Estudio de singularidades en el infinito

Para estudiar el comportamiento de las trayectorias de un sistema diferencial cerca del infinito es posible utilizar una compactificación. Una de las posibles construcciones se basa en la proyección estereográfica de la esfera en el plano, en cuyo caso un único “punto en el infinito” está unido al plano.

Un mejor enfoque para estudiar el comportamiento de trayectorias cercanas al infinito es usar la llamada esfera de Poincaré. Esta esfera tiene la ventaja de que los puntos singulares en el infinito se extienden a lo largo del ecuador de la esfera y, por lo tanto, son de una naturaleza más simple que los puntos singulares de la esfera de Bendixson. Sin embargo, algunos de los puntos singulares en el infinito en la esfera de Poincaré pueden ser muy complicados.

Consideremos en \mathbb{R}^3 la esfera $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ y el plano $\pi = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_3 = 1\}$, que es tangente a S^2 en el punto $(0,0,1)$. Sea r una recta que pasa por el origen $(0,0,0)$ y un punto P de π , entonces r intercepta S^2 en dos puntos P_+ y P_- , donde el primero está en el hemisferio abierto superior $H_+ = \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2; x_3 > 0\}$ y el segundo está en el hemisferio abierto inferior $H_- = \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2; x_3 < 0\}$.

Luego, las expresiones para $p(X)$ en la carta local (U_1, ϕ_1) están dadas por:

$$\begin{cases} \dot{u} &= v^d \left[-uP\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) + Q\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \right], \\ \dot{v} &= -v^{d+1}P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \end{cases}$$

La expresión para (U_2, ϕ_2) es:

$$\begin{cases} \dot{u} &= v^d \left[P\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right) - uQ\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right) \right], \\ \dot{v} &= -v^{d+1}Q\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right) \end{cases}$$

y para (U_3, ϕ_3) es:

$$\begin{cases} \dot{u} &= P(u, v), \\ \dot{v} &= Q(u, v) \end{cases}$$

donde d es el máximo grado del polinomio.

Para un estudio más detallado de la temática, véase [9, p. 151].

Estudio de las familias

En este trabajo se propone el estudio del caso cuadrático asociado al sistema con $a, b, c, m, k \in \mathbb{R}$, dado por:

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= (\alpha x^{m+k-1} + \beta x^{m-k-1})y - \gamma x^{2m-2k-1} \end{cases}$$

Con $\alpha = a(2m + k)$, $\beta = b(2m - k)$ y $\gamma = (a^2mx^{4k} + cx^{2k} + b^2m)$.

Entonces, el sistema principal puede escribirse como:

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= (a(2m + k)x^{m+k-1} + b(2m - k)x^{m-k-1})y - (a^2mx^{4k} + cx^{2k} + b^2m)x^{2m-2k-1} \end{cases}$$

Inicialmente hallamos los casos cuadráticos de las familias equivalentemente afines al sistema, considerando casos específicos. Luego procedemos a estudiar la estabilidad de los puntos críticos en el plano finito, su variedad estable, la existencia de bifurcaciones y, por último, el comportamiento de los puntos críticos en el plano infinito.

Reducción a 5 familias I, II, III, IV, V

Proposición: Para $a, b, c, m, k \in \mathbb{R}$ y $s, p, r \in \mathbb{Z}^+$, los sistemas cuadráticos asociados al sistema principal son equivalentemente afines a las siguientes familias:

- Para $a = 0, b = 0$ y $c \neq 0$.

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -cx^2 \end{cases}$$

- Para $a = 0, b \neq 0$ y $c = 0$.

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= 2byx \end{cases}$$

- Para $a \neq 0, b = 0$ y $c = 0$.

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= 2ayx \end{cases}$$

- Para $a \neq 0, b = 0$ y $c \neq 0$.

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= a\left(\frac{p+4}{2}\right)y - \frac{3}{2}a^2x - cx^2 \end{cases}$$

- Para $a = 0, b \neq 0$ y $c \neq 0$.

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= b\left(\frac{s+4}{2}\right)y - \frac{3}{2}bx - cx^2 \end{cases}$$

Prueba. Analizaremos cada subfamilia, de donde obtendremos las diferentes posibilidades para las constantes a, b y c , sean iguales a 0 . A continuación, algunos casos de la demostración:

- Para $a = 0, b = 0$ y $c \neq 0$.

Observamos 2 casos:

Caso 1: si $s = 0$, entonces $p = 1$.

Caso 2: si $s = 1$, entonces $p = 0$.

Así, en este caso nos queda el sistema asociado:

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -cx^2 \end{cases}$$

- Para $a \neq 0, b = 0$ y $c \neq 0$.

Observamos que el $\text{grad}(Q) = \text{máx}\{2s + 1, r\}$. Así,

Caso 1: si el $\text{grad}(Q) = 2s + 1$, entonces $2s + 1 = 2$; por lo tanto, $s = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}^+$.

Caso 2: si el $\text{grad}(Q) = r$, entonces $r = 2$ y $s = 0$.

Así, en este caso nos queda el sistema asociado:

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= a\left(\frac{p+4}{2}\right)y - \frac{3}{2}a^2x - cx^2 \end{cases}$$

- Para $a \neq 0, b \neq 0$ y $c = 0$.

Observamos que el $\text{grad}(Q) = \text{máx}\{2p + 1, 2s + 1\}$.

Caso 1: si el $\text{grad}(Q) = 2p + 1$, entonces $2p + 1 = 2$; así, $p = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}^+$.

Caso 2: si el $\text{grad}(Q) = 2s + 1$, entonces $2s + 1 = 2$; así, $s = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}^+$.

Por lo tanto, esta familia no tiene caso cuadrático asociado.

- Para $a \neq 0$, $b \neq 0$ y $c \neq 0$.

Observamos que el $\text{grad}(Q) = \text{máx}\{2p + 1, 2s + 1, s + p + 1\}$

Caso 1: si el $\text{grad}(Q) = 2p + 1$, entonces $2p + 1 = 2$; así, $p = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}^+$.

Caso 2: si el $\text{grad}(Q) = 2s + 1$, entonces $2s + 1 = 2$; así, $s = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}^+$.

Caso 3: si el $\text{grad}(Q) = s + p + 1$, entonces nos devolvemos al razonamiento en la **Familia I**. Así, haciendo $s = 0$, entonces $p = 1$, pero tenemos un término de $2p + 1 = 3$ y ya este caso sería cúbico. Igual razonamos para cuando sea $p = 0$ y $s = 1$. Por lo tanto, esta familia no tiene caso cuadrático asociado.

Plano finito

En esta sección se analiza la estabilidad de los puntos críticos de las diferentes familias en el plano finito utilizando los diferentes tópicos anteriormente descritos.

Familia I

Proposición: El punto $(0,0)$ es una cúspide.

Prueba. Los puntos críticos asociados a la **Familia I** son $(0,0)$. La matriz jacobiana del sistema es:

$$\mathcal{M}(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2cx & 0 \end{bmatrix}$$

luego,

$$\mathcal{M}(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Así, vemos que $\lambda^2 = 0$. Luego, aplicando el *Teorema de los puntos singulares nilpotentes*, sea $y = f(x)$ la solución de $y + A(x, y) = 0$, donde

$A(x, y) = 0$, entonces $y = 0$. Por otro lado, tenemos que $B(x, y) = -cx^2$. Así, obtenemos que $F(x) = -cx^2$ y $G(x) = 0$, entonces $m = 2$ y $a \neq 0$. Por lo tanto, el origen de la **Familia I** es una cúspide.

Familia II

Proposición: $(x, 0)$ es una recta de puntos críticos.

Prueba. $(x, 0)$ es una recta de puntos críticos asociados a la **Familia II**. Así, vemos una aproximación del sistema por variable separable:

$$y = bx^2 + k, \text{ donde } k \text{ es una constante.}$$

Familia III

Proposición: $(x, 0)$ es una recta de puntos críticos.

Prueba. $(x, 0)$ es una recta de puntos críticos asociados a la **Familia III**. Así, vemos una aproximación del sistema por variable separable:

$$y = ax^2 + k, \text{ donde } k \text{ es una constante.}$$

Familia IV

Proposición:

Si $p \in \mathbb{Z}^+$, entonces $(0,0)$ es un nodo estable si $a < 0$ e inestable si $a > 0$, y $(\frac{-3a^2}{2c}, 0)$ es una silla.

Si $p = 0$, entonces $(0,0)$ es un foco estable si $a < 0$ e inestable si $a > 0$, y $(\frac{-3a^2}{2c}, 0)$ es una silla.

Prueba. Los puntos críticos asociados a la **Familia IV** son: $(0,0)$ y $(\frac{-3a^2}{2c}, 0)$. Ahora, sea $d = a(p + 4)$ y la matriz jacobiana del sistema:

$$\mathcal{M}(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{3}{2}a^2 - 2cx & d \end{bmatrix}$$

luego,

$$\mathcal{M}(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{3}{2}a^2 & \frac{d}{2} \end{bmatrix}$$

y,

$$\mathcal{M}\left(\frac{-3a^2}{2c}, 0\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3a^2}{2} & \frac{d}{2} \end{bmatrix}$$

- Para $\mathcal{M}(0,0)$ los valores propios son:

$\lambda_1 = \frac{1}{4}[d + \sqrt{d^2 - 24a^2}]$ y $\lambda_2 = \frac{1}{4}[d - \sqrt{d^2 - 24a^2}]$. Aplicando el *Teorema de los puntos singulares hiperbólicos*, obtenemos que $\lambda_1\lambda_2 > 0$. Por lo tanto, $(0,0)$ es un nodo estable si $a < 0$ e inestable si $a > 0$.

Ahora, para $\mathcal{M}\left(\frac{-3a^2}{2c}, 0\right)$ los valores propios son: $\lambda_1 = \frac{1}{4}[d + \sqrt{d^2 + 24a^2}]$ y $\lambda_2 = \frac{1}{4}[d - \sqrt{d^2 + 24a^2}]$. Aplicando el *Teorema de los puntos singulares hiperbólicos*, obtenemos que $\lambda_1\lambda_2 < 0$, entonces $\left(\frac{-3a^2}{2c}, 0\right)$ es un punto silla.

- Si $p = 0$, para $\mathcal{M}(0,0)$ los valores propios son:

$\lambda_1 = \frac{\alpha}{2}(2 + i\sqrt{2})$ y $\lambda_2 = \frac{\alpha}{2}(2 - i\sqrt{2})$. Aplicando el *Teorema de los puntos singulares hiperbólicos*, obtenemos que $(0,0)$ es un foco si $a > 0$ inestable y $a < 0$ estable.

Ahora, para $\mathcal{M}\left(\frac{-3a^2}{2c}, 0\right)$ los valores propios son:

$\lambda_1 = \frac{a}{4} [4 + 2\sqrt{10}]$ y $\lambda_2 = \frac{a}{4} [4 - 2\sqrt{10}]$. Aplicando el *Teorema de los puntos singulares hiperbólicos*, obtenemos que $\lambda_1 \lambda_2 < 0$, entonces $(\frac{-3a^2}{2c}, 0)$ es un punto silla.

Familia V

Antes de mostrar la siguiente proposición, definimos las siguientes regiones:

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(b, c, d) \in \mathbb{R}^3 | d^2 - 24b > 0\} \\ R_2 &= \{(b, c, d) \in \mathbb{R}^3 | d^2 - 24b = 0\} \\ R_3 &= \{(b, c, d) \in \mathbb{R}^3 | d^2 - 24b < 0, c > 0\} \\ R_4 &= \{(b, 0, d) \in \mathbb{R}^3 | d^2 - 24b > 0\} \\ R_5 &= \{(b, 0, d) \in \mathbb{R}^3 | d^2 - 24b = 0\} \\ R_6 &= \{(b, 0, d) \in \mathbb{R}^3 | d^2 - 24b < 0\} \\ R_7 &= \{(0, c, 0) \in \mathbb{R}^3 | c > 0\} \\ R_8 &= \{(b, c, d) \in \mathbb{R}^3 | c < 0\} \end{aligned}$$

Notamos que $\mathbb{R}^3 = \bigcup_{i=1}^8 R_i$. Ahora, en R_3 consideramos los siguientes subconjuntos:

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(b, c, d) \in \mathbb{R}^3 | d^2 - 24b < 0, d > 0, c > 0\} \\ E_2 &= \{(b, c, d) \in \mathbb{R}^3 | d^2 - 24b < 0, d < 0, c > 0\} \\ E_3 &= \{(b, c, d) \in \mathbb{R}^3 | d^2 + 24b < 0, d > 0, c > 0\} \\ E_4 &= \{(b, c, d) \in \mathbb{R}^3 | d^2 - 24b < 0, d < 0, c > 0\} \\ E_5 &= \{(b, c, d) \in \mathbb{R}^3 | d^2 - 24b < 0, d > 0, c < 0\} \\ E_6 &= \{(b, c, d) \in \mathbb{R}^3 | d^2 - 24b < 0, d < 0, c < 0\} \\ E_7 &= \{(b, c, d) \in \mathbb{R}^3 | d^2 + 24b < 0, d > 0, c < 0\} \\ E_8 &= \{(b, c, d) \in \mathbb{R}^3 | d^2 - 24b < 0, d < 0, c < 0\} \\ E_9 &= \{(b, c, d) \in \mathbb{R}^3 | d^2 - 24b > 0, d > 0, c > 0\} \\ E_{10} &= \{(b, c, d) \in \mathbb{R}^3 | d^2 - 24b > 0, d < 0, c > 0\} \\ E_{11} &= \{(b, c, d) \in \mathbb{R}^3 | d^2 - 24b > 0, d < 0, c < 0\} \\ E_{12} &= \{(b, c, d) \in \mathbb{R}^3 | d^2 - 24b > 0, d > 0, c < 0\} \end{aligned}$$

Proposición: Dada la Familia V con $(b, c, d) \in \mathbb{R}^3$, entonces:

- Si $(b, c, d) \in R_1$ y $b > 0$, entonces el punto crítico $(0,0)$ es un foco inestable y el punto crítico $(\frac{-3b}{2c}, 0)$ es una silla. Si $b < 0$, entonces el punto crítico $(0,0)$ es una silla y el punto $(\frac{-3b}{2c}, 0)$ es un nodo estable.
- Si $(b, c, d) \in R_2$ y $b > 0$, entonces el punto crítico $(0,0)$ es un nodo inestable y el punto $(\frac{-3b}{2c}, 0)$ es una silla.
- Si $(b, c, d) \in R_3$ y $b > 0$, entonces el punto crítico $(0,0)$ es un foco estable y el punto crítico $(\frac{-3b}{2c}, 0)$ es una silla. Si $b < 0$, entonces el punto crítico $(0,0)$ es un foco inestable y el punto crítico $(\frac{-3b}{2c}, 0)$ es un nodo inestable.

Prueba. Sea $d = b(s + 4)$, entonces los puntos críticos asociados a la Familia V son: $(0,0)$ y $(\frac{-3b}{2c}, 0)$. Luego, la matriz \mathcal{M} es:

$$\mathcal{M}(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{3}{2}b - 2cx & \frac{d}{2} \end{bmatrix}$$

luego,

$$\mathcal{M}(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{3b}{2} & \frac{d}{2} \end{bmatrix}$$

Para $\mathcal{M}(0,0)$ los valores propios son:

$$\lambda_1 = \frac{1}{4} [d + \sqrt{d^2 - 24b}] \text{ y } \lambda_2 = \frac{1}{4} [d - \sqrt{d^2 - 24b}]$$

Ahora, para $(\frac{-3b}{2c}, 0)$ tenemos que:

$$\mathcal{M}\left(\frac{-3b}{2c}, 0\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3b}{2} & \frac{b}{2}(s+4) \end{bmatrix}$$

Con valores propios:

$$\lambda_1 = \frac{1}{4} [d + \sqrt{d^2 + 24b}] \text{ y } \lambda_2 = \frac{1}{4} [d - \sqrt{d^2 + 24b}]$$

- Si $(b, c, d) \in R_1$ tal que $d^2 - 24b > 0$. Para $\mathcal{M}(0,0)$ tenemos que $\lambda_1 \lambda_2 = \frac{-3b}{2}$, entonces aplicando el *Teorema de los puntos singulares hiperbólicos*, obtenemos que el punto crítico $(0,0)$ es un nodo inestable si $b > 0$ y una silla si $b < 0$.

Ahora, para $\mathcal{M}\left(\frac{-3b}{2c}, 0\right)$ tenemos que $d^2 + 24b > 48b$ entonces:

- Si $b > 0$, vemos que $\lambda_1 \lambda_2 = \frac{-3b}{2}$, entonces aplicando el *Teorema de los puntos singulares hiperbólicos*, vemos que el punto crítico $\left(\frac{-3b}{2c}, 0\right)$ es una silla. Si $b < 0$, $\lambda_2 < 0$, entonces el punto crítico es un nodo estable.
 - Si $b < 0$ y $d^2 + 24b \in [48b, 0)$, entonces el punto crítico $\left(\frac{-3b}{2c}, 0\right)$ es un foco estable.
 - Si $b < 0$ y $d^2 + 24b \geq 0$, entonces el punto crítico $\left(\frac{-3b}{2c}, 0\right)$ es un nodo estable.
- Si $(b, c, d) \in R_2$ tal que $d^2 - 24b = 0$, entonces si $b \geq 0$. Para $\mathcal{M}(0,0)$ $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{d}{4}$, luego el punto crítico $(0,0)$ es un nodo inestable. Luego, notamos que si $b = 0$, entonces esto corresponde a la **Familia I**. Ahora, para $\mathcal{M}\left(\frac{-3b}{2c}, 0\right)$, si $b > 0$ tal que $d^2 - 24b > 0$, además $\lambda_1 \lambda_2 = \frac{-3b}{2c}$. Luego, aplicando el *Teorema de los puntos singulares hiperbólicos*, el punto crítico $\left(\frac{-3b}{2c}, 0\right)$ es una silla.

- Si $(b, c, d) \in R_3$ tal que si $d^2 - 24b < 0$, entonces $b < 0$. Para $\mathcal{M}(0,0)$ los valores propios son $\lambda_1 = \frac{1}{4}(d + i\sqrt{24b - d^2})$ y $\lambda_2 = \frac{1}{4}(d + i\sqrt{24b - d^2})$. Luego, aplicando el Teorema de los puntos singulares hiperbólicos, el punto crítico $(0,0)$ es un foco inestable. Ahora, para $b > 0$ vemos que $d^2 + 24b > 0$, tal que para $\mathcal{M}(\frac{-3b}{2c}, 0)$ tenemos que $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$. Luego, $\lambda_1 \lambda_2 = \frac{-3b}{2}$. Así, aplicando el Teorema de los puntos singulares hiperbólicos, tenemos que el punto crítico $(\frac{-3b}{2c}, 0)$ es una silla.

Proposición: Dada la Familia V con $c = 0$, entonces:

- si $(b, c, d) \in R_4$ y $b > 0$, entonces el punto crítico $(0,0)$ es una silla. Si $b < 0$, entonces el punto crítico $(0,0)$ es un nodo estable.
- Si $(b, c, d) \in R_5$ y $b > 0$, entonces el punto crítico $(0,0)$ es un nodo inestable.
- Si $(b, c, d) \in R_6$ y $b > 0$, entonces el punto crítico es un foco inestable. Si $b < 0$, entonces el punto crítico $(0,0)$ es un foco estable.

Prueba. Con $c = 0$, la Familia V tiene la forma:

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \frac{d}{2}y - \frac{3}{2}bx \end{cases}$$

Aquí, vemos que el único punto crítico asociado al sistema $c = 0$ es $(0,0)$. Entonces, la matriz Jacobiana del sistema evaluada en el punto crítico es:

$$\mathcal{M}(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{3b}{2} & \frac{d}{2} \end{bmatrix}$$

Para $\mathcal{M}(0,0)$ los valores propios son:

$$\lambda_1 = \frac{1}{4}[d + \sqrt{d^2 - 24b}] \text{ y } \lambda_2 = \frac{1}{4}[d - \sqrt{d^2 - 24b}]$$

- Si $(b, 0, d) \in R_4$ tal que $d^2 - 24b > 0$, tenemos que $\lambda_1 \lambda_2 = \frac{-3b}{2}$. Entonces, aplicando el *Teorema de los puntos singulares hiperbólicos*, si $b > 0$ el punto crítico $(0,0)$ es una silla y si $b < 0$ y $\lambda_1 < 0$ el punto crítico $(0,0)$ es un nodo estable.
- Si $(b, 0, d) \in R_5$ tal que $d^2 - 24b = 0$, tenemos que $\lambda_1 \lambda_2 = \frac{d}{4}$. Aplicando el *Teorema de los puntos singulares hiperbólicos*, el punto crítico $(0,0)$ es un nodo inestable.
- Si $(b, 0, d) \in R_6$ tal que $d^2 - 24b < 0$, tenemos que $\lambda_1 = \frac{1}{4}(d + i\sqrt{24b - d^2})$ y $\lambda_2 = \frac{1}{4}(d - i\sqrt{24b - d^2})$. Entonces, aplicando el *Teorema de los puntos singulares hiperbólicos*, si $b > 0$ el punto crítico $(0,0)$ es un foco inestable y si $b < 0$ y $\lambda_1 < 0$ el punto crítico $(0,0)$ es un foco estable.

Ahora veremos la variedad estable asociada a la **Familia IV** y la **Familia V**.

Proposición: La variedad estable asociada a la **Familia IV** en el punto $(\frac{-3a^2}{2c}, 0)$ es:

$$S: y = \frac{c(x + \frac{3a^2}{2c})^2}{(v - w)(v - 2w)}$$

Prueba. Veamos la estabilidad de la **Familia IV** en el punto $(\frac{-3a^2}{2c}, 0)$. Aplicando el *Teorema de la variedad estable*, observemos los valores propios de la matriz jacobiana de la **Familia IV** evaluada en el punto $(\frac{-3a^2}{2c}, 0)$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3a^2}{2} & d \end{bmatrix}$$

$$\text{Sea } w = \lambda_1 = \frac{1}{4}[d + \sqrt{d^2 + 24a^2}] \text{ y } v = \lambda_2 = \frac{1}{4}[d - \sqrt{d^2 + 24a^2}]$$

entonces, $B(x) = C^{-1}AC = \begin{bmatrix} w & 0 \\ 0 & v \end{bmatrix}$ y $F(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -cx^2 \end{bmatrix}$, $G(x) = \frac{cx^2}{v-w} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$U(t) = \begin{bmatrix} e^{wt} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, V(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{vt} \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

luego,

$$u^{(0)}(t, b) = 0$$

$$u^{(1)}(t, b) = \begin{bmatrix} e^{wt} b_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u^{(2)}(t, b) = \begin{bmatrix} e^{wt} b_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{w(t-s)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{b_1^2 c}{v-w} e^{2ws} \\ -\frac{b_1^2 c}{v-w} e^{2ws} \end{bmatrix} ds$$

$$- \int_t^\infty \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{v(t-s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{b_1^2 c}{v-w} e^{2ws} \\ -\frac{b_1^2 c}{v-w} e^{2ws} \end{bmatrix} ds$$

$$u^{(2)}(t, b) = \begin{bmatrix} e^{wt} b_1 + \frac{b_1^2 c e^{2wt} (e^{wt} - 1)}{w(v-w)} \\ \frac{b_1^2 c e^{2wt}}{(v-w)(v-2w)} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, podemos aproximar por $\psi_2(b_1) = b_1$. Entonces, la variedad estable puede aproximarse por:

$$S: y = \frac{c(x + \frac{3a^2}{2c})^2}{(v-w)(v-2w)}$$

como $x \rightarrow 0$. Del mismo modo podemos obtener la inestable:

$$U: x + \frac{3a^2}{2c} = \frac{2cy^2}{(v-w)(v-2w)}$$

Proposición: La variedad estable asociada a la **Familia V**:

- Para $b < 0$ en el punto $(0,0)$ es:

$$S: y = \frac{cx^2}{(v-w)(v-2w)}$$

- Para $b > 0$ en el punto $(\frac{-3b}{2c}, 0)$ es:

$$S: y = \frac{c(x + \frac{3b}{2c})^2}{(v-w)(v-2w)}$$

Prueba.

- Veamos la estabilidad de la **Familia V** para $b < 0$ en el punto $(0,0)$ aplicando el *Teorema de la variedad estable*, observemos los valores propios de la matriz jacobiana de la **Familia V** evaluada en el punto $(0,0)$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-3b}{2} & d \end{bmatrix}$$

Sea $w = \lambda_1 = \frac{1}{4}[d + \sqrt{d^2 - 24b}]$ y $v = \lambda_2 = \frac{1}{4}[d - \sqrt{d^2 - 24b}]$.

entonces, $B(x) = C^{-1}AC = \begin{bmatrix} w & 0 \\ 0 & v \end{bmatrix}$ y $F(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -cx^2 \end{bmatrix}$, $G(x) = \frac{cx^2}{v-w} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$U(t) = \begin{bmatrix} e^{wt} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, V(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{vt} \end{bmatrix}, a = \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

luego,

$$u^{(0)}(t, a) = 0$$

$$u^{(1)}(t, a) = \begin{bmatrix} e^{wt} a_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u^{(2)}(t, a) = \begin{bmatrix} e^{wt} a_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{w(t-s)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{a_1^2 c}{v-w} e^{2ws} \\ -\frac{a_1^2 c}{v-w} e^{2ws} \end{bmatrix} ds$$

$$- \int_t^\infty \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{v(t-s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{a_1^2 c}{v-w} e^{2ws} \\ -\frac{a_1^2 c}{v-w} e^{2ws} \end{bmatrix} ds$$

$$u^{(2)}(t, a) = \begin{bmatrix} e^{wt} a_1 + \frac{a_1^2 c e^{2wt} (e^{wt} - 1)}{w(v-w)} \\ \frac{a_1^2 c e^{2wt}}{(v-w)(v-2w)} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, podemos aproximar por $\psi_2(a_1) = a_1$. Entonces, la variedad estable puede aproximarse por:

$$S: y = \frac{cx^2}{(v-w)(v-2w)}$$

como $x \rightarrow 0$. Del mismo modo podemos obtener la inestable:

$$U: x = \frac{2cy^2}{(v-w)(v-2w)}$$

b) Veamos la estabilidad de la **Familia V** en el punto $(\frac{-3b}{2c}, 0)$, esto es, cuando $b > 0$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3b}{2} & \frac{d}{2} \end{bmatrix}$$

Sea $w = \lambda_1 = \frac{1}{4}[d + \sqrt{d^2 + 24b}]$ y $v = \lambda_2 = \frac{1}{4}[d - \sqrt{d^2 + 24b}]$

entonces, $B(x) = C^{-1}AC = \begin{bmatrix} w & 0 \\ 0 & v \end{bmatrix}$ y $F(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -cx^2 \end{bmatrix}$, $G(x) = \frac{cx^2}{v-w} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$U(t) = \begin{bmatrix} e^{wt} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, V(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{vt} \end{bmatrix}, a = \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

luego,

$$u^{(0)}(t, a) = 0$$

$$u^{(1)}(t, a) = \begin{bmatrix} e^{wt} a_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u^{(2)}(t, a) = \begin{bmatrix} e^{wt} a_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{w(t-s)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{a_1^2 c}{v-w} e^{2ws} \\ -\frac{a_1^2 c}{v-w} e^{2ws} \end{bmatrix} ds$$

$$- \int_t^\infty \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{v(t-s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{a_1^2 c}{v-w} e^{2ws} \\ -\frac{a_1^2 c}{v-w} e^{2ws} \end{bmatrix} ds$$

$$u^{(2)}(t, a) = \begin{bmatrix} e^{wt} a_1 + \frac{a_1^2 c e^{2wt} (e^{wt} - 1)}{w(v-w)} \\ \frac{a_1^2 c e^{2wt}}{(v-w)(v-2w)} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, podemos aproximar por $\psi_2(a_1) = a_1$. Entonces, la variedad estable puede aproximarse por:

$$S: y = \frac{c(x + \frac{3b}{2c})^2}{(v-w)(v-2w)}$$

como $x \rightarrow 0$. Del mismo modo podemos obtener:

$$U: x + \frac{3b}{2c} = \frac{2cy^2}{(v-w)(v-2w)}$$

Bifurcaciones

En esta sección analizaremos el estudio de las bifurcaciones de la **Familia V**.

Familia V

Proposición: Sean los conjuntos R_7 y R_8 , ellos son bifurcaciones transcíticas del sistema **Familia V**.

Prueba. Sean $P_1: (0,0)$ y $P_2: (\frac{3b}{2c}, 0)$ de la proposición de la estabilidad de los puntos críticos en el plano finito de la **Familia V**. Si $(b, c, d) \in E_3$, entonces P_1 es una silla y P_2 es un foco inestable. Cuando $(b, c, d) \in R_7$, P_1 y P_2 colapsan en un punto crítico, cuyo punto es una cúspide. Luego, cuando $(b, c, d) \in E_2$, P_1 es un foco inestable y P_2 es una silla. El mismo comportamiento ocurre cuando observamos que $(b, c, d) \in E_2$, entonces $(b, c, d) \in R_7$ y, finalmente, $(b, c, d) \in E_4$.

Ahora, sean $P_1: (0,0)$ y $P_2: (\frac{3b}{2c}, 0)$ de la proposición de la estabilidad de los puntos críticos en el plano finito de la **Familia V**. Si $(b, c, d) \in E_4$, entonces P_1 es una silla y P_2 es un foco estable. Cuando $(b, c, d) \in R_8$, P_1 y P_2 colapsan en un punto crítico, cuyo punto es una cúspide. Luego, cuando $(b, c, d) \in E_1$, P_1 es un foco estable y P_2 es una silla. El mismo comportamiento ocurre cuando observamos que $(b, c, d) \in E_1$, entonces $(b, c, d) \in R_8$ y, finalmente, $(b, c, d) \in E_3$.

Por lo tanto, los conjuntos R_7 y R_8 son bifurcaciones transcíticas de la **Familia V**.

Proposición: El conjunto $\{(b, 0, d) | d^2 - 24b < 0\}$ es una bifurcación silla-foco-silla para la **Familia V**.

Prueba. Por la proposición de la estabilidad de los puntos críticos en el plano finito de la **Familia V**, si $(b, c, d) \in E_1$, el punto P_1 es un foco estable y P_2 es una silla. Ahora, cuando $(b, c, d) \in \{(b, 0, d) | d^2 - 24b < 0, d > 0\}$ por la proposición de la **Familia V** cuando $(c = 0)$, P_1 y P_2 colapsan en un foco inestable cuando (b, c, d) va al conjunto E_5 . Luego, P_1 y P_2 aparecen de nuevo como un foco estable y una silla respectivamente.

Proposición: El conjunto $\{(b, 0, d) | d^2 - 24b < 0\}$ es una bifurcación silla-foco-silla para la **Familia V**.

Prueba. Por la proposición de la estabilidad de los puntos críticos en el plano finito de la **Familia V**, si $(b, c, d) \in E_2$, el punto P_1 es un foco inestable y P_2 es una silla. Ahora, cuando $(b, c, d) \in \{(b, 0, d) | d^2 - 24b < 0, d < 0\}$ por la proposición de la **Familia V** cuando $(c = 0)$, P_1 y P_2 colapsan en un foco estable cuando (b, c, d) va al conjunto E_6 . Luego, P_1 y P_2 aparecen de nuevo como un foco inestable y una silla respectivamente.

Proposición: Sean los conjuntos E_9 y E_{10} bifurcaciones locales de la **Familia V**.

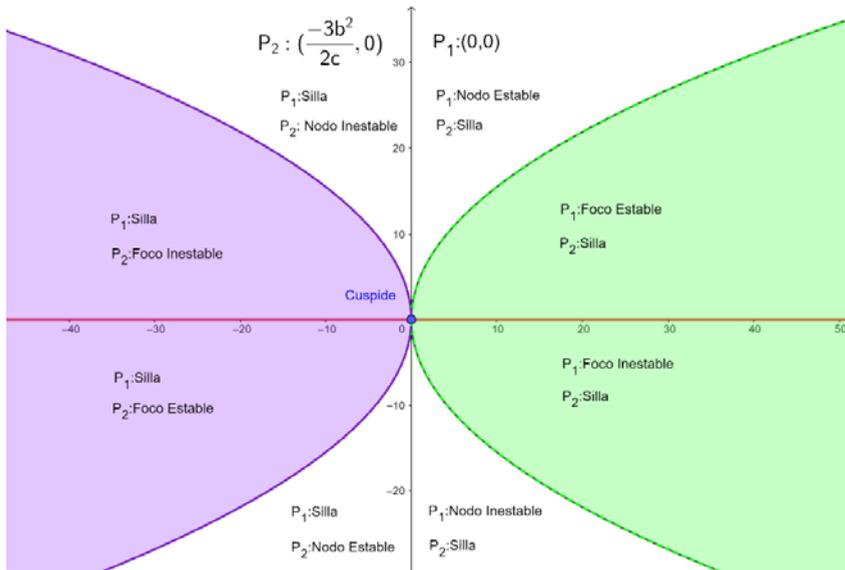
Prueba. Sea $P_1: (0,0)$ de la proposición de la estabilidad de los puntos críticos en el plano finito de la **Familia V**. Si $(b, c, d) \in E_9$, entonces P_1 es un nodo estable. Ahora, cuando $(b, c, d) \in E_{10}$, el punto P_1 es un nodo inestable. Por lo tanto, las regiones E_9 y E_{10} son bifurcaciones locales de la **Familia V**.

Proposición: Sean los conjuntos E_{11} y E_{12} bifurcaciones locales de la **Familia V**.

Prueba. Sea $P_2: (\frac{3b}{2c}, 0)$ de la proposición de la estabilidad de los puntos críticos en el plano finito de la **Familia V**. Si $(b, c, d) \in E_{12}$, entonces P_2 es un nodo inestable. Ahora, cuando $(b, c, d) \in E_{11}$, el punto P_2 es un nodo estable. Por lo tanto, las regiones E_{11} y E_{12} son bifurcaciones locales de la **Familia V**.

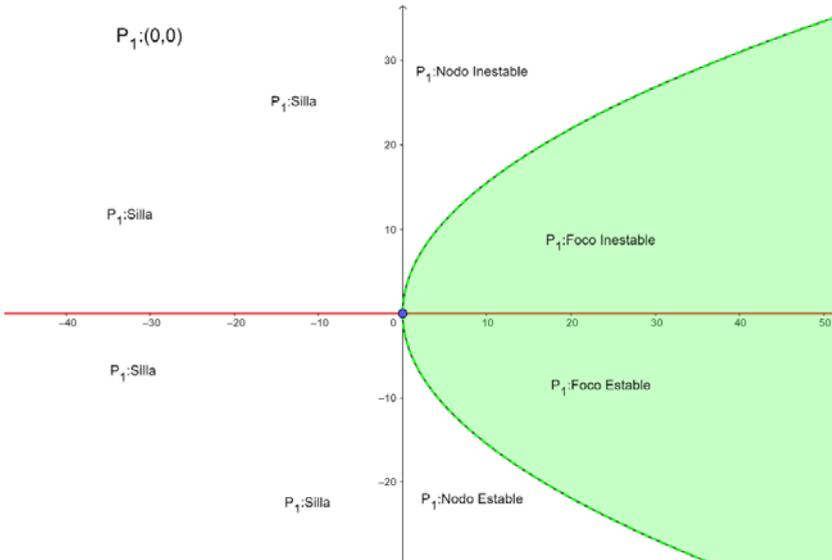
A continuación se pueden observar los puntos críticos de la **Familia V** y su estabilidad de acuerdo con la región del espacio en la que se encuentren.

Figura 5.1. Cuando $c > 0$



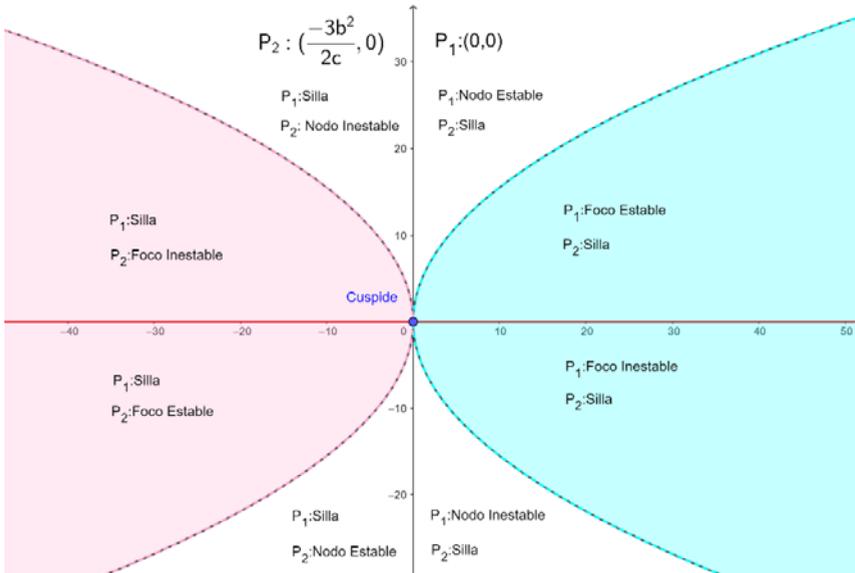
Fuente: elaboración propia.

Figura 5.2. Cuando $c = 0$

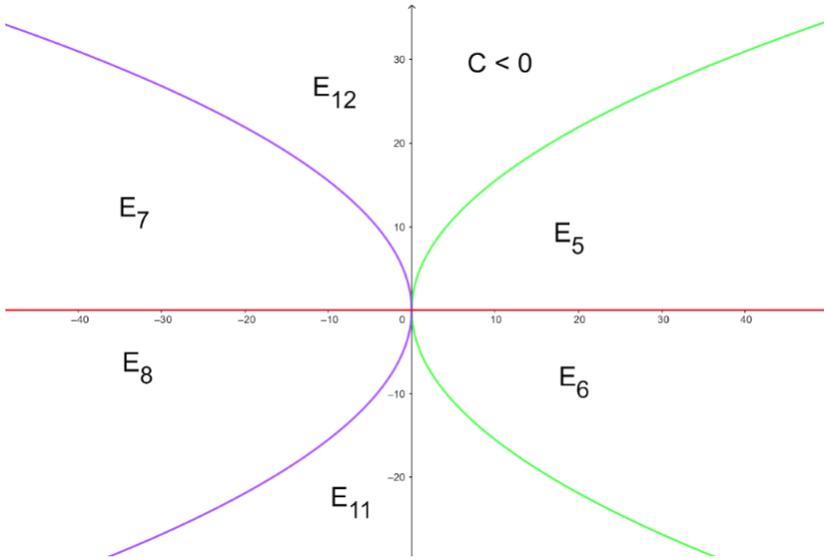


Fuente: elaboración propia.

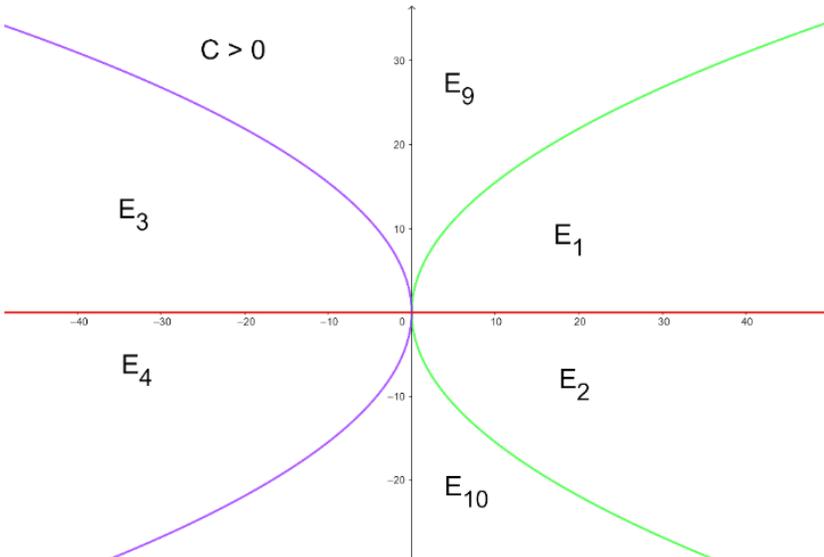
Figura 5.3. Cuando $c > 0$



Fuente: elaboración propia.

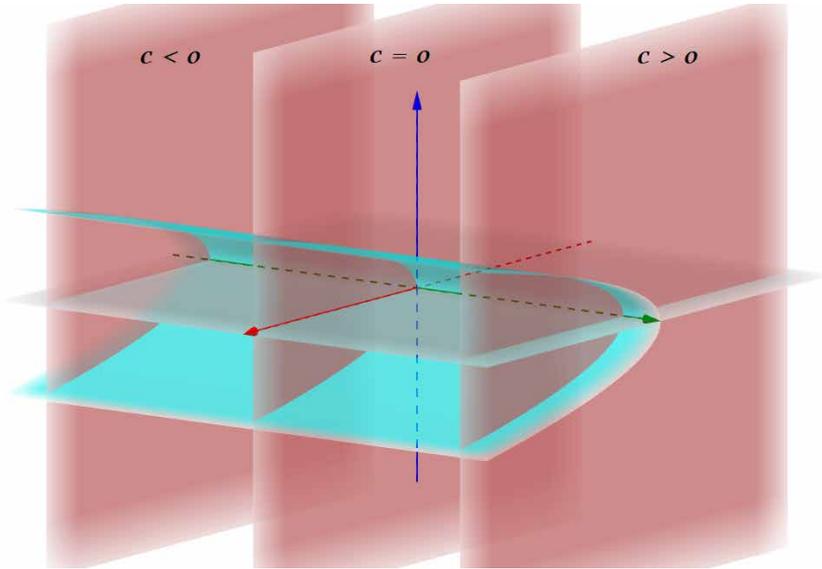
Figura 5.4. *Subconjuntos $c < 0$* 

Fuente: elaboración propia.

Figura 5.5 *Subconjuntos $c > 0$* 

Fuente: elaboración propia.

Figura 5.6. *Espacio*



Fuente: elaboración propia.

Plano infinito

En esta sección se analiza la estabilidad de los puntos críticos de las diferentes familias en el plano infinito utilizando la compactificación de Poincaré definida anteriormente.

Familia I

En la **Carta U_1** el sistema asociado a la **Familia I** es:

$$\begin{cases} \dot{u} &= -u^2v - c \\ \dot{v} &= -uv^2 \end{cases}$$

El sistema anterior no tiene puntos críticos en el infinito.

En la **Carta U_2** el sistema asociado a la **Familia I** es:

$$\begin{cases} \dot{x} &= v + cu^3 \\ \dot{y} &= -cu^2v \end{cases}$$

Proposición: El punto $(0,0)$ es un nodo estable si $c < 0$ e inestable si $c > 0$.

Prueba. El punto crítico del sistema anterior es $P: (0,0)$. La matriz jacobiana del sistema es:

$$\mathcal{M}(u, v) = \begin{bmatrix} 3cu^2 & 1 \\ -2cuv & -cu^2 \end{bmatrix}$$

luego,

$$\mathcal{M}(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Así, $\lambda^2 = 0$. Luego, aplicando el Teorema de los puntos singulares nilpotentes, sea $v + A(u, v) = 0$ la solución de $v + A(u, v) = 0$, donde $A(u, v) = cu^3$, entonces $v = -cu^3$. Por otro lado, tenemos que $B(u, v) = cu^2v$. Así obtenemos que $F(u) = -c^2u^5$ y $G(x) = 4cu^2$, entonces $m = 5, n = 2, a = -c^2, b = 4c$ y $m = 2n + 1$; además, $b^2 + 4a(n + 1) \geq 0$. Por lo tanto, el origen del sistema anterior en el plano infinito tiene un nodo atractor si $c < 0$ y un nodo repulsor si $c > 0$.

Para examinar una ilustración detallada del sistema sobre la esfera de Poincaré, véase la gráfica de la **Familia I** en la sección *Retratos de fase global* más adelante.

Familia II

En la **Carta U_1** el sistema asociado a la **Familia II** es:

$$\begin{cases} \dot{x} &= -u^2v + 2b \\ \dot{y} &= -uv^2 \end{cases}$$

El sistema anterior no tiene puntos críticos en el infinito.

En la **Carta U_2** el sistema asociado a la **Familia II** es:

$$\begin{cases} \dot{x} &= v - 2bu^2 \\ \dot{y} &= -2buv \end{cases}$$

Proposición: El punto $(0,0)$ tiene un sector hiperbólico y un sector elíptico.

Prueba. El punto crítico asociado al sistema anterior es $P: (0,0)$. La matriz jacobiana del sistema es:

$$\mathcal{M}(u, v) = \begin{bmatrix} -4bu & 1 \\ -2bv & -2bu \end{bmatrix}$$

luego,

$$\mathcal{M}(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Así, $\lambda^2 = 0$. Luego, aplicando el *Teorema de los puntos singulares nilpotentes*, sea $v + A(u, v) = 0$ la solución de $v + A(u, v) = 0$, donde $A(u, v) = -2bu^2$, entonces $v = -2bu^2$. Por otro lado, tenemos que $B(u, v) = -2buv$. Así obtenemos que $F(u) = -4b^2u^3$ y $G(x) = -6bu$, entonces $m = 2n + 1$ y $b^2 + 4a(n + 1)$. Por lo tanto, el origen del sistema anterior en el plano infinito tiene un sector hiperbólico y un sector elíptico.

Para examinar una ilustración detallada del sistema sobre la esfera de Poincaré, véase la gráfica de la **Familia II** en la sección *Retratos de fase global* más adelante.

Familia III

En la **Carta U_1** el sistema asociado a la **Familia III** es:

$$\begin{cases} \dot{x} &= -u^2v + 2a \\ \dot{y} &= -uv^2 \end{cases}$$

El sistema anterior no tiene puntos críticos en el infinito.

En la **Carta U_2** el sistema asociado a la **Familia III** es:

$$\begin{cases} \dot{x} &= v - 2au^2 \\ \dot{y} &= -2auv \end{cases}$$

Proposición: El punto $(0,0)$ tiene un sector hiperbólico y un sector elíptico.

Prueba. El punto crítico asociado al sistema anterior es $P: (0,0)$. La matriz jacobiana del sistema es:

$$\mathcal{M}(u, v) = \begin{bmatrix} -4au & 1 \\ -2av & -2au \end{bmatrix}$$

luego,

$$\mathcal{M}(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Así, $\lambda^2 = 0$. Luego, aplicando el Teorema de los puntos singulares nilpotentes, sea $v + A(u, v) = 0$ la solución de $v + A(u, v) = 0$, donde $A(u, v) = -2au^2$, entonces $v = -2au^2$. Por otro lado, tenemos que $B(u, v) = -2auv$. Así obtenemos que $F(u) = -4a^2u^3$ y $G(x) = -6au$, entonces $m = 2n + 1$ y $b^2 + 4a(n + 1)$. Por lo tanto, el origen del sistema anterior en el plano infinito tiene un sector hiperbólico y un sector elíptico.

Para examinar una ilustración detallada del sistema sobre la esfera de Poincaré, véase la gráfica de la Familia III en la sección la sección *Retratos de fase global* más adelante.

Familia IV

Haciendo una sustitución de $d = a(p + 4)$.

En la Carta U_1 el sistema asociado a la Familia IV es:

$$\begin{cases} \dot{x} &= -u^2v + \frac{d}{2}uv - \frac{3a^2v}{2} - c \\ \dot{y} &= -uv^2 \end{cases}$$

El sistema anterior no tiene puntos críticos en el infinito.

En la **Carta U_2** el sistema asociado a la **Familia IV** es:

$$\begin{cases} \dot{x} &= v - \frac{d u v}{2} + \frac{3 a^2 u^2 v}{2} + c u^3 \\ \dot{y} &= -\frac{d v^2}{2} + \frac{3 a^2 u v^2}{2} + c u^2 v \end{cases}$$

Proposición: El punto $(0,0)$ es un nodo estable si $c < 0$ e inestable si $c > 0$.

Prueba. El punto crítico asociado al sistema anterior es $P: (0,0)$. La matriz jacobiana del sistema es:

$$\mathcal{M}(u, v) = \begin{bmatrix} -\frac{d v}{2} + 3 a^2 v + 3 c u^2 & 1 - \frac{d u}{2} + \frac{3}{2} a^2 u^2 \\ \frac{3}{2} a^2 v^2 & -d v + 3 a^2 u v + c u^2 \end{bmatrix}$$

luego,

$$\mathcal{M}(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Así, $\lambda^2 = 0$. Luego, aplicando el *Teorema de los puntos singulares nilpotentes*, sea $v = f(u)$ una solución de $v + A(u, v) = 0$, entonces sea $v = f(u) = -c u^3 + \dots$ una aproximación a la solución por series de Taylor. Además, tenemos que $B(u, v) = -\frac{d v^2}{2} + \frac{3}{2} a^2 u v^2 + c u^2 v$, entonces $F(u) = -c^2 u^5 + \dots$ y $G(u) = c u^2 + \dots$. Así, $m = 5, n = 2$, $b = 4c$ y $a = -c^2$. Por lo tanto, el origen en el plano infinito es un nodo estable si $c < 0$ e inestable si $c > 0$.

Para examinar una ilustración detallada del sistema sobre la esfera de Poincaré, véase la gráfica de la **Familia IV** en la sección la sección *Retratos de fase global* más adelante.

Familia V

Haciendo una sustitución de $d = a(s + 4)$.

En la **Carta U_1** el sistema asociado a la **Familia V** es:

$$\begin{cases} \dot{x} &= -u^2v + \frac{duv}{2} - \frac{3bv}{2} - c \\ \dot{y} &= -uv^2 \end{cases}$$

El sistema anterior no tiene puntos críticos en el infinito.

En la **Carta U_2** el sistema asociado a la **Familia V** es:

$$\begin{cases} \dot{x} &= v - \frac{duv}{2} + \frac{3bu^2v}{2} + cu^3 \\ \dot{y} &= -\frac{dv^2}{2} + \frac{3buv^2}{2} + cu^2v \end{cases}$$

Proposición: El punto $(0,0)$ es un nodo estable si $c < 0$ e inestable si $c > 0$.

Prueba. El punto crítico asociado al sistema anterior es $P: (0,0)$. La matriz jacobiana del sistema es:

$$\mathcal{M}(u, v) = \begin{bmatrix} -\frac{dv}{2} + 3buv + 3cu^2 & 1 - \frac{du}{2} + \frac{3}{2}bu^2 \\ \frac{3}{2}bv^2 + 2cuv & -2dv + 3buv + cu^2 \end{bmatrix}$$

luego,

$$\mathcal{M}(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Así, $\lambda^2 = 0$. Luego, aplicando el Teorema de los puntos singulares nilpotentes, sea $v = f(u)$ una solución de $v + A(u, v) = 0$, entonces sea $v = f(u) = -cu^3 + \dots$ una aproximación a la solución por series de Taylor. Además, tenemos que $B(u, v) = -\frac{dv^2}{2} + \frac{3}{2}buv^2 + cu^2v$, entonces $F(u) = -c^2u^5 + \dots$ y $G(u) = cu^2 + \dots$. Así, $m = 5, n = 2, b = 4c$ y

$a = -c^2$. Por lo tanto, el origen en el plano infinito es un nodo estable si $c < 0$ e inestable si $c > 0$.

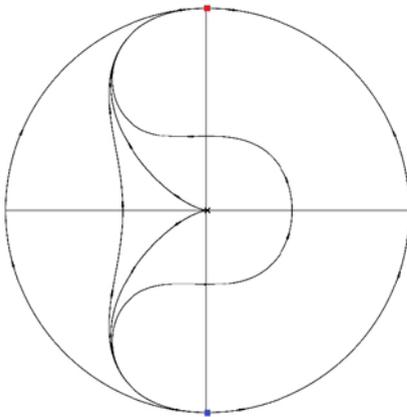
Para examinar una ilustración detallada del sistema sobre la esfera de Poincaré, véase la gráfica de la **Familia V**, cuando $b > 0$ y $b < 0$ en la sección *Retratos de fase global* más adelante.

Retratos de fase global

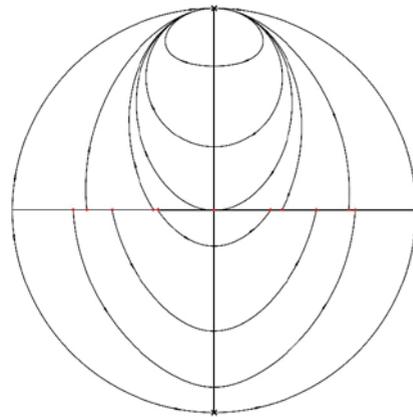
A continuación, podemos observar el retrato de fase de cada familia cuadrática multiparamétrica.

Figura 5.7. Retratos de fase de familias I, II, III, IV y IV

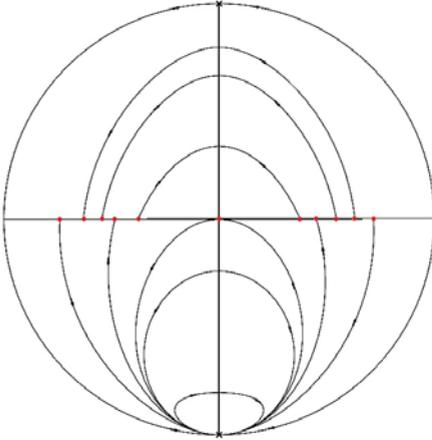
Familia I



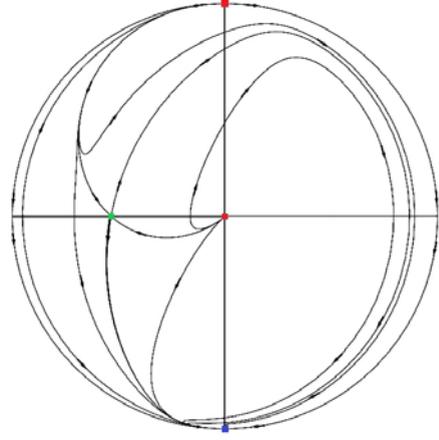
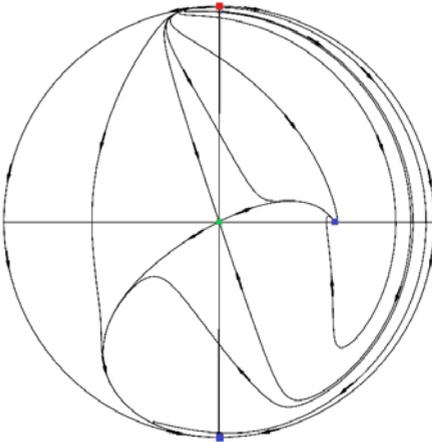
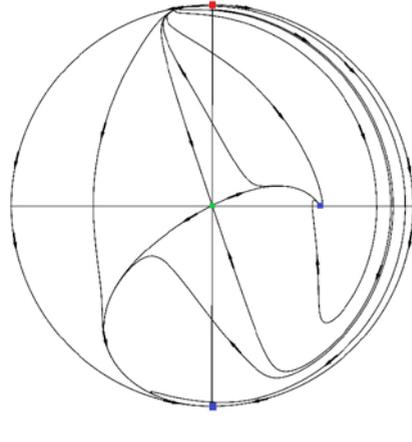
Familia II



Familia III



Familia IV

Familia V, $b < 0$.Familia V, $b > 0$.

Fuente: elaboración propia.

Bibliografía

- [1] P. B. Acosta-Humánez, J. T. Lázaro, J. J. Morales-Ruiz, C. Patanzi, "On the Integrability of Polynomial Fields in the Plane by Means of Picard-Vessiot Theory", *arXiv:1012.4796*, 2012.
- [2] P. B. Acosta-Humánez, A. Reyes-Linero, J. Rodríguez-Contreras, "Algebraic and Qualitative Remarks About the Family $yy'=(\alpha x^{m+k-1}+\beta x^{m-k-1})y+\gamma x^{2m-2k-1}$ ", *arXiv:1807.03551*.
- [3] P. B. Acosta-Humánez, A. Reyes-Linero, J. Rodríguez-Contreras, "Galoisian and Qualitative Approaches to Linear Polyanin-Zaitsev Vector Fields", *arXiv:1807.05272*.
- [4] J. A. Torres Henao, "Sistemas dinámicos planos", trabajo de grado para el título de Magister en Ciencias - Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, 2013, <http://bdigital.unal.edu.co/9478/>.
- [5] M. L. Vílchez Lobato, F. Velasco Morente y J. J. García del Hoyo, "Bifurcaciones transcricas y ciclos límites en un modelo dinámico de competición entre dos especies: una aplicación a la pesquería de 'engraulis encrasicolus' de la Región Suratlántica española", *Estudios de Economía Aplicada*, vol. 20, no. 3, pp. 651-677, 2002.
- [6] V. A. Gaiko, "Multiple Limit Cycle Bifurcations of the FitzHugh-Nagumo Neuronal Model", *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, vol. 74, no. 18, pp. 7532-7542, 2011.
- [7] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*, tercera edición. Springer-Verlag New York, 2001.
- [8] J. Guckenheimer y P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer-Verlag New York, 1983.
- [9] F. Dumortier, J. Llibre y J. C. Artés, *Qualitative Theory of Planar Differential Systems* (pp. xvi+-298). Springer, 2006.
- [10] J. K. Hale y H. Koçak, *Dynamics and Bifurcations*. Springer-Verlag New York, 2001.

Capítulo 6

Retrato de fase global y diagrama de bifurcación para un sistema lineal multiparamétrico

Jorge Rodríguez Contreras^{1,2}

Alberto Reyes Linero³

Juliana Vargas Sánchez⁴

Resumen

En el presente capítulo estudiamos la dinámica global de un sistema lineal multiparamétrico; para ello tenemos en cuenta los diferentes cambios que presentan estos parámetros. Primero, encontramos las diferentes superficies paramétricas en las que se divide el espacio, en las cuales se define la estabilidad del punto crítico. Luego, creamos el diagrama de bifurcación para clasificar las diferentes bifurcaciones que se presentan en el sistema. Por último, determinamos y clasificamos los puntos críticos en el infinito, teniendo en cuenta la forma canónica de la esfera

1 Departamento de Matemática y Estadística Universidad del Norte, Barranquilla, Colombia. Correo electrónico: jrodri@uninorte.edu.co.

2 Facultad de Ciencias Básicas, Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia. Correo electrónico: jorgelrodriguez@mail.uniatlantico.edu.co.

3 Facultad de Ciencias Básicas, Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia. Correo electrónico: areyeslinero@mail.uniatlantico.edu.co.

4 Facultad de Ciencias Básicas, Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia. Correo electrónico: jvargas@mail.uniatlantico.edu.co.

de Poincaré, y así obtenemos el retrato de fase global del sistema lineal multiparamétrico.

Introducción

Los sistemas de ecuaciones diferenciales, como es bien conocido, modelan una gran cantidad de situaciones matemáticas, físicas y de ingeniería, entre otras. Así, varios problemas de ingeniería, ciencias sociales y ciencias básicas se pueden expresar como sistemas autónomos.

$$\frac{dX}{dt} = f(X) \quad (6.1)$$

Donde $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continuamente diferenciable. En general, no siempre es posible resolver el problema no lineal dado en la ecuación (6.1), así que es importante tener información cualitativa del comportamiento local de las soluciones de equilibrio. En particular, el teorema de Hartman Grobman (véase [5]) prueba que el comportamiento local de un punto de equilibrio X_0 en el sistema no lineal es topológicamente equivalente al comportamiento del sistema lineal:

$$\frac{dX}{dt} = AX \quad (6.2)$$

cerca del origen, donde la matriz $A = Df(X_0)$. Por este motivo, el estudio de la dinámica de las soluciones cercana al origen en (6.2) es importante desde el punto de vista teórico y práctico. Ahora bien, el comportamiento cualitativo de las soluciones de (6.2) cerca al origen recae en los valores propios de la matriz A , que a su vez nos remiten a las superficies paramétricas.

Es así como en el sistema diferencial lineal multiparamétrico, el flujo o la estructura de las órbitas en vecindades de su punto crítico se pueden ver afectados por el comportamiento en las superficies paramétricas. Igualmente notamos que, al cambiar estas superficies paramétricas, las propiedades de estabilidad del punto crítico se ven afectadas. Es decir, ocurre una bifurcación para ciertos valores de los parámetros. Podemos encontrar resultados recientes sobre bifurcación en sistemas diferenciales polinomiales en [6] y [7].

Para el análisis del sistema diferencial lineal multiparamétrico utilizamos las diferentes técnicas estudiadas en [3], [4] y [5], las cuales tienen antecedentes de estudios en [1] y [2]. Calculamos los estados estacionarios del sistema tanto en el plano finito como en el infinito, analizando la estabilidad en cada uno de ellos, finalizando con los retratos de fase global del sistema diferencial lineal multiparamétrico.

Preliminares

En esta sección enunciaremos algunos teoremas que utilizaremos para el estudio del sistema.

Teorema 2.1 ([3]). *Puntos singulares semi-hiperbólicos.* Sea $(0,0)$ un punto singular aislado del campo vectorial X dado por:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(x, y) \\ \dot{y} &= \lambda y + B(x, y)\end{aligned}\tag{6.3}$$

donde A y B son analíticas en una vecindad del origen con $A(0,0) = B(0,0) = DA(0,0) = DB(0,0) = 0$ y $\lambda > 0$. Sea $y = f(x)$ la solución de la ecuación $\lambda y + B(x, y) = 0$ en una vecindad del punto $(0,0)$; y, supongamos que la función $g(x) = A(x, f(x))$ tiene la expresión $g(x) = a_m x^m + o(x^m)$, donde $m \leq 2$ y $a_m \neq 0$. Entonces, siempre existe una curva analítica invariante, llamada múltiple fuerte inestable, tangente en 0 al eje y , en la que X se conjuga analíticamente con:

$$\dot{y} = \lambda y$$

representa un comportamiento repelente, ya que $\lambda > 0$. Además, las siguientes afirmaciones son válidas:

- i) Si m es impar y $a_m < 0$, entonces $(0,0)$ es topológicamente un punto silla. Tangente al eje x hay una curva C^∞ invariante única, llamada colector central, en la que X es C^∞ conjugado con:

$$\dot{y} = -x^m(1 + a x^{m-1})$$

para algún $a \in \mathbb{R}$. Si esta curva invariante es analítica, entonces X es C^∞ conjugado al anterior sistema. El sistema X es C^∞ conjugado a:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x^m(1 + a x^{m-1}) \\ \dot{y} &= \lambda y\end{aligned}$$

y es C^0 conjugado con:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x \\ \dot{y} &= y\end{aligned}$$

ii) Si m es impar y $a_m > 0$, entonces $(0,0)$ es un nodo inestable. Cada punto que no pertenece al múltiple inestable fuerte se encuentra en una curva C^∞ invariante, llamada múltiple central, tangente al eje x en el origen, y en la que X es conjugado C^∞ conjugado a:

$$\dot{y} = x^m(1 + a x^{m-1})$$

para algunos $a \in \mathbb{R}$. Todos estos colectores centrales son mutuamente infinitamente tangentes entre sí y, por lo tanto, a lo sumo uno de ellos puede ser analítico, en cuyo caso X es un conjugado C^w en el sistema anterior. El sistema X es C^∞ conjugado a:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^m(1 + a x^{m-1}) \\ \dot{y} &= \lambda y\end{aligned}$$

y es C^0 conjugado con:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x \\ \dot{y} &= y\end{aligned}$$

iii) Si m es par, entonces $(0,0)$ es un silla-nodo, es decir, un punto singular cuya vecindad es la unión de un sector parabólico y dos sectores hiperbólicos. Cambiando x en $-x$, suponemos que $a_m > 0$. Cada punto a la derecha de la variedad fuertemente inestable (lado $x > 0$) se encuentra en una curva C^∞ invariante, llamada variedad central, tangente al eje x en el origen, y en la que X es C^∞ conjugado a:

$$\dot{y} = x^m(1 + a x^{m-1})$$

para algún $a \in \mathbb{R}$. Todas las variedades centrales coinciden en el lado $x \leq 0$ y, por lo tanto, son infinitamente tangentes en el origen. Como máximo, una de estas variedades centrales puede ser analítica, en cuyo caso X es un conjugado C^∞ . El sistema X es C^∞ conjugado a:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^m(1 + ax^{m-1}) \\ \dot{y} &= \lambda y\end{aligned}$$

y es C^0 conjugado con:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^2 \\ \dot{y} &= y\end{aligned}$$

Consideraremos el sistema polinomial diferencial:

$$\dot{x} = P(x, y) \quad \dot{y} = Q(x, y) \tag{6.4}$$

donde $P, Q \in \mathbb{R}[x, y]$.

Corolario 2.2 ([8], p. 230). Sea H la integral primera del sistema (6.4). Si H es no-constante en ningun conjunto abierto, entonces no existen ciclos límites.

Los siguientes teoremas permiten calcular los puntos críticos en el infinito para el sistema.

Teorema 2.3 ([4], 271). Los puntos críticos en el infinito para el sistema polinomial de grado m (6.4) ocurren en los puntos $(X, Y, 0)$, en el ecuador de la esfera de Poincaré, donde $X^2 + Y^2 = 1$

y

$$XQ_m(X, Y) - YP_m(X, Y) = 0, \tag{6.5}$$

o de forma equivalente en los ángulos polares θ_j y $\theta_j + \pi$, que satisfacen $G_{m+1}(\theta) \equiv \cos(\theta)Q_m(\cos(\theta), \sin(\theta)) - \sin(\theta)P_m(\cos(\theta), \sin(\theta)) = 0$.

Esta ecuación tiene a lo más $m + 1$ pares de raíces θ_j y $\theta_j + \pi$, siendo $G_{m+1}(\theta)$ idénticamente igual a cero.

Teorema 2.4 ([4], p. 272). El flujo definido por (6.4) en una vecindad de cualquier punto crítico de (6.4), en el ecuador de la esfera de Poincaré S^2 , excepto en los puntos $(0, \pm 1, 0)$, es topológicamente equivalente al flujo definido por el sistema:

$$\begin{aligned}\pm \dot{y} &= yz^m P(1/z, y/z) - z^m Q(1/z, y/z) \\ \pm \dot{z} &= z^{m+1} P(1/z, y/z)\end{aligned}$$

los signos son determinados por el flujo en el ecuador de S^2 , tal como en (6.5). De forma similar, el flujo definido por (6.4) en una vecindad de cualquier punto crítico de (6.4), en el ecuador de la esfera de Poincaré S^2 , excepto en los puntos $(\pm 1, 0, 0)$, es topológicamente equivalente al flujo definido por el sistema:

$$\begin{aligned}\pm \dot{x} &= xz^m Q(x/z, 1/z) - z^r P(x/z, 1/z) \\ \pm \dot{z} &= z^{r+1} Q(x/z, 1/z),\end{aligned}$$

los signos son determinados por el flujo en el ecuador de S^2 , tal como en (6.5).

Regiones paramétricas

Estas regiones nos permitirán determinar la estabilidad del sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= 2(a + b)y - (a^2 + c + b^2)x\end{aligned}\tag{6.6}$$

con $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Para hacer el estudio de este sistema de ecuaciones diferenciales, dividiremos R^3 en las siguientes regiones:

$$E_1 = \{(a, b, c) \mid 2ab - c > 0, a + b > 0, c > 0\}$$

$$E_2 = \{(a, b, c) \mid 2ab - c = 0, a + b > 0, c > 0\}$$

$$E_3 = \{(a, b, c) \mid c < 0, a + b > 0, 2ab - c = 0, a^2 + b^2 + c > 0, a > 0, b < 0\}$$

- $$E_4 = \{(a, b, c) \mid c < 0, a + b > 0, a^2 + b^2 + c > 0, 2ab - c > 0\}$$
- $$E_5 = \{(a, b, c) \mid c < 0, a + b > 0, 2ab - c = 0, a^2 + b^2 + c > 0, a < 0, b > 0\}$$
- $$E_6 = \{(a, b, 0) \mid ab > 0, a + b \geq 0\}$$
- $$E_7 = \{(a, b, c) \mid 2ab - c = 0, a + b < 0, c > 0\}$$
- $$E_8 = \{(a, b, c) \mid 2ab - c > 0, a + b < 0, c > 0\}$$
- $$E_9 = \{(a, b, c) \mid c < 0, a + b < 0, 2ab - c = 0, a^2 + b^2 + c > 0, a > 0, b < 0\}$$
- $$E_{10} = \{(a, b, c) \mid c < 0, a + b < 0, a^2 + b^2 + c > 0, 2ab - c > 0\}$$
- $$E_{11} = \{(a, b, c) \mid c < 0, a + b < 0, 2ab - c = 0, a^2 + b^2 + c > 0, a < 0, b > 0\}$$
- $$E_{12} = \{(a, b, 0) \mid ab > 0, a + b < 0\}$$
- $$E_{13} = \{(a, b, c) \mid c < 0, a + b < 0, a^2 + b^2 + c < 0, 2ab - c > 0\}$$
- $$E_{14} = \{(a, b, c) \mid c < 0, a + b > 0, a^2 + b^2 + c < 0, 2ab - c > 0\}$$
- $$E_{15} = \{(a, b, c) \mid c < 0, a + b = 0, a^2 + b^2 + c < 0, 2ab - c > 0\}$$
- $$E_{16} = \{(a, b, c) \mid 2ab - c < 0, a + b > 0, c > 0\}$$
- $$E_{17} = \{(a, b, c) \mid c < 0, a + b > 0, 2ab - c < 0, a^2 + b^2 + c > 0, a > 0, b < 0\}$$
- $$E_{18} = \{(a, b, c) \mid c < 0, 2ab - c < 0, a + b > 0, a^2 + b^2 + c > 0, a < 0, b > 0\}$$
- $$E_{19} = \{(a, b, 0) \mid ab < 0, a + b > 0\}$$
- $$E_{20} = \{(a, b, c) \mid 2ab - c < 0, a + b < 0, c > 0\}$$
- $$E_{21} = \{(a, b, c) \mid c < 0, a + b < 0, 2ab - c < 0, a^2 + b^2 + c > 0, a > 0, b < 0\}$$
- $$E_{22} = \{(a, b, c) \mid c < 0, a + b < 0, 2ab - c < 0, a^2 + b^2 + c > 0, a < 0, b > 0\}$$
- $$E_{23} = \{(a, b, 0) \mid ab < 0, a + b < 0\}$$
- $$E_{24} = \{(a, b, c) \mid 2ab - c < 0, a + b = 0, c > 0\}$$
- $$E_{25} = \{(a, b, c) \mid c < 0, a + b = 0, 2ab - c < 0, a^2 + b^2 + c > 0, a > 0, b < 0\}$$
- $$E_{26} = \{(a, b, c) \mid c < 0, a + b = 0, 2ab - c < 0, a^2 + b^2 + c > 0, a < 0, b > 0\}$$

$$E_{27} = \{(a, b, 0) \mid ab < 0, a + b = 0\}$$

$$E_{28} = \{(a, b, c) \mid c < 0, a + b > 0, a^2 + b^2 + c = 0, 2ab - c > 0\}$$

$$E_{29} = \{(a, b, c) \mid c < 0, a + b < 0, a^2 + b^2 + c = 0, 2ab - c > 0\}$$

$$E_{30} = \{(0, 0, 0)\}$$

$$E_{31} = \{(a, b, c) \mid c < 0, a + b = 0, a^2 + b^2 + c = 0, 2ab - c = 0\}$$

Proposición 6.1. La familia $\{E_i\}_{i=1}^{31}$ es una partición de \mathbb{R}^3 .

Prueba. En efecto $\mathbb{R}^3 = \bigcup_{k=1}^{31} E_k$; además, $E_j \cap E_i = \emptyset$ para $i \neq j$ donde $i, j \in \{1, 2, 3, \dots, 31\}$.

Definamos las siguientes regiones:

$$A_1 = \{(a, b, c) \mid 2ab - c \geq 0, a + b > 0, a^2 + b^2 + c > 0, c \in \mathbb{R}\}$$

$$A_2 = \{(a, b, c) \mid 2ab - c \geq 0, a + b < 0, a^2 + b^2 + c > 0, c \in \mathbb{R}\}$$

$$A_3 = \{(a, b, c) \mid 2ab - c > 0, a^2 + b^2 + c < 0, a + b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}\}$$

$$A_4 = \{(a, b, c) \mid 2ab - c < 0, a + b > 0, a^2 + b^2 + c > 0, c \in \mathbb{R}\}$$

$$A_5 = \{(a, b, c) \mid 2ab - c < 0, a + b < 0, a^2 + b^2 + c > 0, c \in \mathbb{R}\}$$

$$A_6 = \{(a, b, c) \mid 2ab - c < 0, a + b = 0, a^2 + b^2 + c > 0, c \in \mathbb{R}\}$$

$$A_7 = \{(a, b, c) \mid 2ab - c \geq 0, a^2 + b^2 + c = 0, c \in \mathbb{R}, a + b \in \mathbb{R}\}$$

Proposición 6.2. La familia $\{A_i\}_{i=1}^7$ es una partición de \mathbb{R}^3 .

Prueba. En efecto,

$$A_1 = \{(a, b, c) \mid 2ab - c \geq 0, a + b > 0, a^2 + b^2 + c > 0, c \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{(a, b, c) \mid 2ab - c > 0, a + b > 0, a^2 + b^2 + c > 0, c > 0\}$$

$$\cup = \{(a, b, c) \mid 2ab - c = 0, a + b > 0, a^2 + b^2 + c > 0, a > 0, b < 0, c > 0\}$$

$$\cup = \{(a, b, c) \mid 2ab - c = 0, a + b > 0, a^2 + b^2 + c > 0, c < 0\}$$

$$\cup = \{(a, b, c) \mid 2ab - c = 0, a + b > 0, a^2 + b^2 + c > 0, a < 0, b > 0, c < 0\}$$

$$U = \{(a, b, c) \mid 2ab - c \geq 0, a + b \geq 0, c = 0\}$$

$$= E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 \cup E_5 \cup E_6$$

$$A_1 = \bigcup_{k=1}^6 E_k$$

En forma análoga, tenemos que:

$$A_2 = \bigcup_{k=7}^{12} E_k, \quad A_3 = \bigcup_{k=13}^{15} E_k, \quad A_4 = \bigcup_{k=16}^{19} E_k, \quad A_5 = \bigcup_{k=20}^{23} E_k,$$

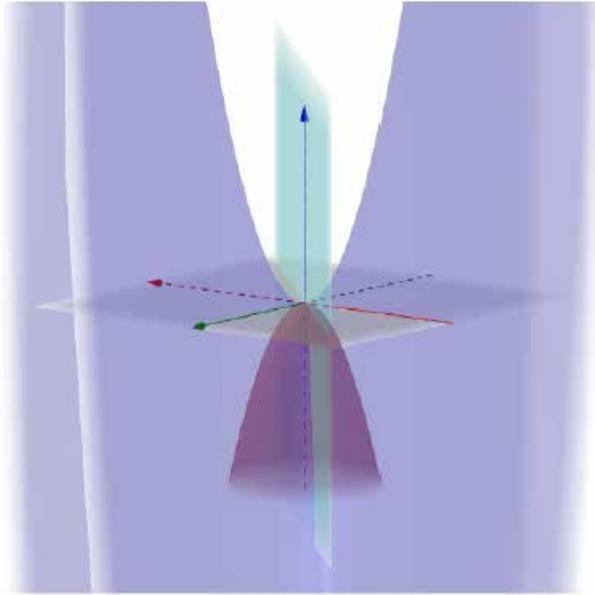
$$A_6 = \bigcup_{k=24}^{27} E_k, \quad A_7 = \bigcup_{k=28}^{31} E_k$$

Así que

$$\bigcup_{j=1}^7 A_j = \bigcup_{k=1}^{31} E_k = \mathbb{R}^3$$

Además $A_j \cap A_i = \emptyset$, $i \neq j$

Por lo tanto, $\{A_j\}_{j=1}^7$ es una partición de \mathbb{R}^3 .

Figura 6.1. Superficie paramétrica del sistema

Fuente: elaboración propia.

Proposición 6.3. Dado el sistema diferencial (6.6), entonces:

- Si $a^2 + b^2 + c \neq 0$, $(0,0)$ es el único punto crítico del sistema diferencial (6.6).
- Si $a^2 + b^2 + c = 0$, el sistema diferencial tiene infinitos puntos críticos.

Análisis de la estabilidad local del punto crítico

En esta sección estudiaremos la estabilidad del punto crítico del sistema diferencial (6.6), en las regiones donde $a^2 + b^2 + c \neq 0$.

En estas regiones, $(0,0)$ es el único punto crítico, así que el jacobiano asociado al sistema diferencial (6.6) viene dado por:

$$Df(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(a^2 + b^2 + c) & 2(a + b) \end{bmatrix}$$

Lo valores propios asociados a la matriz jacobiana son:

$$\lambda_{1,2} = (a + b) \pm \sqrt{2ab - c}$$

Proposición 6.4. Si $(a, b, c) \in A_1$, entonces $(0,0)$ es un nodo repulsor.

Prueba. $(a, b, c) \in A_1$, entonces

$$2ab - c \geq 0, \quad a + b > 0, \quad a^2 + b^2 + c > 0, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Como $\lambda_1 = (a + b) + \sqrt{2ab - c} > 0$ y $\lambda_1 \lambda_2 = a^2 + b^2 + c > 0$, se tiene que $\lambda_2 > 0$. Así que $(0,0)$ es un nodo repulsor.

Proposición 6.5. Si $(a, b, c) \in A_2$, entonces $(0,0)$ es un nodo atractor.

Prueba. $(a, b, c) \in A_2$, entonces

$$2ab - c \geq 0, \quad a + b < 0, \quad a^2 + b^2 + c > 0, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Además, como $\lambda_2 = (a + b) - \sqrt{2ab - c} < 0$ y $\lambda_1 \lambda_2 = a^2 + b^2 + c > 0$, se tiene que $\lambda_1 < 0$.

Por lo tanto, $(0,0)$ es un nodo atractor.

Proposición 6.6. Si $(a, b, c) \in A_3$, entonces $(0,0)$ es un punto silla.

Prueba. $(a, b, c) \in A_3$, entonces $2ab - c > 0, \quad a^2 + b^2 + c < 0$.

Además, como $\lambda_1 = (a + b) + \sqrt{2ab - c} > 0$ y $\lambda_1 \lambda_2 = a^2 + b^2 + c < 0$, se tiene que $\lambda_2 < 0$.

Por lo tanto, $(0,0)$ es un punto silla.

Proposición 6.7. Dado $(a, b, c) \in A_4$, entonces $(0,0)$ es un foco repulsor.

Prueba. $(a, b, c) \in A_4$, entonces

$$2ab - c < 0, \quad a + b > 0, \quad a^2 + b^2 + c > 0.$$

Así que $\lambda_1 = (a + b) + i\sqrt{c - 2ab}$ y $\lambda_2 = (a + b) - i\sqrt{c - 2ab}$

Por lo tanto, $(0,0)$ es un foco repulsor.

Proposición 6.8. Dado $(a, b, c) \in A_5$, entonces $(0,0)$ es un foco atractor.

Prueba. $(a, b, c) \in A_5$, entonces

$$2ab - c < 0, \quad a + b < 0, \quad a^2 + b^2 + c > 0.$$

Así que $\lambda_1 = (a + b) + i\sqrt{c - 2ab}$ y $\lambda_2 = (a + b) - i\sqrt{c - 2ab}$

Por lo tanto, $(0,0)$ es un foco atractor.

Proposición 6.9. $(a, b, c) \in A_6$, entonces $(0,0)$ es un centro.

Prueba. $(a, b, c) \in A_6$, entonces

$$2ab - c < 0, \quad a + b = 0, \quad a^2 + b^2 + c > 0.$$

Así que $\lambda_1 = i\sqrt{c - 2ab}$ y $\lambda_2 = -i\sqrt{c - 2ab}$

Por lo tanto, $(0,0)$ es un centro.

Análisis del sistema con infinitos puntos críticos

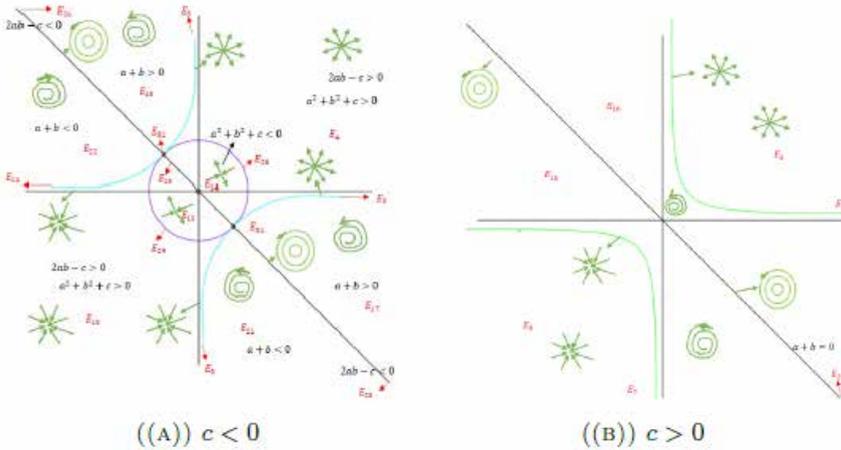
Proposición 6.10. $(a, b, c) \in A_7$, entonces el sistema tiene infinitos puntos críticos.

Prueba. $(a, b, c) \in A_7$, entonces $(a, b, c) \in \bigcup_{k=28}^{31} E_k$ y $a^2 + b^2 + c = 0$, así que el sistema tiene infinitos puntos críticos.

Por otra parte, si $(a, b, c) \in E_{28} \cup E_{29}$, se tiene que $a + b \neq 0$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = 2(a + b), \text{ luego } y = 2(a + b)x + k.$$

Si $(a, b, c) \in E_{30} \cup E_{31}$, se tiene que $\frac{dy}{dx} = 0$, entonces $y = k$.

Figura 6.2. Proyecciones de superficies paramétricas

Fuente: elaboración propia.

Integrales primeras

Proposición 6.11. Dado el sistema diferencial (6.6), entonces:

- Si $a^2 + b^2 + c = 0$, entonces $f(x, y) = y - 2(a + b)x$ es una integral primera.
- Si $a^2 + b^2 + c \neq 0$, $2ab - c > 0$, entonces:

$$f(x, y) = [y - (a + b + \sqrt{2ab - c})x]^{r_1} [y - (a + b - \sqrt{2ab - c})x]^{r_2}$$

es una integral primera, donde $r_1 = \left(\frac{a+b+\sqrt{2ab-c}}{2\sqrt{2ab-c}} \right)$ y $r_2 = \left(\frac{-(a+b)+\sqrt{2ab-c}}{2\sqrt{2ab-c}} \right)$.

- Si $a^2 + b^2 + c > 0$, $2ab - c < 0$, entonces:

$$f(x, y) = \ln|y^2 - (a + b)xy + (a^2 + b^2 + c)x^2| + \frac{a+b}{\sqrt{c-2ab}} \arctan \left[\frac{y-(a+b)x}{x\sqrt{c-2ab}} \right],$$

es una integral primera.

- Si $2ab - c = 0$, entonces $f(x, y) = \ln|y - (a + b)x| - \frac{(a+b)x}{y - (a+b)x}$ es una integral primera.

Prueba.

- Si $a^2 + b^2 + c = 0$, el sistema nos queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= 2(a + b)y \end{aligned} \quad (6.7)$$

Así que $\frac{dy}{dx} = 2(a + b)$, luego $y = 2(a + b)x + k$, entonces $f(x, y) = y - 2(a + b)x$ es una integral primera.

Por otra parte, si $a^2 + b^2 + c \neq 0$, se tiene que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(a + b)y - (a^2 + b^2 + c)x}{y}$$

Sea $y = vx$, entonces $v + x \frac{dv}{dx} = \frac{2(a+b)v - (a^2 + b^2 + c)}{v}$, luego:

$$\frac{dv}{v^2 - 2(a + b)v + a^2 + b^2 + c} + \frac{dx}{x} = 0$$

Además, $v^2 - 2(a + b)v + a^2 + b^2 + c = (v - (a + b))^2 - 2ab + c$.

- Si $2ab - c > 0$, se tiene:

$$v^2 - 2(a + b)v + a^2 + b^2 + c = (v - (a + b + \sqrt{2ab + c}))(v - (a + b - \sqrt{2ab - c}))$$

luego:

$$\frac{v dv}{(v - (a + b + \sqrt{2ab + c}))(v - (a + b - \sqrt{2ab - c}))} + \frac{dx}{x} = 0$$

por lo tanto,

$$(y - (a + b - \sqrt{2ab - c})x)^{r_1} (y - (a + b + \sqrt{2ab - c})x)^{r_2} = k, \text{ luego}$$

$$f(x, y) = [y - (a + b + \sqrt{2ab - c})x]^{r_1} [y - (a + b - \sqrt{2ab - c})x]^{r_2}$$

es una integral primera, donde $r_1 = \left(\frac{a+b+\sqrt{2ab-c}}{2\sqrt{2ab-c}}\right)$ y $r_2 = \left(\frac{-(a+b)+\sqrt{2ab-c}}{2\sqrt{2ab-c}}\right)$.

● Si $2ab - c < 0$, se tiene:

$$v^2 - (a + b)v + a^2 + b^2 + c = (c - 2ab) \left[\left(\frac{v - (a + b)}{\sqrt{c - 2ab}} \right)^2 + 1 \right]$$

luego:

$$\frac{v}{v^2 - (a + b)v + a^2 + b^2 + c} = \frac{v - \frac{(a + b)}{2}}{v^2 - (a + b)v + a^2 + b^2 + c} + \frac{\frac{(a + b)}{2}}{(c - 2ab) \left[\left(\frac{v - (a + b)}{\sqrt{c - 2ab}} \right)^2 + 1 \right]}$$

entonces,

$$\frac{1}{2} \ln \left(\frac{y^2 - (a + b)xy + (a^2 + b^2 + c)x^2}{x^2} \right) + \frac{a + b}{2\sqrt{c - 2ab}} \arctan \left(\frac{y - (a + b)x}{x\sqrt{c - 2ab}} \right) + \ln x = k$$

luego:

$$\ln(y^2 - (a + b)xy + (a^2 + b^2 + c)x^2) + \frac{a + b}{\sqrt{c - 2ab}} \arctan \left(\frac{y - (a + b)x}{x\sqrt{c - 2ab}} \right) = k$$

luego:

$$f(x, y) = \ln(y^2 - (a + b)xy + (a^2 + b^2 + c)x^2) + \frac{a + b}{\sqrt{c - 2ab}} \arctan \left(\frac{y - (a + b)x}{x\sqrt{c - 2ab}} \right)$$

es una integral primera.

● Si $2ab - c = 0$, $v^2 - (a + b)v + a^2 + b^2 + c = (v - (a + b))^2$

Así que:

$$\frac{v}{[v - (a + b)]^2} = \frac{v - (a + b)}{[v - (a + b)]^2} + \frac{a + b}{[v - (a + b)]^2}$$

por lo tanto:

$$\ln|v - (a + b)| - \frac{(a + b)}{(v - (a + b))} + \ln x = k$$

entonces,

$$\ln|y - (a + b)x| - \frac{(a+b)x}{y(a+b)x} = k, \text{ luego } f(x, y) = \ln|y - (a + b)x| - \frac{(a+b)x}{y(a+b)x}$$

es una integral primera.

Análisis de bifurcaciones

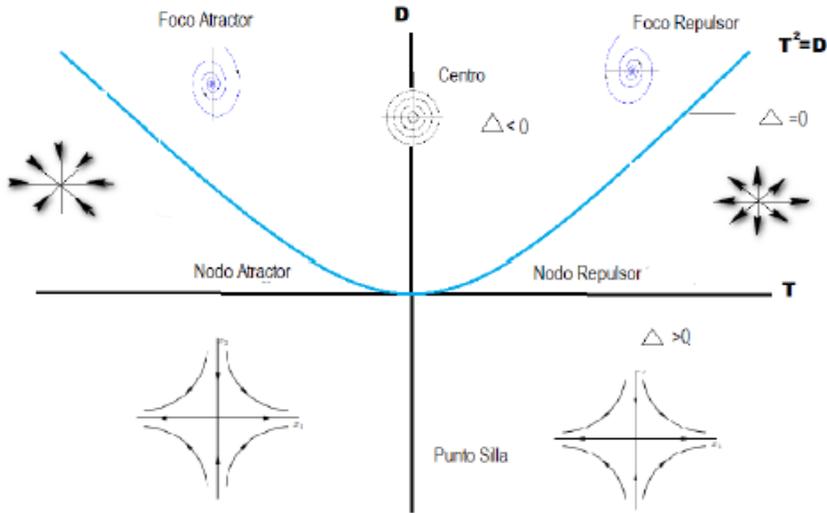
La información que tenemos al respecto del comportamiento de las trayectorias de acuerdo con los valores propios podemos resumirla en un plano determinado por: $T = a + b$ y $D = a^2 + b^2 + c$.

Este plano nos ayuda a estudiar con T y D , las relaciones que entre ellos determinan el comportamiento de las trayectorias del sistema lineal.

El plano (T, D) está dividido por los ejes $D = 0$, $T = 0$ y la parábola $T^2 = D$, $\Delta = T^2 - D$, que divide los casos $\Delta > 0$ y $\Delta < 0$.

Diagrama de bifurcación

La siguiente gráfica muestra los diferentes casos dependiendo de los parámetros T y D . Se denomina diagrama de bifurcación:

Figura 6.3. Diagrama de bifurcación

Fuente: elaboración propia.

Como puede verse en la figura, la superficie $a + b = 0$ $a^2 + b^2 + c > 0$ y $2b - c < 0$, es una superficie de bifurcación.

Clases de bifurcaciones

Las bifurcaciones pueden ser locales o globales. Las bifurcaciones locales reflejan el cambio de estabilidad que sucede en el plano de fases, en las proximidades de una órbita periódica o de un punto fijo del sistema. Las bifurcaciones globales ocurren normalmente en mayores conjuntos invariantes del sistema. Por lo tanto, no pueden ser detectadas exclusivamente mediante el análisis de los puntos de equilibrio.

Las bifurcaciones locales ocurren solo cuando un cambio de los valores de los parámetros convierte el punto de equilibrio en no hiperbólico. Así, una forma sencilla de establecer cuándo ocurre una bifurcación local en el sistema (6.6) es determinando los valores de los parámetros en los cuales el jacobiano asociado al sistema tiene un autovalor cero o un par de

autovalores complejos puramente imaginarios. A continuación, detallamos algunas de las diferentes bifurcaciones locales:

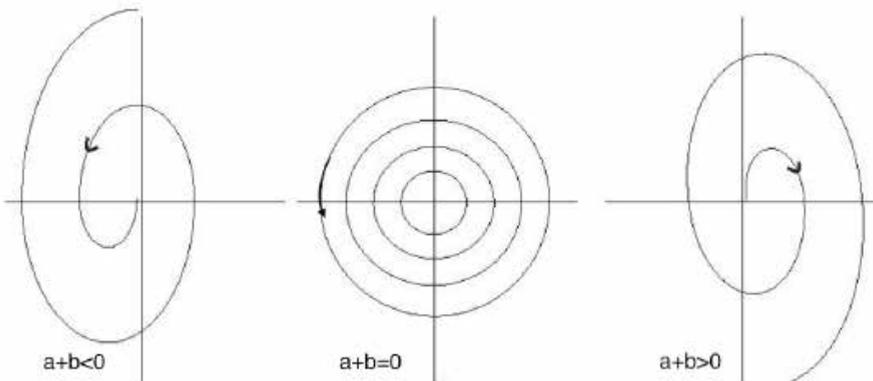
1. *Bifurcación vertical*: En la región $a^2 + b^2 + c > 0$, $2ab - c < 0$, cuando $a + b < 0$, las soluciones del sistema corresponden a focos atractores y confluyen al origen a medida que t aumenta, por lo que el origen es un punto de equilibrio estable tipo sumidero.

Cuando $a + b = 0$, todas las soluciones son periódicas, por lo que el origen es un centro.

Cuando $a + b > 0$, las soluciones del sistema corresponden a focos repulsores que parten del origen y se alejan de él a medida que t aumenta, por lo que el origen es un punto de equilibrio inestable, tipo fuente.

Para $a^2 + b^2 + c > 0$, $2ab - c < 0$, $a + b \neq 0$.

Figura 6.4. Superficie $a^2+b^2+c>0$ y $2ab-c<0$



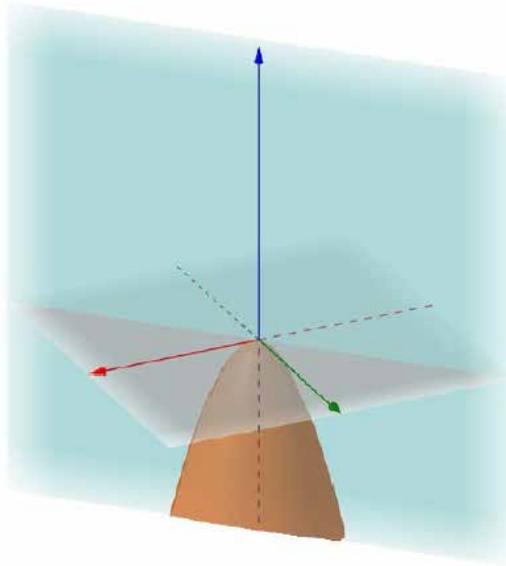
Fuente: elaboración propia.

La función:

$$f(x, y) = \ln \|y^2 - (a + b)xy + (a^2 + b^2 + c)x^2\| + \frac{a + b}{\sqrt{c - 2ab}} \arctan \left[\frac{y - (a + b)x}{x\sqrt{c - 2ab}} \right]$$

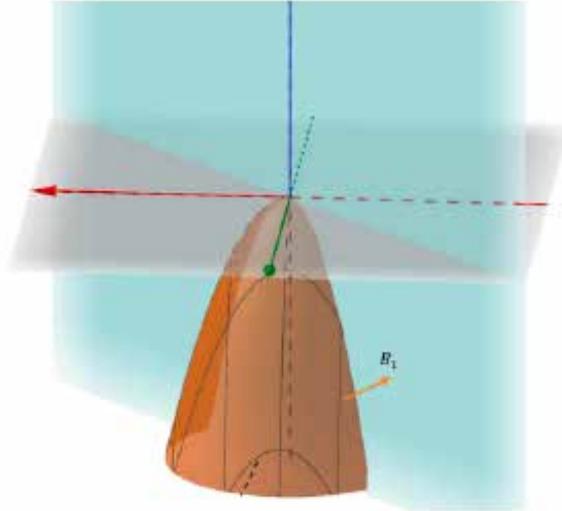
es una integral primera que no es constante en ningún conjunto abierto, entonces por el *Corolario 2.2*, no hay ciclo límite para el sistema en esa región.

Figura 6.5. *Bifurcación vertical*



Fuente: elaboración propia.

En la superficie $B_1 = \{(a, b, c): a^2 + b^2 + c = 0, a + b < 0\}$, el jacobiano asociado al sistema (6.6) tiene un valor propio igual a cero y pequeñas variaciones en sus parámetros; la estabilidad del punto crítico pasa de estable a inestable.

Figura 6.6. Superficie B_1


Fuente: elaboración propia.

En la superficie $B_2 = \{(a, b, c): a^2 + b^2 + c = 0, 2ab - c = 0, a + b = 0\}$, el jacobiano asociado al sistema (6.6) tiene dos valores propios iguales a cero y con cambios pequeños en sus parámetros tenemos diversas situaciones, dado que una vecindad de B_2 contiene puntos en cada una de las siguientes regiones:

$$B_3 = \{(a, b, c): a^2 + b^2 + c > 0, 2ab - c > 0, a + b > 0\}$$

$$B_4 = \{(a, b, c): a^2 + b^2 + c > 0, 2ab - c > 0, a + b < 0\}$$

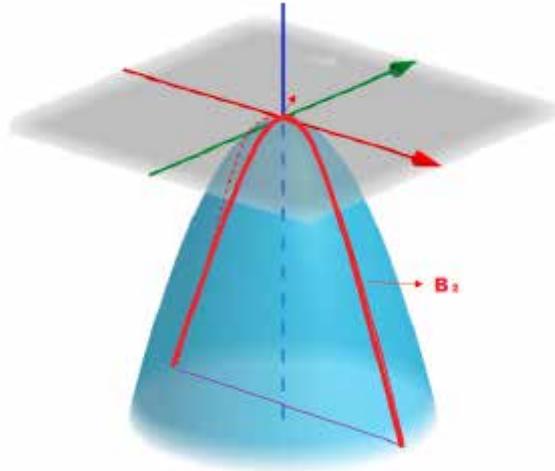
$$B_5 = \{(a, b, c): a^2 + b^2 + c > 0, 2ab - c < 0, a + b > 0\}$$

$$B_6 = \{(a, b, c): a^2 + b^2 + c > 0, 2ab - c < 0, a + b = 0\}$$

$$B_7 = \{(a, b, c): a^2 + b^2 + c < 0, a + b \in \mathbb{R}\}$$

$$B_8 = \{(a, b, c): a^2 + b^2 + c = 0, a + b \in \mathbb{R}\}$$

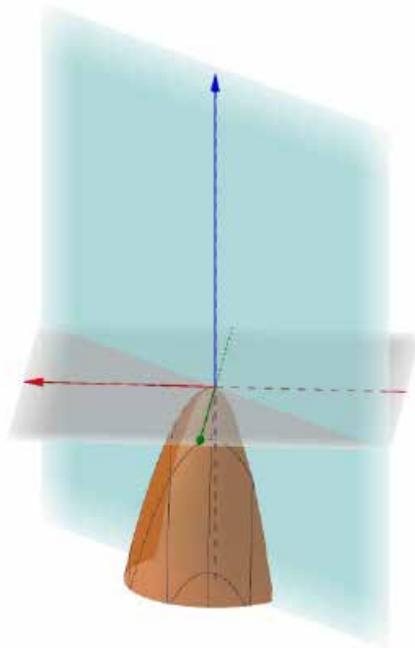
$$B_9 = \{(a, b, c): a^2 + b^2 + c > 0, 2ab - c < 0, a + b = 0\}$$

Figura 6.7. Superficie B_2 

Fuente: elaboración propia.

Puede suceder, por ejemplo que de la superficie B_5 pase a la superficie B_2 y de ahí a la superficie B_3 , o de la superficie B_5 pase a la superficie B_2 y de ahí a la superficie B_4 , o de la superficie B_5 pase a la superficie B_2 y de ahí a la superficie B_6 , o de la superficie B_5 pase a la superficie B_2 y de ahí a la superficie B_7 , o de la superficie B_5 pase a la superficie B_2 y de ahí a la superficie B_8 , o de la superficie B_5 pase a la superficie B_2 y de ahí a la superficie B_9 . Es decir, un foco atractor puede convertirse en un foco repulsor o en un nodo repulsor o en un punto silla o en un centro o en un nodo atractor.

La superficie $B = E_4 \cup E_9 \cup E_{18} \cup E_{29} \cup E_{31}$ es una bifurcación para (6.6) porque separa los puntos críticos estables de los inestables.

Figura 6.8. Superficie B

Fuente: elaboración propia.

Puntos críticos en el infinito

En esta sección estudiaremos los puntos críticos en el infinito para el sistema (6.7) usando una compactificación de Poincaré.

Estudio en la carta U_1

El sistema en la carta U_1 :

$$\begin{aligned} \dot{u} &= u^2 - 2(a+b)u + (a^2 + c + b^2) \\ \dot{v} &= v \end{aligned} \tag{6.8}$$

Lema 6.1. Dado el sistema (6.8), se tiene que:

- Si $a^2 + c + b^2 = 0$ y $a + b = 0$, entonces $(0,0)$ es un punto silla-nodo para el sistema.
- Si $a^2 + c + b^2 = 0$ y $a + b > 0$, entonces $(0,0)$ es un punto silla y $(2(a + b), 0)$ es un nodo atractor.
- Si $a^2 + c + b^2 = 0$ y $a + b < 0$, entonces $(0,0)$ es un nodo atractor y $(2(a + b), 0)$ es un punto silla.
- Si $a^2 + c + b^2 < 0$ y $a + b = 0$, entonces $(\sqrt{-2a^2 - c}, 0)$ es un nodo atractor y $(-\sqrt{-2a^2 - c}, 0)$ es un punto silla.
- Si $a^2 + c + b^2 > 0$ y $a + b = 0$, entonces no existen puntos críticos para el sistema.
- Si $a^2 + c + b^2 < 0$ y $a + b > 0$, entonces $(a + b + \sqrt{2ab - c}, 0)$ es un punto silla y $(a + b \pm \sqrt{2ab - c}, 0)$ es un nodo atractor.
- Si $a^2 + c + b^2 < 0$ y $a + b < 0$, entonces $(a + b + \sqrt{2ab - c}, 0)$ es un nodo atractor y $(a + b - \sqrt{2ab - c}, 0)$ es un punto silla.
- Si $a^2 + c + b^2 > 0$, $a + b < 0$ y $2ab - c > 0$, entonces $(a + b + \sqrt{2ab - c}, 0)$ es un nodo atractor y $(a + b - \sqrt{2ab - c}, 0)$ es un punto silla.
- Si $a^2 + c + b^2 > 0$, $a + b > 0$ y $2ab - c > 0$, entonces $(a + b + \sqrt{2ab - c}, 0)$ es un nodo atractor y $(a + b - \sqrt{2ab - c}, 0)$ es un punto silla.
- Si $a^2 + c + b^2 > 0$, $a + b > 0$ y $2ab - c < 0$, entonces no existen puntos críticos para el sistema.

- Si $a^2 + c + b^2 > 0$, $a + b < 0$ y $2ab - c < 0$, entonces no existen puntos críticos para el sistema.
- Si $a^2 + c + b^2 > 0$, $a + b < 0$ y $2ab - c = 0$, entonces $(a + b, 0)$ es un silla nodo.

Prueba.

- Si $b = -a$, el sistema se reduce a:

$$\begin{aligned}\dot{u} &= u^2 \\ \dot{v} &= v\end{aligned}$$

Así que $\frac{dv}{du} = \frac{v}{u^2}$, luego $cv = e^{-1/u}$.

Por lo tanto, $(0,0)$ es un silla-nodo.

- Si $a^2 + c + b^2 = 0$, el sistema se reduce a:

$$\begin{aligned}\dot{u} &= u^2 - 2(a + b)u \\ \dot{v} &= v\end{aligned}$$

Los puntos críticos del sistema son $(0,0)$ y $(2(a + b),0)$. Luego, si hacemos el estudio de cada punto usando las matrices jacobianas, se tiene que:

$$Df(0,0) = \begin{bmatrix} -2(a + b) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con valores propios $\lambda_1 = -2(a + b)$ and $\lambda_2 = 1$. Es decir, $(0,0)$ es un punto silla; además:

$$Df(2(a + b),0) = \begin{bmatrix} 2(a + b) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con valores propios $\lambda_1 = 2(a + b)$ y $\lambda_2 = 1$; es decir, $(2(a + b),0)$ es un nodo repulsor.

- Si $a^2 + c + b^2 = 0$ y $a + b < 0$, los valores propios para $Df(0,0)$ son $\lambda_1 = 2(a + b)$ y $\lambda_2 = 1$, entonces $(0,0)$ es un nodo atractor y $(2(a + b), 0)$ es un punto silla.
- Si $a + b = 0$, el sistema (6.8) resulta:

$$\begin{aligned}\dot{u} &= u^2 + (a^2 + c + b^2) \\ \dot{v} &= v\end{aligned}$$

Los puntos críticos del sistema son $(\pm\sqrt{-2a^2 - c}, 0)$ y $(\pm\sqrt{-2a^2 - c}, 0)$ y el jacobiano asociado es:

$$Df(\pm\sqrt{-2a^2 - c}, 0) = \begin{bmatrix} \pm 2\sqrt{-2a^2 - c} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces, $(\sqrt{-2a^2 - c}, 0)$ es un nodo repulsor y $(-\sqrt{-2a^2 - c}, 0)$ un punto silla.

- Si $a^2 + c + b^2 > 0$ y $a + b = 0$, entonces la ecuación $u^2 + (a^2 + b^2 + c) = 0$ no tiene soluciones reales, por lo tanto, no existen puntos críticos.
- Si $a^2 + c + b^2 < 0$ y $a + b > 0$, entonces los puntos críticos del sistema son $((a + b) \pm \sqrt{2ab - c}, 0)$ y el jacobiano asociado es:

$$Df((a + b) \pm \sqrt{2ab - c}, 0) = \begin{bmatrix} \pm\sqrt{2ab - c} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Los valores propios son $\lambda_1 = (\pm\sqrt{2ab - c})$ y $\lambda_2 = 1$. Por lo tanto, $((a + b) - \sqrt{2ab - c}, 0)$ es un punto silla y $((a + b) + \sqrt{2ab - c}, 0)$ es un nodo repulsor.

- Si $a^2 + c + b^2 < 0$ y $a + b < 0$, entonces la matriz jacobiana y los valores propios son iguales que en el caso 6, pero, dadas las condiciones iniciales, se tiene que $((a + b) + \sqrt{2ab - c}, 0)$ es un nodo repulsor y $((a + b) - \sqrt{2ab - c}, 0)$ es un punto silla.

- Si $a^2 + c + b^2 > 0$, $a + b < 0$ y $2ab - c > 0$, entonces la matriz jacobiana y valores propios son iguales que en el caso 6, pero, dadas las condiciones iniciales, se tiene que $((a + b) + \sqrt{2ab - c}, 0)$ es un nodo repulsor y $((a + b) - \sqrt{2ab - c}, 0)$ es un punto silla.
- Si $a^2 + c + b^2 > 0$, $a + b > 0$ y $2ab - c > 0$, entonces la matriz jacobiana y valores propios son iguales que en el caso 6, pero, dadas las condiciones iniciales, se tiene que $((a + b) + \sqrt{2ab - c}, 0)$ es un nodo repulsor y $((a + b) - \sqrt{2ab - c}, 0)$ es un punto silla.
- Si $a^2 + c + b^2 > 0$, $a + b > 0$ y $2ab - c < 0$, por la última condición para el sistema no existen puntos críticos.
- Si $a^2 + c + b^2 > 0$, $a + b < 0$ y $2ab - c < 0$, para el sistema no existen puntos críticos.
- Si $a^2 + c + b^2 > 0$, $a + b < 0$ y $2ab - c = 0$, entonces el único punto crítico es $(a + b, 0)$. Si calculamos los valores propios asociados a las matriz jacobiana $Df(((a + b), 0))$, estos son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = -1$.

Haciendo el cambio de variables $u = (a + b) - z$, el sistema topológicamente equivalente con punto crítico en el origen queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= z^2 \\ \dot{v} &= v \end{aligned}$$

Así $\frac{dz}{dv} = \frac{z^2}{v}$ y su solución $cv = e^{-1/z}$, entonces el punto crítico es silla-nodo.

Estudio en la carta U_2

El sistema equivalente en la carta U_2 :

$$\begin{aligned} \dot{u} &= 1 + 2(a+b)u + (a^2 + b^2 + c)u^2 \\ \dot{v} &= -2(a+b)v + (a^2 + b^2 + c)uv \end{aligned} \quad (6.9)$$

Donde $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

Proposición 6.12. Dado el sistema (6.9), se tiene que:

- Si $a^2 + b^2 + c = 0$ y $a + b \neq 0$, el sistema (6.9) tiene como único punto crítico $\left(-\frac{1}{2(a+b)}, 0\right)$.
- Si $a^2 + b^2 + c = 0$ y $a + b = 0$, el sistema (6.9) no tiene puntos críticos.
- Si $a^2 + b^2 + c > 0$ y $2ab - c < 0$, el sistema (6.9) no tiene puntos críticos.
- Si $a^2 + b^2 + c > 0$ y $2ab - c > 0$, el sistema (6.9) tiene dos puntos críticos:

$$\left(\frac{-(a+b)+\sqrt{2ab-c}}{a^2+b^2+c}, 0\right) \text{ y } \left(\frac{-(a+b)-\sqrt{2ab-c}}{a^2+b^2+c}, 0\right)$$

- Si $a^2 + b^2 + c < 0$, el sistema (6.9) tiene dos puntos críticos:

$$\left(\frac{-(a+b)+\sqrt{2ab-c}}{a^2+b^2+c}, 0\right) \text{ y } \left(\frac{-(a+b)-\sqrt{2ab-c}}{a^2+b^2+c}, 0\right)$$

Nota: Sean $P_1 = \left(\frac{-(a+b)+\sqrt{2ab-c}}{a^2+b^2+c}, 0\right)$ y $P_2 = \left(\frac{-(a+b)-\sqrt{2ab-c}}{a^2+b^2+c}, 0\right)$.

Proposición 6.13. Dado el sistema (6.9), entonces:

- Si $a^2 + b^2 + c = 0$ y $a + b \neq 0$, entonces $\left(-\frac{1}{2(a+b)}, 0\right)$ es punto silla.

- Si $a^2 + b^2 + c < 0$ y $a + b = 0$, entonces $\left(\sqrt{\frac{-1}{a^2+b^2+c}}, 0\right)$ es nodo atractor y $\left(-\sqrt{\frac{-1}{a^2+b^2+c}}, 0\right)$ es nodo repulsor.
- Si $a^2 + b^2 + c \geq 0$ y $a + b = 0$, el sistema no tiene puntos críticos.
- Si $a^2 + b^2 + c < -8(a + b)^2$ y $a + b > 0$, entonces P_1 es nodo repulsor y P_2 es nodo atractor.
- Si $a^2 + b^2 + c < -8(a + b)^2$ y $a + b < 0$, entonces P_1 es nodo repulsor y P_2 es nodo atractor.
- Si $a^2 + b^2 + c < 0$, $a^2 + b^2 + c > -8(a + b)^2$ y $a + b > 0$, entonces P_1 es punto silla y P_2 es nodo atractor.
- Si $a^2 + b^2 + c > 0$, $2ab - c > 0$ y $a + b > 0$, entonces P_1 es punto silla y P_2 es nodo atractor.
- Si $a^2 + b^2 + c > 0$, $2ab - c > 0$ y $a + b < 0$, entonces P_1 es nodo repulsor y P_2 es punto silla.
- Si $a^2 + b^2 + c < 0$, $a^2 + b^2 + c > -8(a + b)^2$ y $a + b < 0$, entonces P_1 es nodo repulsor y P_2 es punto silla.
- Si $a^2 + b^2 + c = -8(a + b)^2$ y $a + b \neq 0$, entonces $\left(\frac{1}{2(a+b)}, 0\right)$ es nodo repulsor.

Prueba. Iniciamos analizando el sistema (6.9) en cada una de la regiones establecidas:

- Si $a^2 + b^2 + c = 0$ y $a + b \neq 0$, el sistema asociado es:

$$\dot{u} = 1 + 2(a + b)u$$

$$\dot{v} = -2(a + b)v$$

Así que los valores propios de la matriz jacobiana en $\left(-\frac{1}{2(a+b)}, 0\right)$ son: $\lambda_1 = 2(a+b)$ y $\lambda_2 = -2(a+b)$; por lo tanto, $\left(-\frac{1}{2(a+b)}, 0\right)$ es punto silla.

● Si $a^2 + b^2 + c < 0$ y $a + b = 0$, el sistema asociado es:

$$\begin{aligned}\dot{u} &= 1 + (a^2 + b^2 + c)u^2 \\ \dot{v} &= (a^2 + b^2 + c)uv\end{aligned}$$

Los valores propios de la matriz jacobiana en $\left(\sqrt{\frac{-1}{a^2+b^2+c}}, 0\right)$ son:

$$\lambda_1 = (a^2 + b^2 + c) \sqrt{\frac{-1}{a^2 + b^2 + c}} < 0 \quad \lambda_2 = 2(a^2 + b^2 + c) \sqrt{\frac{-1}{a^2 + b^2 + c}} < 0$$

Así que $\left(\sqrt{\frac{-1}{a^2+b^2+c}}, 0\right)$ es un nodo atractor.

En forma análoga se tiene que: $\lambda_1 = -(a^2 + b^2 + c) \sqrt{\frac{-1}{a^2+b^2+c}} > 0$ y

$\lambda_2 = -2(a^2 + b^2 + c) \sqrt{\frac{-1}{a^2+b^2+c}} > 0$ son los valores propios de la matriz jacobiana en $\left(-\sqrt{\frac{-1}{a^2+b^2+c}}, 0\right)$.

Por lo tanto, $\left(-\sqrt{\frac{-1}{a^2+b^2+c}}, 0\right)$ es un nodo repulsor.

Sean $P_1 = \left(\frac{-(a+b)+\sqrt{2ab-c}}{a^2+b^2+c}, 0\right)$ y $P_2 = \left(\frac{-(a+b)-\sqrt{2ab-c}}{a^2+b^2+c}, 0\right)$.

El jacobiano en P_1 es:

$$J(P_1)=$$

Los valores propios correspondientes son:

$$\lambda_1 = 2\sqrt{2ab - c} \quad y \quad \lambda_2 = -3(a + b) + \sqrt{2ab - c}$$

El jacobiano en P_2 es:

$$J(P_2)=$$

Los valores propios correspondientes son:

$$\lambda_1 = -2\sqrt{2ab - c} \quad y \quad \lambda_2 = -3(a + b) - \sqrt{2ab - c}$$

- Si $a^2 + b^2 + c < -8(a + b)^2$ y $a + b > 0$, se tiene que $9(a + b)^2 < 2ab - c$, luego $3(a + b) < \sqrt{2ab - c}$, así que $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 = -3(a + b) + \sqrt{2ab - c} > 0$.

Por lo tanto P_1 es un nodo repulsor y P_2 es un nodo atractor ya que $\lambda_1 < 0$ y $\lambda_2 < 0$.

- Si $a^2 + b^2 + c < -8(a + b)^2$ y $a + b < 0$, se tiene que $-\sqrt{2ab - c} < -3(a + b) < \sqrt{2ab - c}$, así que $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$, luego P_1 es un nodo repulsor.

Por otro lado, en el punto P_2 se tiene $\lambda_2 = -3(a + b) - \sqrt{2ab - c} < 0$ y $\lambda_1 < 0$, así que P_2 es un nodo atractor.

- Si $a^2 + b^2 + c < 0$, $a^2 + b^2 + c > -8(a + b)^2$ y $a + b > 0$, entonces:

Para P_1 : $\lambda_1 = 2\sqrt{2ab - c} > 0$, por otro lado:

$$\begin{aligned}
 -2ab + c &> -9(a + b)^2 \\
 9(a + b)^2 &> 2ab - c > 0 \\
 3(a + b) &> \sqrt{2ab - c}
 \end{aligned}$$

$\lambda_2 = -3(a + b) + \sqrt{2ab - c} > 0$, así que P_1 es un nodo repulsor.

Para P_2 : $\lambda_1 = -2\sqrt{2ab - c} < 0$ además $\lambda_2 < 0$, así que P_2 es un nodo atractor.

- Si $a^2 + b^2 + c > 0$, $2ab - c > 0$ y $a + b > 0$ entonces:

$$\text{Para } P_1: \lambda_1 = 2\sqrt{2ab - c} > 0.$$

$$\begin{aligned}
 \text{Como } a^2 + b^2 + c > 0 &\Rightarrow a^2 + b^2 + c > -8(a + b)^2 \\
 &\Rightarrow -2ab + c > -9(a + b)^2
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 9(a + b)^2 > 2ab - c \text{ y } a + b > 0$$

$$\Rightarrow 3(a + b) > \sqrt{2ab - c}$$

Luego $\lambda_2 = -3(a + b) + \sqrt{2ab - c} < 0$; por lo tanto, P_1 es un punto silla.

Para P_2 : $\lambda_1 = -2\sqrt{2ab - c} < 0$ además $\lambda_2 = -3(a + b) - \sqrt{2ab - c} < 0$, así que P_2 es un nodo atractor.

- Si $a^2 + b^2 + c > 0$, $2ab - c > 0$ y $a + b < 0$, entonces:

$$\text{Para } P_1: \lambda_1 = 2\sqrt{2ab - c} > 0 \text{ y } \lambda_2 = -3(a + b) + \sqrt{2ab - c} > 0,$$

luego P_1 es nodo repulsor.

$$\text{Para } P_2: \lambda_1 = -2\sqrt{2ab - c} < 0 \text{ además:}$$

$$a^2 + b^2 + c > 0 \Rightarrow a - 2ab + c > -9(a + b)^2$$

$$\Rightarrow 9(a + b)^2 > 2ab - c \text{ y } a + b < 0$$

$$\Rightarrow 3|a + b| > \sqrt{2ab - c} \text{ y } a + b < 0$$

$$\Rightarrow -3(a+b) > \sqrt{2ab-c}$$

Luego $\lambda_2 = -3(a+b) - \sqrt{2ab-c} > 0$; por lo tanto, P_2 es un punto silla.

- Si $a^2 + b^2 + c < 0$, $a^2 + b^2 + c > -8(a+b)^2$ y $a+b < 0$, entonces:

Para P_1 : $\lambda_1 = 2\sqrt{2ab-c} > 0$ y $\lambda_2 = -3(a+b) + \sqrt{2ab-c} > 0$; por lo tanto, P_1 es nodo repulsor.

Para P_2 : $\lambda_1 = -2\sqrt{2ab-c} < 0$ además: $-3(a+b) > \sqrt{2ab-c}$

Luego $\lambda_2 = -3(a+b) - \sqrt{2ab-c} > 0$; por lo tanto, P_2 es un punto silla.

- Si $a^2 + b^2 + c = -8(a+b)^2$ y $a+b \neq 0$, entonces:

$$\dot{u} = 1 + 2(a+b)u - 8(a+b)^2u^2$$

$$\dot{v} = -2(a+b)v - 8(a+b)^2uv$$

así que:

$$\dot{u} = -8(a+b)^2 \left(u - \frac{1}{2(a+b)} \right) \left(u + \frac{1}{4(a+b)} \right)$$

$$\dot{v} = -8(a+b)^2 v \left(\frac{1}{4(a+b)} + u \right)$$

por lo tanto,

$$\frac{du}{dv} = \frac{u - \frac{1}{2(a+b)}}{v}$$

$$\frac{du}{u - \frac{1}{2(a+b)}} = \frac{dv}{v} \Rightarrow \ln \left| u - \frac{1}{2(a+b)} \right| = \ln v + \ln c$$

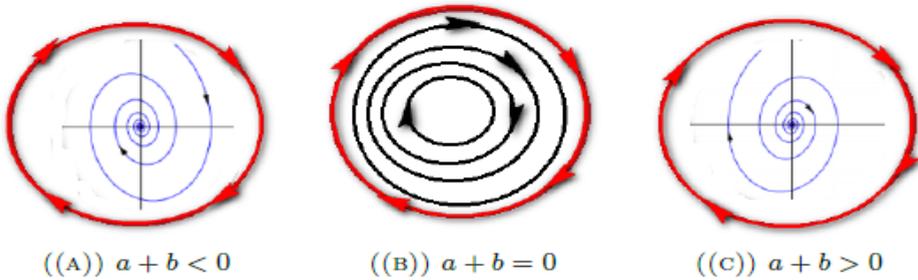
Así que $cv = u - \frac{1}{2(a+b)}$ es una familia de rectas que pasan por $\left(\frac{1}{2(a+b)}, 0\right)$

Por lo tanto, $\left(\frac{1}{2(a+b)}, 0\right)$ es un nodo repulsor.

Retrato de fase global

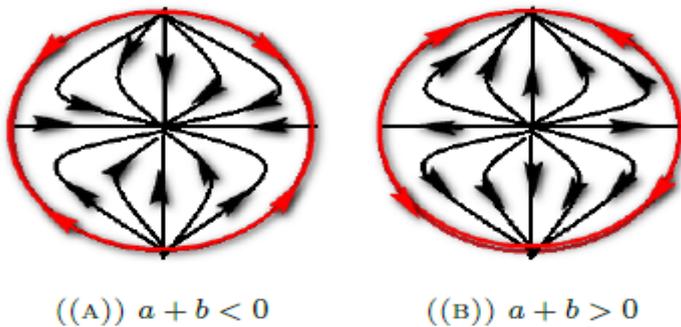
En esta sección presentamos el retrato de fase global del sistema lineal multiparamétrico en cada una de las regiones paramétricas del espacio, de acuerdo con los resultados obtenidos en las secciones anteriores.

Figura 6.9. Región $a^2+b^2+c>0$, $2ab-c<0$



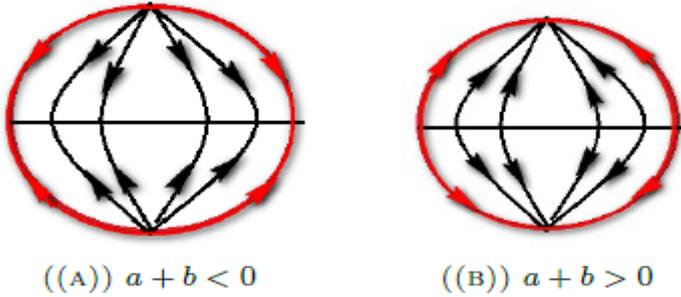
Fuente: elaboración propia.

Figura 6.10. Región $a^2+b^2+c>0$, $2ab-c>0$



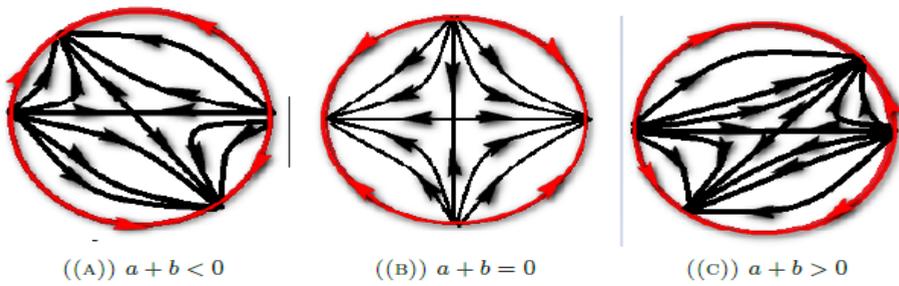
Fuente: elaboración propia.

Figura 6.11. Región $a^2+b^2+c=0, 2ab-c>0$



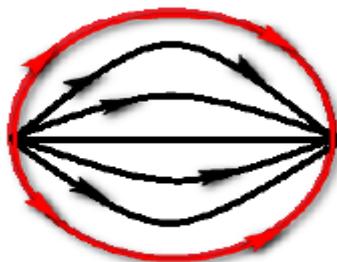
Fuente: elaboración propia.

Figura 6.12. Región $a^2+b^2+c<0, 2ab-c>0$



Fuente: elaboración propia.

Figura 6.13. Región $a^2+b^2+c=0, 2ab-c=0$



Fuente: elaboración propia.

Bibliografía

- [1] P. B. Acosta-Humánez, A. Reyes-Linero y J. Rodríguez-Contreras, "Algebraic and Qualitative Remarks About the Family $yy' = (\alpha x^{m+k-1} + \beta x^{m-k-1})y + \gamma x^{2m-2k-1}$ ", *Open Mathematics*, vol. 17, no. 1, pp. 1220-1238, 2019.
- [2] P. B. Acosta-Humánez, A. Reyes-Linero y J. Rodríguez-Contreras, "Galoisian and Qualitative Approaches to Linear Polyanin-Zaitsev Vector Fields", *Open Mathematics*, vol. 16, no. 1, 1204-1217, 2018.
- [3] F. Dumortier, J. Llibre y J. C. Artés, *Qualitative Theory of Planar Differential Systems* (pp. xvi+-298). Springer, 2006.
- [4] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*, tercera edición. Springer-Verlag New York, 2001.
- [5] J. Guckenheimer, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*. Springer-Verlag New York, 1983.
- [6] V. Gaiko y C. Vuik, "Multi-parameter Planar Dynamical Systems: Global Bifurcations of Limit Cycles. *Dynamical Systems*, vol. 8, pp. 73-88, 2019.
- [7] Y. Tian y. Zhao, "Global Phase Portraits and Bifurcation Diagrams for Hamiltonian Systems of Linear Plus Quartic Homogeneous Polynomials Symmetric with Respect to the y-axis", *Nonlinear Analysis*, vol. 192, 111658, 2020.
- [8] M. Hirsch, S. Smale y R. Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems and an Introduction to Chaos*. Academic Press, 2004.

Capítulo 7

Ciclos límites en un sistema multiparamétrico de la forma

$$\dot{x}=1-x^2+xy \quad \dot{y}=\beta(1-x^2+xy)+mxy$$

Jorge Rodríguez Contreras^{1,2}

Alberto Reyes Linero³

Fiana Jiménez Ochoa⁴

Resumen

En este capítulo hacemos una contribución a algunos de los temas estudiados anteriormente, iniciado con la ecuación de Van Der Pol y la idea de ciclo límite de Poincaré, siempre con el uso de los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias en el plano. Inicialmente, basándonos en el trabajo de Su Guang-jan (véase también [14, p. 284]), demostramos que un sistema diferencial polinomial cuadrático perturbado:

$$\begin{cases} \dot{x} &= a + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 \\ \dot{y} &= b + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 \end{cases}$$

1 Departamento de Matemática y Estadística Universidad del Norte, Barranquilla, Colombia. Correo electrónico: jrodr@uninorte.edu.co.

2 Programa de Matemáticas, Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia. Correo electrónico: jorgelrodriguez@mail.uniatlantico.edu.co.

3 Programa de Matemáticas, Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia. Correo electrónico: jareyeslinero@mail.uniatlantico.edu.co.

4 Programa de Matemáticas, Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia.

tiene como máximo dos ciclos límites. Es un hecho clave en la prueba que los sistemas cuadráticos con una recta invariante tienen como máximo un ciclo límite (véanse [9], [10]), demostrando primero que dicho sistema es equivalentemente afín a cuatro familias. También demostramos que la **Familia IV** (III en el caso $s = 0$) es equivalentemente afín a:

$$\begin{cases} \dot{x} = \epsilon^2 - x^2 + xy \\ \dot{y} = \beta(\epsilon^2 - x^2 + xy) + mxy + sy^2 \end{cases}$$

Y, por último, probamos que es una familia rotatoria de campos vectoriales. Luego, estudiamos el comportamiento de las singularidades de las **Familias I, II y III**, tanto en el plano finito como en el infinito y la técnica del Blow-Up (véanse [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8]).

Existencia de ciclos límites

Dados los sistemas:

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - x^2 + xy \\ \dot{y} = \beta(1 - x^2 + xy) + mxy \end{cases} \quad (7.1)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - x^2 + xy \\ \dot{y} = \beta(1 - x^2 + xy) + mxy + sy^2 \end{cases} \quad (7.2)$$

Lema 7.1. Los sistemas (7.1) y (7.2) tienen a lo más dos ciclos límites.

Prueba.

Probaremos que para $x > 0$ estos sistemas tienen a lo más un ciclo límite.

Sea $\eta = 1 - x^2 + xy$, $x = x$ y $dt = x d\tau$, así que:

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{d\tau} = x\eta \frac{dy}{d\tau} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{d\tau} = x(\beta(1 - x^2 + xy) + mxy + sy^2)$$

luego,

$$\begin{aligned}\frac{d\eta}{d\tau} &= -2x\frac{dx}{d\tau} + y\frac{dx}{d\tau} + x\frac{dy}{d\tau} = -2x^2\eta + xy\eta + x^2(\beta(1-x^2+xy) + mxy + sy^2) \\ &= -2x^2\eta + \eta(\eta - 1 + x^2) + \beta x^2 - \beta x^4 + (\beta + m)x^2(\eta - 1 + x^2) + s(\eta - 1 + x^2)^2 \\ &= (-\eta + (\beta + m)\eta - m + 2s\eta - 2s)x^2 + (m + s)x^4 + ((1 + s)\eta^2 - (2s + 1)\eta + s^2)\end{aligned}$$

Sea $u = x^2$ y $\eta = \eta$, así que:

$$\frac{du}{d\tau} = 2u\tau \frac{d\eta}{d\tau} = ((-1 + \beta + m + 2s)\eta - m - 2s)u + (m + s)u^2 + ((1 + s)\eta^2 - (2s + 1)\eta + s^2)$$

Como en este último sistema $u = 0$ es una recta invariante, se tiene que este sistema tiene a lo más un ciclo límite. Así, los sistemas (7.1) y (7.2) en el plano $x > 0$ tienen a lo más un ciclo límite; por lo tanto, usando el *Lema 7.1* tenemos que a lo más tienen dos ciclos límites.

Singularidades en el plano finito

Proposición.

1. Si $m = 0$, se tiene que $1 - x^2 + xy = 0$ es una curva de puntos críticos.
2. Si $m \neq 0$, los únicos puntos críticos son $(1,0)$ y $(-1,0)$.
 - 2.1. Si $(\beta + m - 2)^2 + 8m > 0$:
 - 2.1.1. $(1,0)$ es un punto silla si $m > 0$.
 - 2.1.2. $(1,0)$ es nodo repulsor si $\beta + m - 2 > 0$ y $m < 0$.
 - 2.1.3. $(1,0)$ es un nodo atractor si $\beta + m - 2 < 0$ y $m < 0$.
 - 2.1.4. $(1,0)$ es punto silla si $\beta + m - 2 = 0$.
 - 2.2. Si $(\beta + m - 2)^2 + 8m = 0$:
 - 2.2.1. $(1,0)$ es un nodo repulsor si $\beta + m - 2 > 0$.
 - 2.2.2. $(1,0)$ es un nodo atractor si $\beta + m - 2 < 0$.
 - 2.3. Si $(\beta + m - 2)^2 + 8m < 0$:

2.3.1. $(1,0)$ es un foco repulsor si $\beta + m - 2 > 0$.

2.3.2. $(1,0)$ es un foco atractor si $\beta + m - 2 < 0$.

2.3.3. $(1,0)$ es un foco débil estable si $\beta + m - 2 = 0$.

Prueba.

La matriz Jacobiana en el punto $(1,0)$ es:

$$Df(1,0) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2\beta & \beta + m \end{bmatrix}$$

De aquí podemos hallar sus valores propios:

$$|\lambda + 2 \quad -1 \quad 2\beta \quad \lambda - \beta - m| = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + (2 - \beta - m)\lambda - 2m = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda = \frac{\beta + m - 2}{2} \pm \frac{\sqrt{(\beta + m - 2)^2 + 8m}}{2}$$

Si $(\beta + m - 2)^2 + 8m > 0$. En el caso de que $m > 0$, se tienen dos raíces de signos contrarios; por lo tanto, $(1,0)$ es un punto silla. Si, por el contrario, $m < 0$ y $\beta + m - 2 > 0$, tenemos dos raíces positivas, así que $(1,0)$ es un nodo repulsor.

Si $\beta + m - 2 = 0$, tenemos que $\lambda_1 \lambda_2 < 0$, entonces $(1,0)$ es un punto silla. Si $\beta + m - 2 < 0$ y $m < 0$, los valores propios son negativos, entonces $(1,0)$ es un nodo atractor.

Si $(\beta + m - 2)^2 + 8m = 0$. En el caso de que $\beta + m - 2 > 0$, tenemos dos valores propios positivos, así que $(1,0)$ es un nodo repulsor. En el otro caso se tienen dos valores propios negativos, entonces $(1,0)$ es un nodo atractor.

Si $(\beta + m - 2)^2 + 8m < 0$. En este caso tenemos que $\lambda_1 = \frac{\beta + m - 2}{2} + i \frac{\sqrt{(\beta + m - 2)^2 + 8m}}{2}$ y $\lambda_2 = \frac{\beta + m - 2}{2} - i \frac{\sqrt{(\beta + m - 2)^2 + 8m}}{2}$; luego, si $\beta + m - 2 > 0$, se tiene que $(1,0)$ es un foco repulsor, y en caso de que $\beta + m - 2 < 0$, tenemos que $(1,0)$ es un foco atractor.

Ahora probaremos que en el caso $\beta + m - 2 = 0$, el punto $(1,0)$ es un foco débil estable.

Sea $u = x - 1$ y $v = y$, entonces tenemos que:

$$\dot{u} = -2u + v + uv - u^2 \quad \dot{v} = -2\beta u + 2v + 2uv - \beta u^2$$

Ahora hallaremos los vectores propios de la matriz jacobiana:

$$[-2 \ 1 \ -2\beta \ 2][v_1 \ v_2] = \lambda[v_1 \ v_2] \Leftrightarrow v_2 = (\lambda + 2)v_1$$

Como $\lambda = \pm i\sqrt{-2m}$, tenemos que:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2\sqrt{-2m} \\ 1 & 0 & -\frac{2}{\sqrt{-2m}} \end{bmatrix}, y, P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{-2m}} \\ 1 & 0 & -\frac{2}{\sqrt{-2m}} \end{bmatrix}$$

Sea:

$$[u \ v] = P[w_1 \ w_2] \Rightarrow [w_1 \ w_2] = P^{-1}[u \ v]$$

así que:

$$u = w_1 \quad v = 2w_1 + \sqrt{-2m} w_2, \quad y, \quad w_1 = u \quad w_2 = -\frac{2}{\sqrt{-2m}}u + \frac{1}{\sqrt{-2m}}v$$

entonces,

$$[\dot{w}_1 \ \dot{w}_2] = P^{-1}[\dot{u} \ \dot{v}] = [0 \ \sqrt{-2m} \ -\sqrt{-2m} \ 0][w_1 \ w_2] + \left[uv - u^2 \ -\frac{\beta + 2}{\sqrt{-2m}}u^2 \right]$$

de aquí tenemos que:

$$\dot{w}_1 = \sqrt{-2m}w_2 + w_1^2 + \sqrt{-2m}w_1w_2 \quad \dot{w}_2 = -\sqrt{-2m}w_1 - \frac{\beta - 2}{\sqrt{-2m}}w_1^2$$

dividiendo entre $-\sqrt{-2m}$:

$$\dot{w}_1 = -w_2 - \frac{1}{\sqrt{-2m}} w_1^2 - w_1 w_2 \dot{w}_2 = w_1 + \frac{1}{2} w_1^2$$

La divergencia de este sistema en $(0,0)$ es $\text{div}(P,Q) = -\frac{2w_1}{\sqrt{-2m}} - w_2|_{(0,0)} = 0$.

También vemos que $a_{20} = -\frac{1}{\sqrt{-2m}}$, $a_{11} = -1$, $a_{02} = 0$, $b_{20} = \frac{1}{2}$, $b_{11} = 0$

y $b_{02} = 0$; luego, $A = -\frac{1}{\sqrt{-2m}}$, $B = \frac{1}{2}$, $\alpha = -1 - (-1) = 0$ y $\beta = -\frac{2}{\sqrt{-2m}}$,

y como $W_1 = A\alpha - B\beta = 0 - \frac{1}{2} \frac{-2}{\sqrt{-2m}} = \frac{1}{\sqrt{-2m}}$. Por lo tanto, $(0,0)$ es un

foco débil inestable, luego $(1,0)$ es un foco débil estable (ya que dividimos el sistema entre $-\sqrt{-2m}$).

Singularidades en el infinito

Proposición.

Sea $\Delta_2 = (\beta + m + 1)^2 - 4\beta$:

$$y_1 = \frac{\beta + m + 1}{2} + \frac{\sqrt{\Delta_2}}{2}$$

$$y_2 = \frac{\beta + m + 1}{2} - \frac{\sqrt{\Delta_2}}{2},$$

entonces:

- $y_1 > 1$ y $y_2 > 1$ en la región R_1 .
- $y_1 < 1$ y $y_2 < 1$ en la región R_2 .
- $y_1 > 1$ y $y_2 < 1$ en la región R_3 .

donde:

$$R_1 = \{(m,\beta) | \beta + m - 1 > 0, m < 0, y, \Delta_2 > 0\} R_2 = \{(m,\beta) | \beta + m - 1 < 0, m < 0, y, \Delta_2 > 0\} R_3 = \{(m,\beta) | m > 0, y, \Delta_2 > 0\}$$

Demstración.

a) $y_1 > 1$ e $y_2 > 1 \Leftrightarrow \beta + m - 1 > \sqrt{\Delta_2} \Leftrightarrow (\beta + m - 1)^2 > \Delta_2 \Leftrightarrow (\beta + m - 1)^2 - (\beta + m + 1)^2 > -4\beta \Leftrightarrow -4(\beta + m) > -4\beta \Leftrightarrow m < 0$

Por lo tanto, $\beta + m - 1 > 0, m < 0, \Delta_2 > 0$, o sea que $(m, \beta) \in R_1$

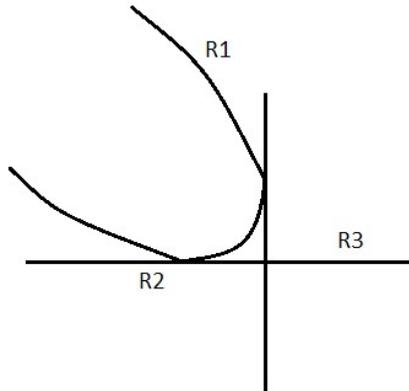
b) $y_1 < 1$ e $y_2 < 1 \Leftrightarrow \beta + m - 1 < -\sqrt{\Delta_2} \Leftrightarrow (\beta + m - 1)^2 > \Delta_2 \Leftrightarrow (\beta + m - 1)^2 - (\beta + m + 1)^2 > -4\beta \Leftrightarrow -4(\beta + m) > -4\beta \Leftrightarrow m < 0$

Por lo tanto, $\beta + m - 1 < 0, m < 0, \Delta_2 > 0$, así que $(m, \beta) \in R_2$.

c) $y_1 > 1, e, y_2 < 1 \Leftrightarrow \beta + m + \sqrt{\Delta_2} > 1, y, \beta + m - \sqrt{\Delta_2} < 1 \Leftrightarrow \beta + m - 1 > -\sqrt{\Delta_2}, y, \beta + m - 1 < \sqrt{\Delta_2} \Leftrightarrow -\sqrt{\Delta_2} < \beta + m - 1 < \sqrt{\Delta_2} \Leftrightarrow (\beta + m - 1)^2 < \Delta_2 \Leftrightarrow -4(\beta + m) < -4\beta \Leftrightarrow m > 0$

Por lo tanto, $(m, \beta) \in R_3$:

Figura 7.1. Regiones



Fuente: elaboración propia.

En la carta U_1

El sistema nos queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= z^2(\beta - y) - y^2 + (\beta + m + 1) \\ \dot{z} &= -z^3 + z(1 - y) \end{aligned}$$

Proposición.

- $(y_1, 0)$ es un nodo atractor e $(y_2, 0)$ es un punto silla, en la región R_1 .
- $(y_1, 0)$ es un punto silla e $(y_2, 0)$ es un nodo repulsor en la región R_2 .
- $(y_1, 0)$ es un nodo atractor e $(y_2, 0)$ es un nodo repulsor, en la región R_3 .
- $(y_3, 0)$ es un silla nodo en el caso de que $\Delta_2 = 0$. Donde,

$$y_1 = \frac{\beta + m + 1}{2} + \frac{\sqrt{\Delta_2}}{2} \quad y_2 = \frac{\beta + m + 1}{2} - \frac{\sqrt{\Delta_2}}{2} \quad y_3 = \frac{\beta + m + 1}{2}$$

Demostración.

Para $z = 0$ se tiene que $y^2 - (\beta + m + 1)y - \beta = 0$, luego $y_1 = \frac{\beta + m + 1}{2} + \frac{\sqrt{\Delta_2}}{2}$ e $y_2 = \frac{\beta + m + 1}{2} - \frac{\sqrt{\Delta_2}}{2}$; de aquí, $(y_1, 0)$ e $(y_2, 0)$ son los únicos puntos críticos en el caso de que $\Delta_2 > 0$.

Sean:

$$Df(y_1, 0) = [-\sqrt{\Delta_2} \ 0 \ 0 \ 1 - y_1], y, Df(y_2, 0) = [-\sqrt{\Delta_2} \ 0 \ 0 \ 1 - y_2]$$

luego, en la región R_1 se tiene que $(y_1, 0)$ es un nodo atractor, ya que los valores propios son negativos y $(y_2, 0)$ es un punto silla, ya que sus valores propios tienen signos opuestos. En R_2 se tiene que $(y_1, 0)$ es punto silla y $(y_2, 0)$ es un nodo repulsor, ya que sus valores propios son negativos. En R_3 se tiene que $(y_1, 0)$ es nodo atractor y $(y_2, 0)$ es nodo repulsor.

En el caso de que $\Delta_2 = 0$, el sistema queda de la siguiente forma:

$$\dot{y} = z^2(\beta - y) - \left(y - \frac{\beta + m + 1}{2}\right)^2 \quad \dot{z} = -z^3 + z(1 - y)$$

y la matriz jacobiana del sistema es:

$$Df(y, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \beta - m}{2} \end{bmatrix}$$

Sea $u = y - \frac{\beta+m+1}{2}$, entonces $\dot{u} = \dot{y}$; así, el sistema nos queda de la siguiente forma:

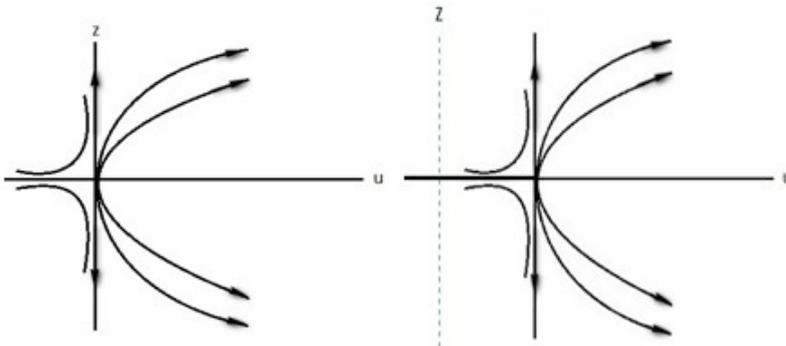
$$\dot{u} = z^2\left(\beta - u - \frac{\beta + m + 1}{2}\right) - u^2 \quad \dot{z} = -z^3 + z\left(\frac{1 - \beta - m}{2} - u\right)$$

dividiendo entre $-\frac{\beta+m-1}{2}$, se tiene que:

$$\dot{u} = \frac{2}{\beta+m-1}u^2 - \frac{\beta-m-1}{\beta+m-1}z^2 + \frac{2}{\beta+m-1}uz^2 \quad \dot{z} = z + \frac{2}{\beta+m-1}uz + \frac{2}{\beta+m-1}z^3$$

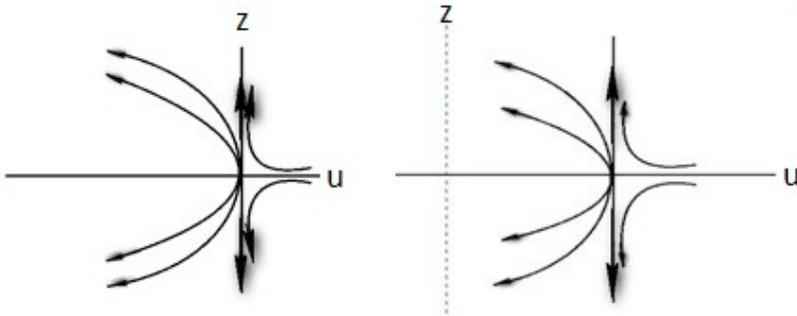
Así, del Teorema 1.3 de [15] se tiene que $z = f(u) = 0$ entonces $g(u) = \frac{2}{\beta+m-1}u^2$.

Figura 7.2. $\beta+m-1>0$



Fuente: elaboración propia.

Figura 7.3. $\beta+m-1 < 0$



Fuente: elaboración propia.

Si $\Delta_2 < 0$, no hay solución.

En la carta U_2

$$\begin{aligned}\dot{x} &= z^2(1 - \beta x) + \beta x^3 - (\beta + 1)x^2 - mx^2 + x \\ \dot{z} &= -z(\beta z^2 - \beta x^2 + \beta x + mx)\end{aligned}$$

Proposición. El punto $(0,0)$ es un nodo repulsor si $m > 0$ y un punto silla en el caso de que $m < 0$.

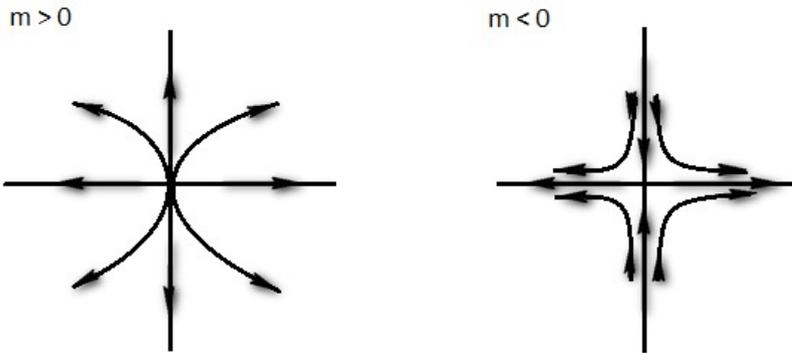
Demostración.

La matriz jacobiana:

$$Df(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Aplicando el Teorema 1.3 de [15], se tiene que $x(z) = f(z) = -z^2 + \dots$. De aquí, $g(z) = mz^3 + \beta z^5 + \dots$, así que para $m > 0$ es un nodo repulsor y para $m < 0$ es un punto silla.

Figura 7.4. Estabilidad



Fuente: elaboración propia.

Proposición. La recta que conecta los dos puntos silla nodos o los puntos sillares en el infinito del sistema es una recta sin contactos.

Demostración.

Como:

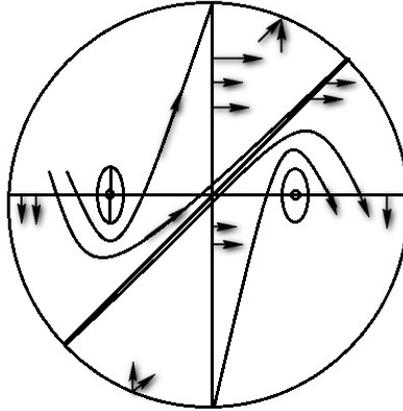
$$\dot{x} = 1 - x^2 + xy \quad \dot{y} = \beta(1 - x^2 + xy) + mxy$$

Sea $L = y - \alpha x = 0$, donde $\alpha = \frac{\beta+m+1}{2} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$ y $\Delta = (\beta + m + 1)^2 - 4\beta$, entonces:

$$\frac{dL}{dt} = \dot{y} - \alpha \dot{x} = (\beta - \alpha) + x^2(-\alpha^2 + (\beta + m + 1)\alpha - \beta) = (\beta - \alpha) = \frac{\beta - m - 1}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2} > 0$$

ya que $\beta + m - 1 > 0$ y $m < 0$.

Entonces, $y - \alpha x = 0$, es una recta sin contacto; además, $\dot{x}|_{(0,0)} = 1 > 0$.

Figura 7.5. Retratos de fase global

Fuente: elaboración propia.

Bifurcaciones

1. Conexión silla

De la proposición, en $m > 0$ se tiene que $(1,0)$ y $(-1,0)$ son sillas. Ahora, en la **Familia III**, sea $u = x - 1$, entonces el sistema nos queda de la siguiente forma:

$$\dot{u} = -2u + y - u^2 + uy \quad \dot{y} = -2\beta u + (\beta + m)y - \beta u^2 + (\beta + m)uy$$

Del sistema anterior y la Nota 1.8 de [8], las direcciones θ de sus trayectorias satisfacen la siguiente ecuación:

$$\sin^2\theta + (-2 - \beta - m)\sin\theta\cos\theta + 2\beta\cos^2\theta = 0$$

que es equivalente a:

$$\tan^2\theta + (2 + \beta + m)\tan\theta + 2\beta = 0$$

luego:

$$\tan\theta = \frac{2 + \beta + m}{2} \pm \frac{\sqrt{(2 + \beta + m)^2 - 8\beta}}{2}$$

Así que para:

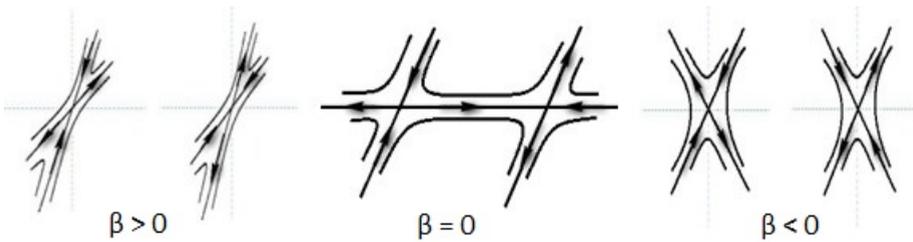
$$\beta > 0 \quad \tan\theta_1 > 0 \quad \text{y} \quad \tan\theta_2 > 0$$

$$\beta = 0 \quad \tan\theta_1 > 0 \quad \text{y} \quad \tan\theta_2 = 0$$

$$\beta < 0 \quad \tan\theta_1 > 0 \quad \text{y} \quad \tan\theta_2 < 0$$

Por lo tanto, en $\beta = 0$ existe una conexión de sillas.

Figura 7.5. Diagrama de bifurcación

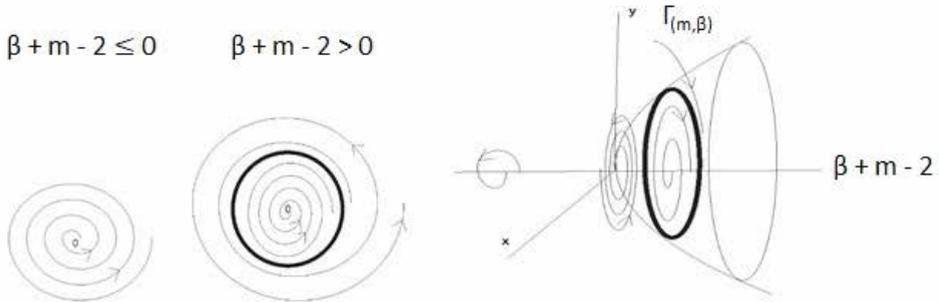


Fuente: elaboración propia.

2. Bifurcación de Hopf

De la proposición, se tiene que para $m < 0$, $\beta + m - 2 = 0$ es una bifurcación de Hopf.

Figura 7.6. Diagrama de bifurcación y una familia biparamétrica $\Gamma_{(m,\beta)}$ de ciclos límites



Fuente: elaboración propia.

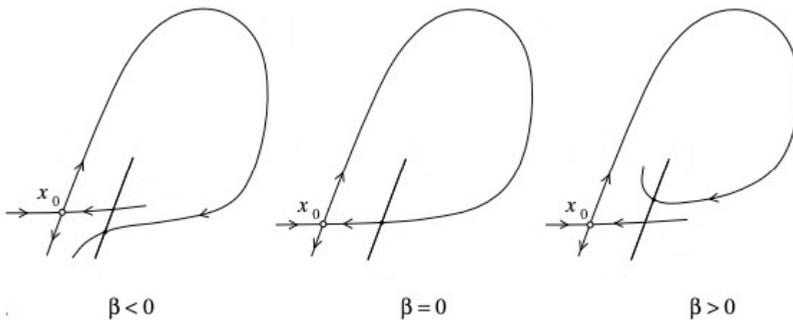
3. Bifurcación homoclínica

De la proposición anterior, en $m < 0$ y $\beta + m - 2 = 0$ se tiene que $(1,0)$ es un foco débil estable y que en $(\beta + m - 2)^2 + 8m < 0$ y $\beta + m - 2 > 0$ el punto $(1,0)$ es un foco repulsor, luego en esta región existen ciclos límites, así que por la teoría de los campos rotatorios en la región

$$(\beta + m - 2)^2 + 8m < 0 \quad \beta + m - 2 > 0 \quad (\beta + m + 1)^2 - 4\beta > 0$$

existe una curva $\beta = H(m)$ donde los ciclos límites son destruidos, así que en $\beta = H(m)$ hay una bifurcación homoclínica.

Figura 7.7. Diagrama de bifurcación homoclínica

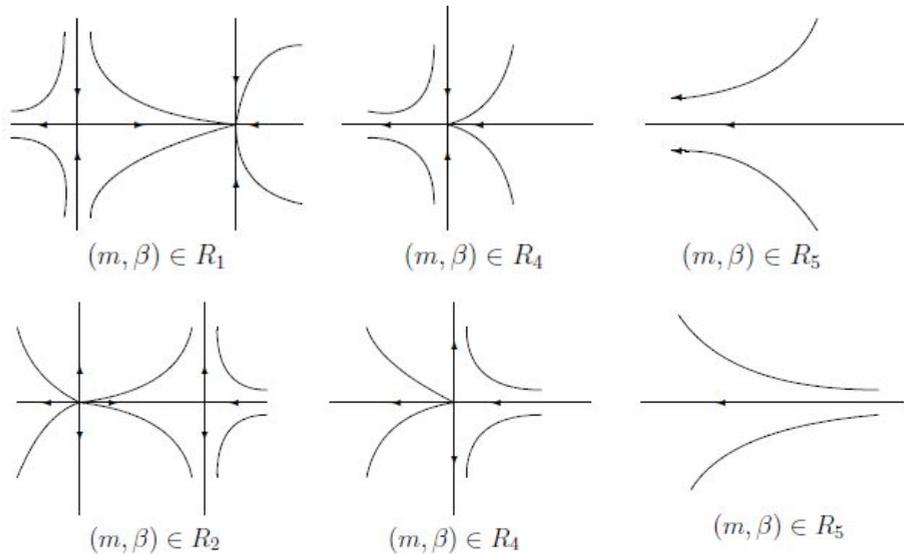


Fuente: elaboración propia.

4. Bifurcación silla-nodo

De la proposición, se tiene que para $m < 0$ y $(\beta + m + 1)^2 - 4\beta = 0$ hay una bifurcación silla-nodo, donde $R_1 = \{(m, \beta) | \beta + m - 1 > 0, m < 0 \text{ y } \Delta_2 > 0\}$ y $R_2 = \{(m, \beta) | \beta + m - 1 < 0, m < 0 \text{ y } \Delta_2 > 0\}$; $R_4 = \{(m, \beta) | (\beta + m - 1)^2 - 4\beta = 0\}$ y $R_5 = \{(m, \beta) | (\beta + m - 1)^2 - 4\beta < 0\}$.

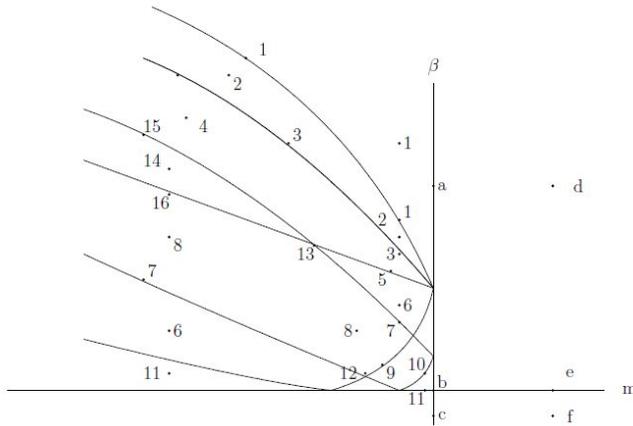
Figura 7.8. Diagrama de bifurcación silla-nodo



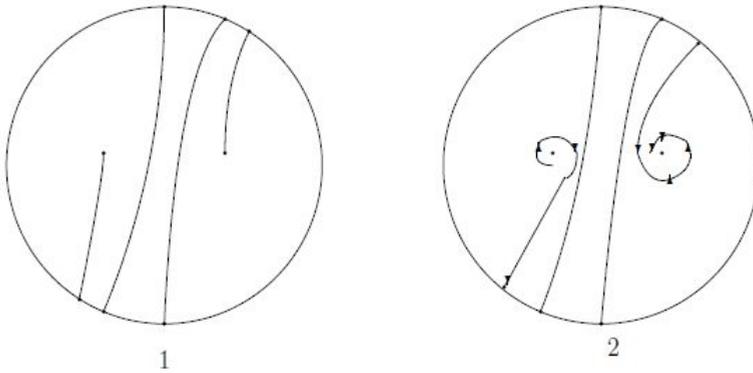
Fuente: elaboración propia.

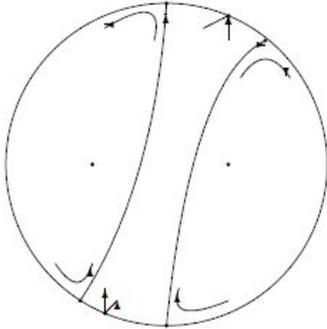
Retratos de fase

El retrato de fase global del sistema es:

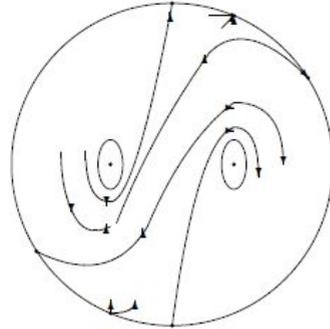
Figura 7.9. Retrato de la fase global del sistema

Los retratos de fase global de cada posición son:

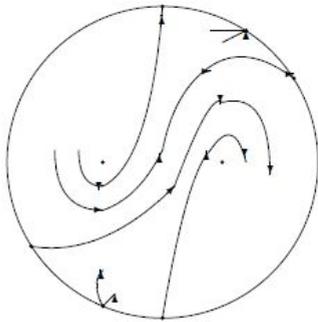
Figura 7.10. Retratos de fase global en cada posición



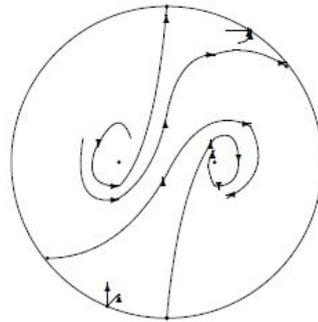
3



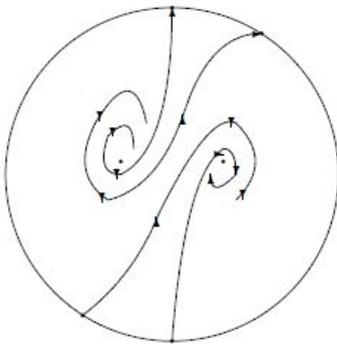
4



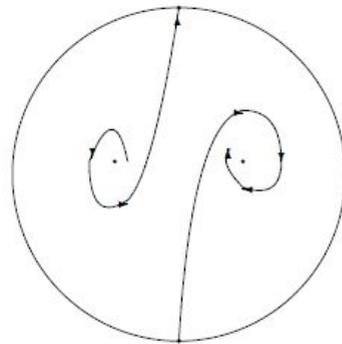
5



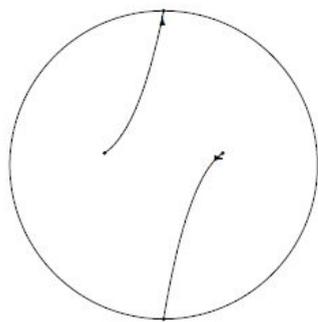
6



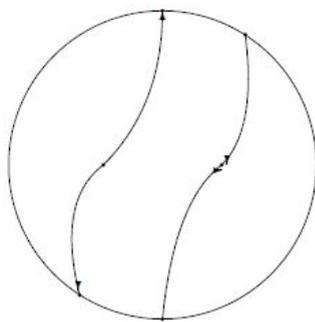
7



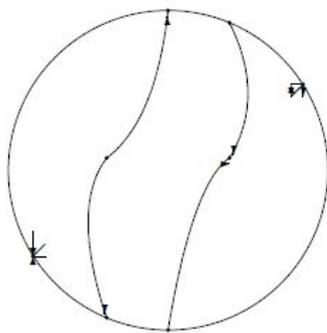
8



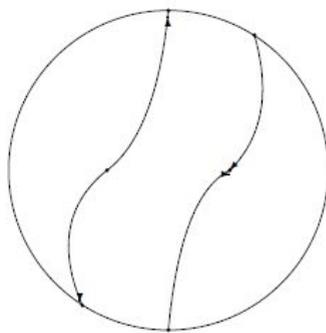
9



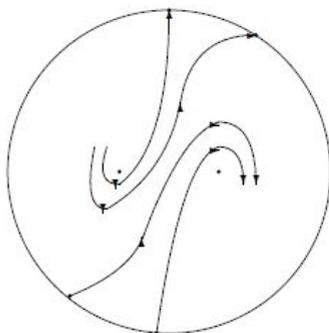
10



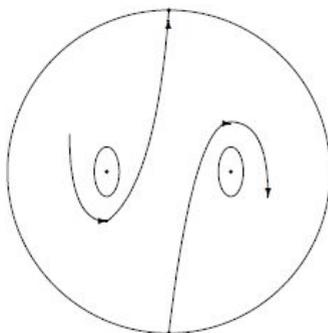
11



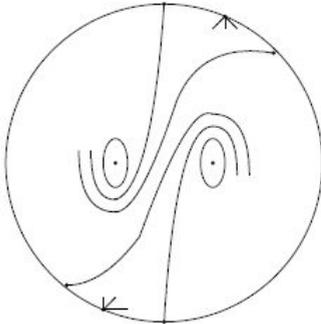
12



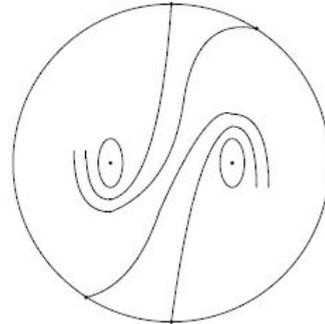
13



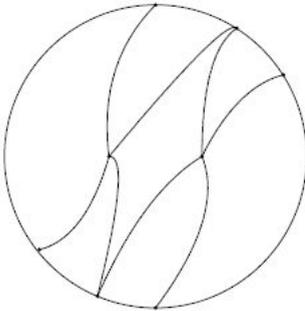
14



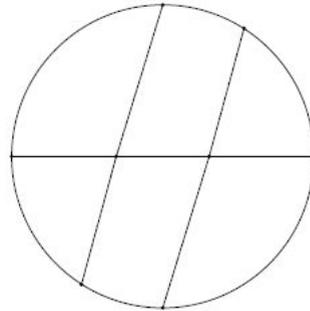
16



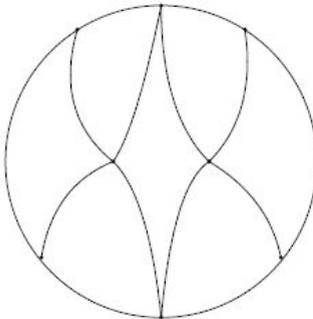
15



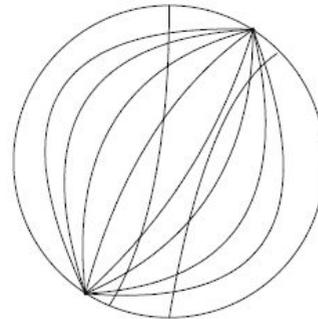
d



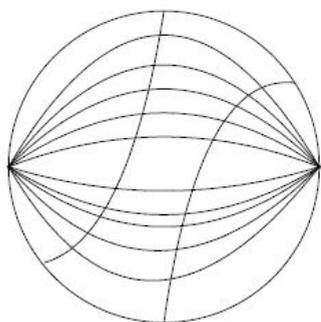
e



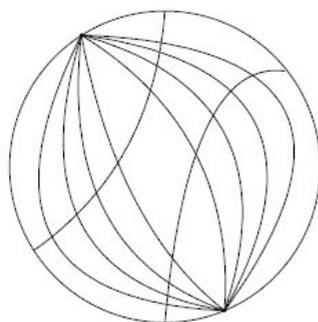
f



a



b



c

Fuente: elaboración propia.

Bibliografía

- [1] A. F. Andreev, "Investigation of the Behaviour of the Integral Curves of a System of Two Differential Equations in the Neighborhood of a Singular Point", *Trans. Amer. Math. Soc.* 8, pp. 183-207, 1958.
- [2] A. A. Andronov et al., *Theory of Bifurcations of Dynamical System on a Plane*. The Israel Program for Scientific Translations: Jerusalem, 1971.
- [3] H. W. Bover, F. Dumortier, S. J. van Strien y F. Takens, *Structures in Dynamics Studies in Math. Physics*, vol. 2. Ed. E. M de Jayr: North-Holland, 1991.
- [4] G. F. D. Duff, "Limit Cycles and Rotated Vector Fields", *Ann. of Math.*, vol. 67, pp. 15-31, 1953.
- [5] A. Gasull y R. Prohens, "On Quadratic Systems with a Degenerate Critical Point", *The Rocky Mountain Journal of Mathematics*, pp. 135-164, 1996.
- [6] J. Hale y H. Koçak, *Dynamics and Bifurcations*. Springer-Verlag New York, 1991.
- [7] H. Witold, *Sobre ecuaciones diferenciales ordinarias*. Ediciones Rialp: Madrid, 1978.
- [8] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*, segunda edición. Springer-Verlag New York, 1996.
- [9] L. Perko, "Rotated Vector Fields and the Global Behavior of Limit Cycles for a Class of Quadratic Systems in the Plane", *Journal of Differential Equations*, vol. 18, no. 1, pp. 63-86, 1975.
- [10] J. Guckenheimer y P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dymaical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer-Verlag New York, 1983.
- [11] J. Sotomayor, *Curvas definidas por equações diferenciais no plano*. Rio de Janeiro, IMPA, 1981.
- [12] Y. Yan-Qian, *Theory of Limit Cycles*. Translations of Mathematical Monographs, vol. 66. American Mathematical Society, 1986.
- [13] Y. Yanqian, "Some Problems in the Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations", *Journal Differential Equations*, vol. 46, no. 2, pp. 153-164, 1982.

- [14] Z. Zhang et al., *Qualitative Theory of Differential Equations*. Translations of Mathematical Monographs, vol. 101. *American Mathematical Society*, 1992.
- [15] A. A. Andronov et al., *Qualitative Theory of Second-Order Dynamic Systems*. The Israel Program for Scientific Translations: Jerusalem, 1973.

Capítulo 8

Ciclos límites en un sistema multiparamétrico de la forma

$$\dot{x} = 1 - x^2 + xy \quad \dot{y} = \beta(1 - x^2 + xy) + mxy + sy^2$$

Jorge Rodríguez Contreras^{1,2}

Alberto Reyes Linero³

Fiana Jiménez Ochoa⁴

Resumen

En este trabajo de investigación usaremos el hecho de que un sistema diferencial polinomial cuadrático perturbado:

$$\begin{cases} \dot{x} &= a + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 \\ \dot{y} &= b + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 \end{cases}$$

es equivalentemente afín a cuatro familias (véanse [9], [10]).

En la **Familia III** dividimos el plano en tres regiones R_1, R_2, R_3 para saber el comportamiento de las singularidades en el infinito.

1 Departamento de Matemática y Estadística Universidad del Norte, Barranquilla, Colombia. Correo electrónico: jrodri@uninorte.edu.co.

2 Programa de Matemáticas, Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia. Correo electrónico: jorgelrodriguez@mail.uniatlantico.edu.co.

3 Programa de Matemáticas, Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia. Correo electrónico: areyeslinero@mail.uniatlantico.edu.co.

4 Programa de Matemáticas, Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia.

Además, realizamos el estudio de las diferentes bifurcaciones (véanse [1], [2], [7], [5], [6]) que aparecen en cada una de las familias I, II y III. Con base en los resultados del estudio del comportamiento de las singularidades y la primera parte de este, obtenemos el retrato de fase de cada una de estas familias.

Ciclos límites

Dado el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - x^2 + xy \\ \dot{y} = \beta(1 - x^2 + xy) + mxy + sy^2 \end{cases} \quad (8.1)$$

Lema 8.1. El sistema (8.1) tiene a lo más dos ciclos límites.

Prueba.

Probaremos que para $x > 0$ estos sistemas tienen a lo más un ciclo límite. Sea $\eta = 1 - x^2 + xy$, $x = x$ y $dt = x d\tau$, así que:

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{d\tau} = x\eta \frac{dy}{d\tau} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{d\tau} = x(\beta(1 - x^2 + xy) + mxy + sy^2)$$

luego,

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{d\tau} &= -2x \frac{dx}{d\tau} + y \frac{dx}{d\tau} + x \frac{dy}{d\tau} = -2x^2\eta + xy\eta + x^2(\beta(1 - x^2 + xy) + mxy + sy^2) \\ &= -2x^2\eta + \eta(\eta - 1 + x^2) + \beta x^2 - \beta x^4 + (\beta + m)x^2(\eta - 1 + x^2) + s(\eta - 1 + x^2)^2 \\ &= (-\eta + (\beta + m)\eta - m + 2s\eta - 2s)x^2 + (m + s)x^4 + ((1 + s)\eta^2 - (2s + 1)\eta + s^2) \end{aligned}$$

Sea $u = x^2$ y $\eta = \eta$, así que:

$$\frac{du}{d\tau} = 2u\tau \frac{d\eta}{d\tau} = ((-1 + \beta + m + 2s)\eta - m - 2s)u + (m + s)u^2 + ((1 + s)\eta^2 - (2s + 1)\eta + s^2)$$

Como en este último sistema $u = 0$ es una recta invariante, se tiene que este sistema tiene a lo más un ciclo límite. Así, el sistema (8.1) en el plano $x > 0$ tiene a lo más un ciclo límite. Por lo tanto, usando el Lema 8.1, tenemos que a lo más se tienen dos ciclos límites.

Véanse antecedentes en [3], [4], [9], [10].

Singularidades en el plano finito

Lema 8.2.

- a) Si $1 + \frac{m}{s} \leq 0$, los únicos puntos críticos del sistema son $(\epsilon, 0)$ y $(-\epsilon, 0)$.
- b) Si $1 + \frac{m}{s} > 0$, entonces el sistema tiene cuatro puntos singulares $(\pm\epsilon, 0)$ y:

$$\left(\pm \frac{\epsilon}{\sqrt{1 + \frac{m}{s}}}, \mp \frac{m}{s} \frac{\epsilon}{\sqrt{1 + \frac{m}{s}}} \right)$$

Estudio del punto singular $(\epsilon, 0)$.

En la siguiente proposición solo probaremos todo acerca de los puntos singulares $(\epsilon, 0)$ y $(-\epsilon, 0)$, ya que ellos son singulares en cualquier región del plano $1 + \frac{m}{s} > 0$, o, $1 + \frac{m}{s} \leq 0$.

Proposición 8.1.

- 1) Si $(\beta + m - 2)^2 + 8m > 0$:
- 1.1) Si $m > 0$, el punto $(\epsilon, 0)$ es un punto silla.
- 1.2) Si $m < 0$:
- 1.2.1) Si $\beta + m - 2 > 0$, el punto $(\epsilon, 0)$ es un nodo repulsor.
- 1.2.2) Si $\beta + m - 2 < 0$, el punto $(\epsilon, 0)$ es un nodo atractor.
- 1.2.3) Si $m = 0$ y $s \neq 0$ y $\beta \neq 2$, el punto $(\epsilon, 0)$ es un silla-nodo.

- 2) Si $(\beta + m - 2)^2 + 8m = 0$:
- 2.1) Si $\beta + m - 2 > 0$, el punto $(\epsilon, 0)$ es un nodo repulsor.
- 2.2) Si $\beta + m - 2 < 0$, el punto $(\epsilon, 0)$ es un nodo atractor.
- 2.3) Si $\beta + m - 2 = 0$, el punto $(\epsilon, 0)$ tiene dos sectores hiperbólicos.
- 3) Si $(\beta + m - 2)^2 + 8m < 0$:
- 3.1) Si $\beta + m - 2 > 0$, el punto $(\epsilon, 0)$ es un foco repulsor.
- 3.2) Si $\beta + m - 2 < 0$, el punto $(\epsilon, 0)$ es un foco atractor.
- 3.3) Si $\beta + m - 2 = 0$:
- 3.3.1) Si $s \in (\frac{1}{2}, \frac{m}{m-2})$, entonces el punto $(\epsilon, 0)$ es un foco débil estable.
- 3.3.2) Si $s \notin [-\frac{1}{2}, \frac{m}{m-2}]$, entonces el punto $(\epsilon, 0)$ es un foco débil inestable.
- 3.3.3) Si $s \in \{-\frac{1}{2}, \frac{m}{m-2}\}$, entonces el punto $(\epsilon, 0)$ es un centro.

Demostración.

La matriz asociada al sistema en el punto $(\epsilon, 0)$ es:

$$Df(\epsilon, 0) = \epsilon \begin{bmatrix} -2 & 1 & -2\beta & \beta + m \end{bmatrix}$$

Sus valores propios son:

$$|\lambda + 2\epsilon - \epsilon 2\epsilon\beta \lambda - (\beta + m)\epsilon| = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + (2 - \beta - m)\epsilon\lambda - 2m\epsilon^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - x^2 + xy \\ \dot{y} = \beta(1 - x^2 + xy) + mxy + sy^2 \end{cases}$$

1) Si $(\beta + m - 2)^2 + 8m > 0$

En el caso de que $m > 0$ se tienen dos raíces de signos opuestos; por lo tanto, es $(\epsilon, 0)$ un punto silla.

- 1.1) Si, por el contrario, $m < 0$, tenemos dos raíces positivas en el caso de que $\beta + m - 2 > 0$, así que $(\epsilon, 0)$ es un nodo repulsor. En caso contrario se tienen dos raíces negativas; de aquí, $(\epsilon, 0)$ es un nodo atractor.

2) Si $(\beta + m - 2)^2 + 8m = 0$.

En el caso de que $\beta + m - 2 > 0$, tenemos dos valores propios positivos, así que $(\epsilon, 0)$ es un nodo repulsor. En el otro caso, se tienen dos valores propios negativos, entonces $(\epsilon, 0)$ es un nodo atractor.

- 2.1) Si $\beta + m - 2 = 0 \Rightarrow \beta = 2, y, m = 0$, la matriz asociada al sistema es:

$$Df(\epsilon, 0) = \epsilon \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Así que sus valores propios son $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Sea $u = x - \epsilon$, $e, y = v$; luego:

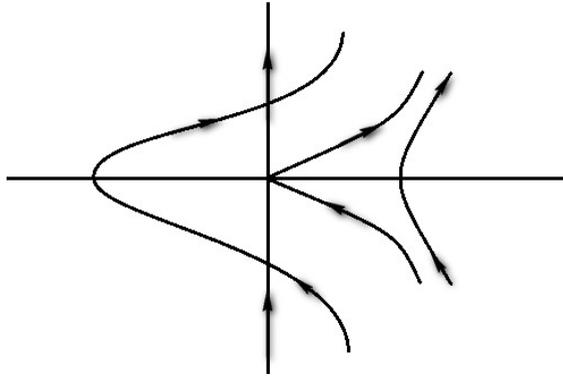
$$\dot{u} = \epsilon v - 2\epsilon u - u^2 + uv \quad \dot{v} = 2\epsilon v - 4\epsilon u - 2u^2 + 2uv + sv^2$$

Sea $w = v - 2u \Rightarrow \dot{w} = \dot{v} - 2\dot{u}$, así que:

$$\dot{w} = sv^2 \dot{v} = 2\epsilon w + (s + \frac{1}{2})v^2 - \frac{1}{2}w^2$$

Aplicando el Teorema 1.4 de [1], tenemos que $W(w, v) = \frac{s}{2\epsilon} v^2$, $y, V(w, v) = (\frac{s}{2\epsilon} + \frac{1}{4\epsilon})v^2 - \frac{1}{4\epsilon} w^2$, así que $w = -(\frac{s}{2\epsilon} + \frac{1}{4\epsilon})v^2 + \dots$ y $f(v) = \frac{s}{2\epsilon} v^2$. De aquí, $\alpha = \frac{s}{2\epsilon} \neq 0, y, \alpha = 2$; además, $\Phi(v) = \frac{\partial V}{\partial v} + \frac{\partial W}{\partial w} = (\frac{s}{\epsilon} + \frac{1}{2\epsilon})v, b = (\frac{s}{\epsilon} + \frac{1}{2\epsilon}) \neq 0, y, \beta = 1$. Por lo tanto, tenemos que α es par y $\alpha < 2\beta + 1$, entonces el punto tiene dos sectores hiperbólicos.

Figura 8.1. Dos sectores hiperbólicos



Fuente: elaboración propia.

3) Si $(\beta + m - 2)^2 + 8m < 0$, tenemos

$$\text{que } \lambda_1 = \epsilon \left(\frac{\beta + m - 2}{2} + i \frac{\sqrt{-(\beta + m - 2)^2 - 8m}}{2} \right) \text{ y}$$

$$\lambda_2 = \epsilon \left(\frac{\beta + m - 2}{2} - i \frac{\sqrt{-(\beta + m - 2)^2 - 8m}}{2} \right). \text{ Luego, si } \beta + m - 2 > 0,$$

se tiene que $(\epsilon, 0)$ es un foco inestable y en caso de que $\beta + m - 2 < 0$, tenemos que $(\epsilon, 0)$ es un foco atractor.

3.1) Ahora probaremos que en el caso $\beta + m - 2 = 0$, el punto

$$(\epsilon, 0) \text{ es un foco débil si } s \neq -\frac{1}{2}, y, s \neq \frac{m}{m-2}.$$

Sea $u = x - \epsilon$ y $v = y$, entonces tenemos que:

$$\dot{u} = -2\epsilon u + \epsilon v + uv - u^2 \dot{v} = -2\epsilon\beta u + 2\epsilon v + 2uv - \beta u^2 + sv^2$$

Ahora hallaremos los vectores propios de la matriz jacobiana:

$$[-2\epsilon \quad \epsilon \quad -2\epsilon\beta \quad 2\epsilon] [v_1 \quad v_2] = \lambda [v_1 \quad v_2] \Leftrightarrow v_2 = (\lambda + 2)v_1$$

Como $\lambda = \pm i\epsilon\sqrt{-2m}$, tenemos que:

$$P = [1 \ 0 \ 2\sqrt{-2m}] , y , P^{-1} = \left[1 \ 0 \ -\frac{2}{\sqrt{-2m}} \frac{1}{\sqrt{-2m}} \right]$$

Sea:

$$[u \ v] = P[w_1 \ w_2] \Rightarrow [w_1 \ w_2] = P^{-1}[u \ v]$$

así que,

$$u = w_1 \quad v = 2w_1 + \sqrt{-2m}w_2 , y , w_1 = u \quad w_2 = -\frac{2}{\sqrt{-2m}}u + \frac{1}{\sqrt{-2m}}v$$

entonces,

$$[\dot{w}_1 \ \dot{w}_2] = P^{-1}[\dot{u} \ \dot{v}] = [0 \ \epsilon\sqrt{-2m} \ -\epsilon\sqrt{-2m} \ 0] [w_1 \ w_2] +$$

$$\left[w_1^2 + \sqrt{-2m}w_1w_2 \quad \frac{4s+m}{\sqrt{-2m}}w_1^2 + 4sw_1w_2 + s\sqrt{-2m}w_2^2 \right]$$

de aquí tenemos que:

$$\dot{w}_1 = \epsilon\sqrt{-2m}w_2 + w_1^2 + \sqrt{-2m}w_1w_2 \quad \dot{w}_2 = -\epsilon\sqrt{-2m}w_1 - \frac{4s+m}{\sqrt{-2m}}w_1^2 + 4sw_1w_2 + s\sqrt{-2m}w_2^2$$

dividiendo entre $-\epsilon\sqrt{-2m}$:

$$\dot{w}_1 = -w_2 - \frac{1}{\epsilon\sqrt{-2m}}w_1^2 - \frac{1}{\epsilon}w_1w_2 \dot{w}_2 = w_1 + \frac{4s+m}{2\epsilon m}w_1^2 - \frac{4s}{\epsilon\sqrt{-2m}}w_1w_2 - \frac{s}{\epsilon}w_2^2$$

La divergencia de este sistema en $(0,0)$ es:

$$\operatorname{div}(P, Q)_{(0,0)} = -\frac{2w_1}{\epsilon\sqrt{-2m}} - \frac{1}{\epsilon}w_2 - \frac{4s}{\epsilon\sqrt{-2m}}w_1w_2 - \frac{s}{\epsilon}w_2^2|_{(0,0)} = 0$$

Además, sabemos que $a_{20} = -\frac{1}{\epsilon\sqrt{-2m}}$, $a_{11} = -\frac{1}{\epsilon}$, $a_{02} = 0$, $b_{20} = \frac{4s+m}{2\epsilon m}$,

$b_{11} = -\frac{4s}{\epsilon\sqrt{-2m}}$ y $b_{02} = -\frac{s}{\epsilon}$, luego $A = -\frac{1}{\epsilon\sqrt{-2m}}$, $B = \frac{4s+m}{2\epsilon m} - \frac{s}{\epsilon}$, $\alpha = -\frac{1}{\epsilon} - \frac{2s}{\epsilon}$

y $\beta = -\frac{4s+2}{\epsilon\sqrt{-2m}}$, así que:

$$W_1 = A\alpha - B\beta = -\frac{2(2s+1)((m-2)s-m)}{\epsilon^2 m\sqrt{-2m}}$$

por lo tanto, $(0,0)$ es un foco débil; luego, $(\epsilon, 0)$ es un foco débil en el caso de que $s \neq -\frac{1}{2}$, y , $s \neq \frac{m}{m-2}$.

Si $s \in (-\frac{1}{2}, \frac{m}{m-2})$, se tiene que $(\epsilon, 0)$ es un foco débil estable; en el caso que $s \notin [-\frac{1}{2}, \frac{m}{m-2}]$, se tiene que $(\epsilon, 0)$ es un foco débil inestable.

Singularidades en el caso $1 + \frac{m}{s} > 0$.

Proposición 8.2. Si $m > 0$, el retrato de fase del punto P_1 es equivalente al retrato de fase del punto $(\epsilon, 0)$ en $m < 0$.

Demostración.

Sea $v = mx + sy$, reemplazando en el sistema:

$$\{\dot{x} = \epsilon^2 - x^2 + xy \quad \dot{y} = \beta(\epsilon^2 - x^2 + xy) + mxy + sy^2$$

se tiene que:

$$\dot{x} = \epsilon^2 - (1 + \frac{m}{s})x^2 + \frac{1}{s}xv \quad \dot{v} = (m + s\beta)(\epsilon^2 - (1 + \frac{m}{s})x^2 + \frac{1}{s}xv) - mxv + v^2$$

Sea $z = \alpha x$, $w = \gamma v$ y $t = \frac{1}{\alpha}t_1$ donde $\gamma = \frac{1}{s\alpha}$ y $\alpha = \sqrt{1 + \frac{m}{s}}$, entonces:

$$\dot{z} = \epsilon^2 - \frac{1 + \frac{m}{s}}{\alpha^2}z^2 + \frac{1}{s\alpha\gamma}zw \quad \dot{w} = \frac{m + s\beta}{m + s}(\epsilon^2 - z^2 + zw) - \frac{m}{(1 + \frac{m}{s})}zw + sw^2$$

Sea $\delta = \frac{m+s\beta}{m+s}$ y $\mu = -\frac{m}{(1+\frac{m}{s})}$, así que $\mu < 0 \Leftrightarrow m > 0$; de aquí, el sistema nos queda de la siguiente forma:

$$\dot{z} = \epsilon^2 - \frac{1 + \frac{m}{s}}{\alpha^2}z^2 + \frac{1}{s\alpha\gamma}zw \quad \dot{w} = \delta(\epsilon^2 - z^2 + zw) + \mu zw + sw^2$$

Por lo tanto, el sistema nos queda de la siguiente forma:

$$\dot{z} = \epsilon^2 - z^2 + zw \quad \dot{w} = \delta(\epsilon^2 - z^2 + zw) + \mu zw + sw^2$$

El punto crítico $(\epsilon, 0)$ en este sistema es el punto P_1 en el sistema $\{\dot{x} = \epsilon^2 - x^2 + xy \quad \dot{y} = \beta(\epsilon^2 - x^2 + xy) + mx + sy^2$

Mostraremos las propiedades del punto $P_1 = (\alpha, -\frac{m}{s}\alpha)$, donde

$\alpha = \frac{\epsilon}{\sqrt{1 + \frac{m}{s}}}$, ya que para el punto $(\epsilon, 0)$ se probaron en la Propo-

sición 8.1.

Sea $b_1 = \alpha(2 + \frac{m}{s} - \beta + m)$:

Proposición 8.3.

- 1) Si $b_1^2 - 8m > 0$, y
 - 1.1) Si $b_1 > 0$ y $m > 0$, entonces P_1 es un nodo atractor.
 - 1.2) Si $b_1 < 0$ y $m > 0$, se tiene que P_1 es un nodo repulsor.

- 1.3) Si $m < 0$, tenemos que P_1 es un punto silla.
- 2) Si $b_1^2 - 8m = 0$, y
- 2.1) Si $b_1 > 0$, entonces P_1 es un nodo atractor.
- 2.2) Si $b_1 < 0$, se tiene que P_1 es un nodo repulsor.
- 3) Si $b_1^2 - 8m < 0$, y
- 3.1) Si $b_1 > 0$, entonces P_1 es un foco atractor.
- 3.2) Si $b_1 < 0$, se tiene P_1 es un foco repulsor.
- 3.3) Si $b_1 = 0$ y $m > 0$, entonces P_1 es un foco débil.

Demostración.

Por la *Proposición 8.2*, todos los incisos en los que $m > 0$ son ciertos, así que solo nos falta demostrar los incisos en los que $m < 0$.

La matriz asociada al sistema en el punto P_1 es:

$$Df\left(\alpha, \frac{m}{s}\alpha\right) = \begin{bmatrix} \alpha\left(2 + \frac{m}{s}\right) & -\alpha \\ b_1 & -\alpha(\beta - m) \end{bmatrix}$$

Su ecuación característica es $\lambda^2 + b_1\lambda + 2m = 0$. Luego, si $b_1^2 - 8m > 0$ y $m < 0$, sus valores propios tienen signos opuestos, así que P_1 es un punto silla.

Si $b_1^2 - 8m = 0$, sus valores propios serán ambos negativos (o positivos) en el caso de que $b_1 > 0$ (o $b_1 < 0$), así que P_1 es un nodo atractor (repulsor).

Si $b_1^2 - 8m < 0$, la ecuación característica tiene raíces imaginarias, luego P_1 es un foco atractor (repulsor) si $b_1 > 0$ ($b_1 < 0$).

En particular para $\epsilon = 1$, se cumplen todas las proposiciones.

Centros del sistema.

Usando el Teorema 1.5 de [12], es fácil ver que los únicos centros para $\epsilon = 1$ vienen dados por $s = -\frac{1}{2}$ y $s = \frac{m}{m-2}$, con $m < 0$.

Centro en el caso $s = -\frac{1}{2}$

Ahora probaremos que en el siguiente sistema los puntos críticos $(1,0)$ y $(-1,0)$ son centros.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 1 - x^2 + xy \\ \dot{y} &= (2 - m)(1 - x^2 + xy) + mxy - \frac{1}{2}y^2\end{aligned}$$

Proposición 8.4. Los puntos $(1,0)$ y $(-1,0)$ son centros del sistema anterior.

Demostración.

$$Df(1,0) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2(2 - m) & 2 \end{bmatrix}$$

Los valores propios son $\pm i\sqrt{-2m}$. Por el teorema de Dulac, el punto $(1,0)$ es un centro, centro-foco o un foco.

Sea $u = x - 1$ y $v = y$, entonces:

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -2u + v - u^2 + uv \\ \dot{v} &= -2(2 - m)u + (2 - m)v - (2 - m)u^2 + (2 - m)uv - \frac{1}{2}v^2\end{aligned}$$

$$[u \ v] = [1 \ 0 \ 2 \ \sqrt{-2m}] [w_1 \ w_2]$$

de aquí se tiene:

$$[\dot{w}_1 \ \dot{w}_2] = [0 \ \sqrt{-2m} \ -\sqrt{-2m} \ 0] [w_1 \ w_2] + \left[w_1^2 + \sqrt{-2m}w_1w_2 \frac{-2 + m}{\sqrt{-2m}w_1^2 - 2w_1w_2 - \frac{1}{2}\sqrt{-2m}w_2^2} \right]$$

por lo tanto,

$$\dot{w}_1 = \sqrt{-2m}w_2 + w_1^2 + \sqrt{-2m}w_1w_2 \quad \dot{w}_2 = -\sqrt{-2m}w_1 + \frac{-2+m}{\sqrt{-2m}}w_1^2 - 2w_1w_2 - \frac{1}{2}w_2^2$$

luego,

$$\frac{dw_2}{dw_1} = -\frac{w_1 + \frac{-2+m}{2m}w_1^2 + \frac{2}{\sqrt{-2m}}w_1w_2 + \frac{1}{2}w_2^2}{w_2 + \frac{1}{\sqrt{-2m}}w_1^2 + w_1w_2}$$

así, tenemos que:

$$a = \frac{-2+m}{2m}, \quad 2b + \alpha = \frac{2}{\sqrt{-2m}}, \quad c = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{-2m}}, \quad 2c + \beta = 1, \quad \text{y } d = 0;$$

de aquí se tiene que $\alpha = \beta = 0$, y así podemos concluir que el punto $(1,0)$ es un centro.

Centro en el caso $s = \frac{m}{m-2}$

Ahora para el siguiente sistema probaremos lo mismo.

$$\dot{x} = 1 - x^2 + xy$$

$$\dot{y} = (2 - m)(1 - x^2 + xy) + mxy + \frac{m}{m-2}y^2$$

Proposición 8.5. Los puntos singulares $(1,0)$ y $(-1,0)$ son centros del sistema anterior.

Demostración.

$$Df(1,0) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2(2-m) & 2 \end{bmatrix}$$

Los valores propios son $\pm i\sqrt{-2m}$. Por el teorema de Dulac, el punto $(1,0)$ es un centro, centro-foco.

Sea $u = x - 1$ y $v = y$, entonces:

$$\dot{u} = -2u + v - u^2 + uv$$

$$\dot{v} = -2(2-m)u + (2-m)v - (2-m)u^2 + (2-m)uv + \frac{m}{m-2}v^2$$

$$\begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & \sqrt{-2m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

de aquí se tiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{-2m} \\ -\sqrt{-2m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1^2 + \sqrt{-2m}w_1w_2 \frac{m^2 + 2m}{(m-2)\sqrt{-2m}} \\ w_1^2 + \frac{4m}{m-2}w_1w_2 + \frac{m}{m-2}\sqrt{-2m}w_2^2 \end{bmatrix}$$

por lo tanto,

$$\begin{bmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \end{bmatrix} = \sqrt{-2m} \begin{bmatrix} w_2 \\ -w_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1^2 + \sqrt{-2m}w_1w_2 \frac{m^2 + 2m}{(m-2)\sqrt{-2m}} \\ w_1^2 + \frac{4m}{m-2}w_1w_2 + \frac{m}{m-2}\sqrt{-2m}w_2^2 \end{bmatrix}$$

luego,

$$\frac{dw_2}{dw_1} = - \frac{w_1 + \frac{m+2}{2(m-2)}w_1^2 - \frac{4m}{(m-2)\sqrt{-2m}}w_1w_2 - \frac{m}{m-2}w_2^2}{w_2 + \frac{1}{\sqrt{-2m}}w_1^2 + w_1w_2}$$

Así, tenemos que $a = \frac{m+2}{2(m-2)}$, $b = \frac{1}{\sqrt{-2m}}$, $c = -\frac{m}{m-2}$, $\alpha = -\frac{2(3m-2)}{(m-2)\sqrt{-2m}}$,

$\beta = \frac{3m-2}{m-2}$ y $d = 0$.

Sea $k = \frac{\alpha}{\beta} = -\frac{2}{\sqrt{-2m}}$, y también tenemos que $\frac{b+d}{a+c} = k$; además:

$$\begin{aligned} ak^3 - (3b + \alpha)k^2 + (3c + \beta)k - d &= \frac{2m+4}{m(m-2)\sqrt{-2m}} + 2 \frac{3m-6-6m+4}{m(m-2)\sqrt{-2m}} + \frac{4}{(m-2)\sqrt{-2m}} \\ &= \frac{8m+4-12m-4}{m(m-2)\sqrt{-2m}} + \frac{4}{(m-2)\sqrt{-2m}} = 0 \end{aligned}$$

Así, el punto $(1,0)$ es un centro.

Rectas invariantes en $m < 0$

Proposición 8.6. Las rectas invariantes del sistema $\{\dot{x} = -x^2 + xy, \dot{y} = \beta(-x^2 + xy) + mxy + sy^2\}$ son de la forma $y = Ax$ y $x = 0$.

Demostración.

Sea $y = Ax + B$ recta invariante del sistema

$$\dot{x} = -x^2 + xy, \dot{y} = \beta(-x^2 + xy) + mxy + sy^2,$$

entonces $\dot{y} - A\dot{x} = 0$; además,

$$\dot{y} - A\dot{x} = [-\beta + (\beta + m + 1)A + (s - 1)A^2]x^2 + B[(\beta + m - A) + 2sA]x + sB^2$$

Por lo tanto:

$$1) (1 - s)A^2 - (\beta + m + 1)A + \beta = 0$$

$$2) B[(\beta + m - A) + 2sA] = 0 \quad 3) sB^2 = 0$$

Ahora, si $s \neq 0$, de la ecuación 3) del sistema anterior, se tiene que $B = 0$.

Si $s = 0$, se tiene el siguiente sistema:

$$1) A^2 - (\beta + m + 1)A + \beta = 0 \quad 2) B(\beta + m - A) = 0$$

De la ecuación 2) del sistema anterior se tiene que, o $B = 0$, o $A = \beta + m$.

Si $A = \beta + m$, reemplazando en la ecuación 1) del sistema anterior, se tiene que $m = 0$ y $m < 0$ (absurdo), entonces $B = 0$.

Por lo tanto, las rectas invariantes del sistema

$$\dot{x} = -x^2 + xy$$

$$\dot{y} = \beta(-x^2 + xy) + mxy + sy^2$$

son de la forma $y = Ax$.

Nota 8.1. $\dot{x}|_{y=0} = -x^2 < 0$ y $\dot{y}|_{y=0} = -\beta x^2 < 0$

Lema 8.3. Sean

$$\Delta(s) = (\beta + m + 1)^2 - 4\beta(1-s) \quad A_1(s) = \frac{\beta+m+1}{2(1-s)} + \frac{\sqrt{\Delta(s)}}{2(1-s)} \quad A_2(s) = \frac{\beta+m+1}{2(1-s)} - \frac{\sqrt{\Delta(s)}}{2(1-s)} \quad A_3(s) = \frac{\beta+m+1}{2(1-s)},$$

entonces:

- Si $\Delta(s) = 0$, entonces $y = A_3(s)x$ es la única recta invariante.
- Si $\Delta(s) > 0$, entonces $y = A_1(s)x$ y $y = A_2(s)x$ son las únicas rectas invariantes.
- Si $\Delta(s) < 0$, entonces el sistema no tiene rectas invariantes.

Es inmediato de la Nota 8.1 y la *Proposición 8.6*.

Retrato de fase en la región R

$$R = \left\{ (\beta, m, s) \mid \beta + m - 2 > 0, \beta - H(m) < 0, -\frac{1}{2} < s < \frac{m}{m-2}, m < 0 \right\}$$

Proposición 8.7. Sea L la recta $y = Cx$, luego:

- Si $\Delta(s) < 0$, entonces $\frac{dL}{dt} < 0$.
- Si $\Delta(s) = 0$ y $C \neq A_3(s)$ entonces $\frac{dL}{dt} < 0$.
- Si $\Delta(s) > 0$ y $C \notin [A_2(s), A_1(s)]$, entonces $\frac{dL}{dt} < 0$.
- Si $\Delta(s) > 0$ y $C \in (A_2(s), A_1(s))$, entonces $\frac{dL}{dt} > 0$.

Demostración.

- $\frac{dL}{dt} = \frac{dy}{dt} - A \frac{dx}{dt} = -[(1-s)A^2 + (\beta + m + 1)A + \beta]x^2 < 0$
- $\frac{dL}{dt} = -(1-s)[C - A_3(s)]^2 x^2 < 0$
- $\frac{dL}{dt} = -(1-s)[C - A_1(s)][C - A_2(s)]x^2 < 0$

$$d) \frac{dL}{dt} = -(1-s)[C - A_1(s)][C - A_2(s)]x^2 > 0$$

Lema 8.4. Si $\Delta(s) \geq 0$, y supongamos que $(\beta, m, s) \in R$, entonces

$$a) -1 + A_1(s) > 0.$$

$$b) -1 + A_2(s) > 0.$$

Prueba.

a) Como $\beta + m > 2 \Rightarrow \beta + m - 1 + 2s > 1 + 2s > 0$, luego

$$-1 + \frac{\beta+m+1}{2(1-s)} = \frac{\beta+m-1+2s}{2(1-s)} > 0, \text{ así que } -1 + A_1(s) > 0.$$

b) Como $s < \frac{m}{m-2} \Rightarrow m + s < \frac{m(m-1)}{m-2} < 0$,

así que $-4(1-s)(m+s) > 0$, luego

$$(\beta + m - 1 + 2s)^2 > (\beta + m + 1)^2 - 4\beta(1-s)$$

$$\beta + m + 1 - 2(1-s) > \sqrt{(\beta + m + 1)^2 - 4\beta(1-s)} \Rightarrow \frac{\beta+m+1}{2(1-s)} - 1 > \frac{\sqrt{(\beta+m+1)^2 - 4\beta(1-s)}}{2(1-s)} ;$$

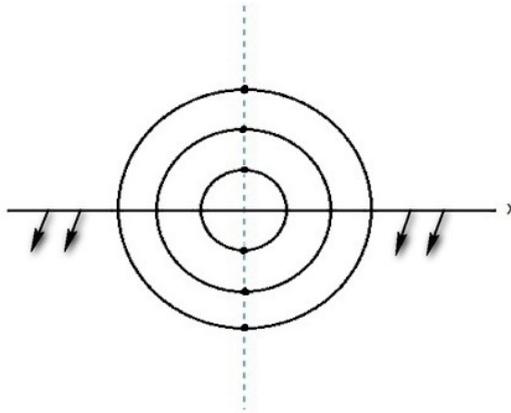
por lo tanto, $-1 + A_2(s) > 0$.

Lema 8.5. $\dot{x}|_{y=A_k(s)x} > 0$ y $\dot{y}|_{y=A_k(s)} > 0$, $k = 1, 2, 3$.

Como $\dot{x}|_{y=A_k(s)x} = x^2(-1 + A_k(s)) > 0$ por el lema anterior.

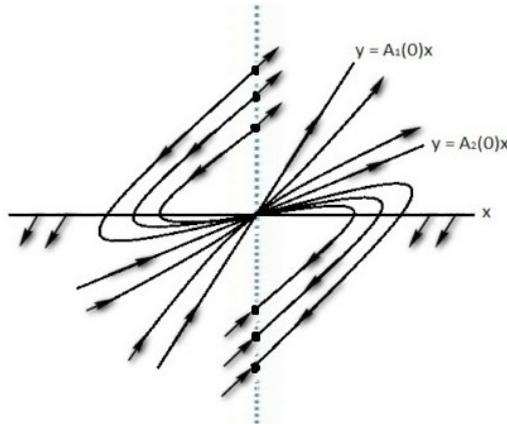
Retrato de fase en el caso $s = 0$

Figura 8.2. Retrato de fase $\Delta(0) < 0$

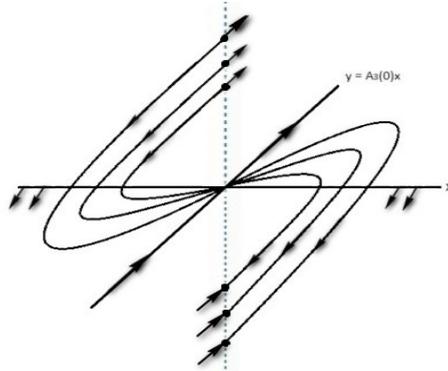


Fuente: elaboración propia.

Figura 8.3. Retrato de fase $\Delta(0) > 0$

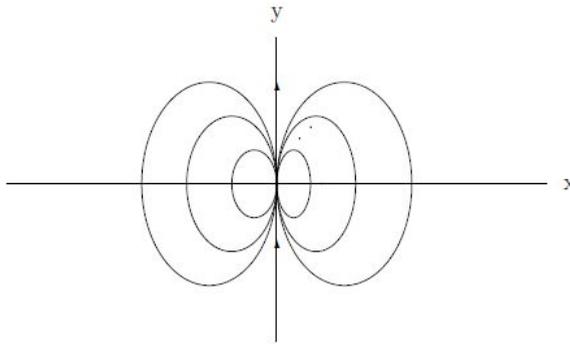


Fuente: elaboración propia.

Figura 8.4. Retrato de fase $\Delta(0)=0$ 

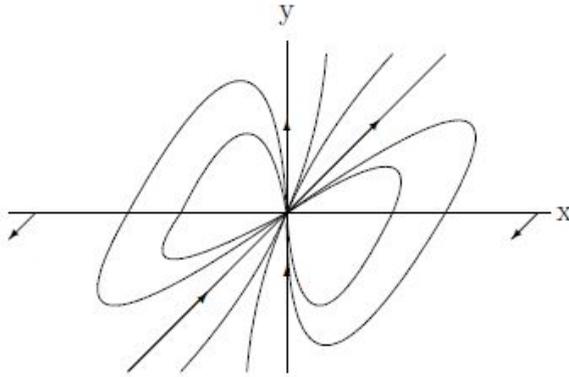
Fuente: elaboración propia.

Retrato de fase en el caso $s \neq 0$

Figura 8.5. Retrato de fase $\Delta(s) < 0$ 

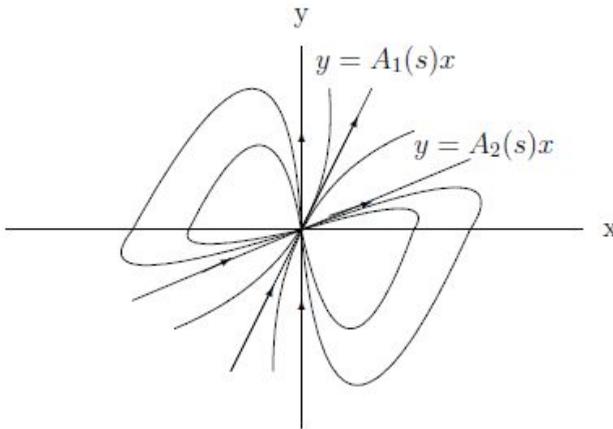
Fuente: elaboración propia.

Figura 8.6. Retrato de fase $\Delta(s)=0$

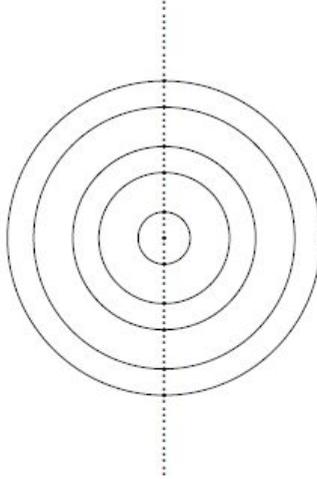


Fuente: elaboración propia.

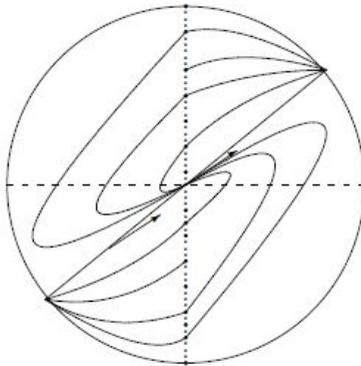
Figura 8.7. Retrato de fase $\Delta(s)>0$



Fuente: elaboración propia.

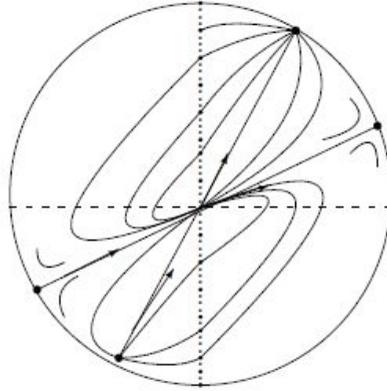
Retratos de fase en la esfera de Poincaré.**Figura 8.8.** *Caso en donde $\Delta(0) < 0$* 

Fuente: elaboración propia.

Figura 8.9. *Caso en donde $\Delta(0) = 0$* 

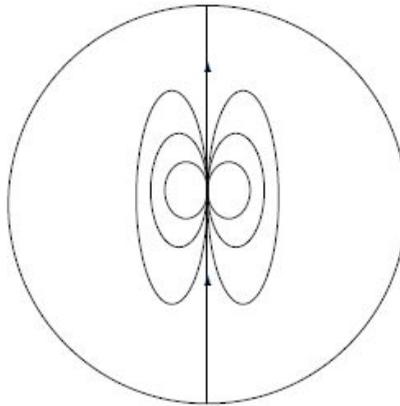
Fuente: elaboración propia.

Figura 8.10. Caso en donde $\Delta(0) > 0$

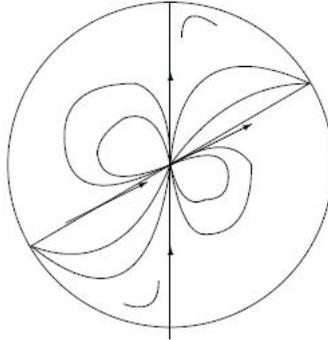


Fuente: elaboración propia.

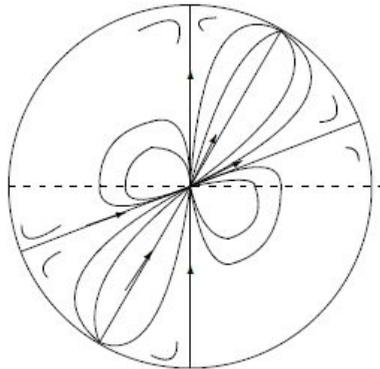
Figura 8.11. Caso en donde $\Delta(s) < 0$



Fuente: elaboración propia.

Figura 8.12. Caso en donde $\Delta(s)=0$ 

Fuente: elaboración propia.

Figura 8.13. Caso en donde $\Delta(s)>0$ 

Fuente: elaboración propia.

Singularidades en el infinito del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \epsilon^2 - x^2 + xy \\ \dot{y} = \beta(\epsilon^2 - x^2 + xy) + mxy + sy^2 \end{cases}$$

En la carta U_1 se tiene el sistema siguiente:

$$\dot{y} = -yz^2\epsilon^2 - (1-s)y^2 + (\beta+m+1)y - \beta z = -z(\epsilon^2 z^2 + y - 1)$$

Proposición 8.8.

- a) Si $\Delta(s) > 0$, entonces:
- b) $(A_1(s), 0)$ es un nodo atractor.
- c) $(A_2(s), 0)$ es un punto silla.
- d) Si $\Delta(s) = 0$, entonces $(A_3(s), 0)$ es un silla nodo.
- e) Si $\Delta(s) < 0$ no existen puntos críticos.

Demostración.

Para $z = 0$, se tiene que $y_1 = A_1(s)$, e , $y_2 = A_2(s)$ y las matrices jacobianas de $(A_1(s), 0)$ y $(A_2(s), 0)$ son :

$$Df(A_1(s), 0) = \left[-\sqrt{\Delta(s)} \ 0 \ 0 \ 1 - A_1(s) \right] \quad Df(A_2(s), 0) = \left[\sqrt{\Delta(s)} \ 0 \ 0 \ 1 - A_2(s) \right]$$

Por lo tanto, $(A_1(s), 0)$ es nodo atractor y $(A_2(s), 0)$ es un silla.

En el caso $\Delta(s) = 0$, $\Delta(s) = 0$, se tiene que $(A_3(s), 0)$ es punto crítico. Sea $u = y - A_3(s)$, entonces:

$$\dot{u} = -(1-s)u^2 - \frac{\beta + m + 1}{2(1-s)}\epsilon^2 z^2 - \epsilon^2 uz^2 \quad \dot{z} = z\left(1 - \frac{\beta + m + 1}{2(1-s)}\right) - \epsilon^2 z^3 - uz$$

Dividiendo entre $1 - \frac{\beta+m+1}{2(1-s)} = 1 - A_3(s) < 0$, se tiene:

$$\dot{u} = -\frac{(1-s)}{1-A_3(s)}u^2 - \frac{A_3(s)}{1-A_3(s)}\epsilon^2 z^2 - \frac{1}{1-A_3(s)}\epsilon^2 uz^2 \quad \dot{z} = z - \frac{1}{1-A_3(s)}\epsilon^2 z^3 - \frac{1}{1-A_3(s)}uz$$

Luego, para $z = 0$, se tiene $g(u) = -\frac{(1-s)}{1-A_3(s)}u^2$. De aquí podemos afirmar que $(A_3(s), 0)$ es un silla nodo.

En la carta U_2 se tiene el sistema:

$$\dot{x} = \epsilon^2 z^2 + (1-s)x - x^2(\beta + m + 1) + \beta x^3 - \beta \epsilon^2 xz^2 \quad \dot{z} = -z[\beta \epsilon^2 z^2 + (\beta + m)x - \beta x^2 + s]$$

La matriz jacobiana asociada al sistema es :

$$[1 - s \ 0 \ 0 - s]$$

Lema 8.6. En la carta U_2 se tiene:

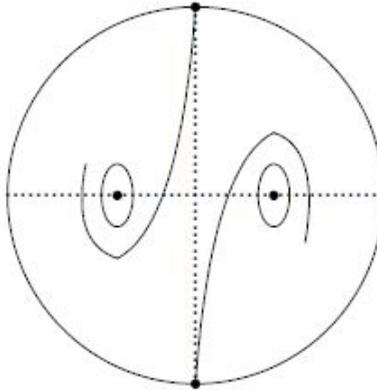
- Si $s > 0$, entonces $(0,0)$ es un punto silla.
- Si $s < 0$, entonces $(0,0)$ es un nodo repulsor.
- Es inmediato de la matriz jacobiana.

Retrato de fase del sistema

$$\{\dot{x} = \epsilon^2 - x^2 + xy \quad \dot{y} = \beta(\epsilon^2 - x^2 + xy) + mxy + sy^2 \text{ en } R_1$$

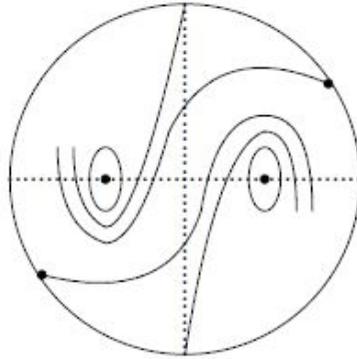
$$R_1 = \left\{ (\beta, m, s) \mid 1 + \frac{m}{s} < 0, \beta + m - 2 > 0, \beta - H(m) < 0 \right\}$$

Figura 8.14. Caso $\Delta(s) < 0$



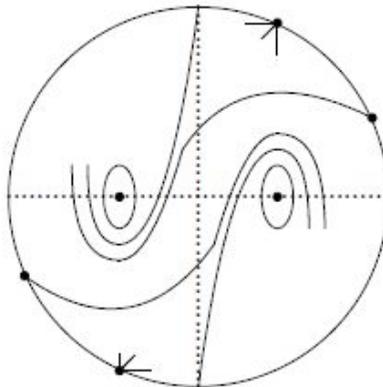
Fuente: elaboración propia.

Figura 8.15. Caso $\Delta(s)=0$



Fuente: elaboración propia.

Figura 8.16. Caso $\Delta(s)>0$

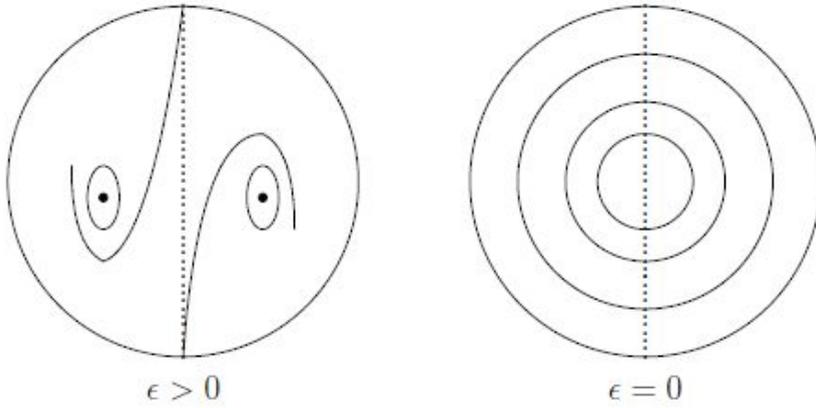


Fuente: elaboración propia.

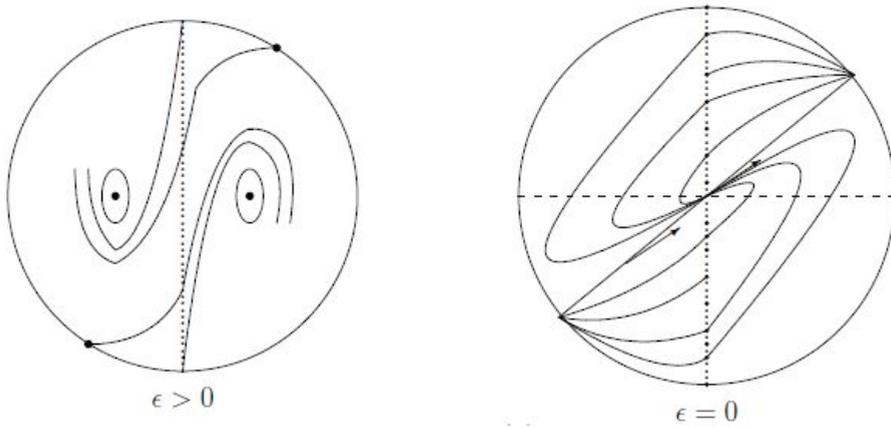
Bifurcaciones en $R \cap R_1$

Estas bifurcaciones las encontramos en la región $R \cap R_1$ con la condición que se le impone a Δ en cada caso.

1. $s = 0$

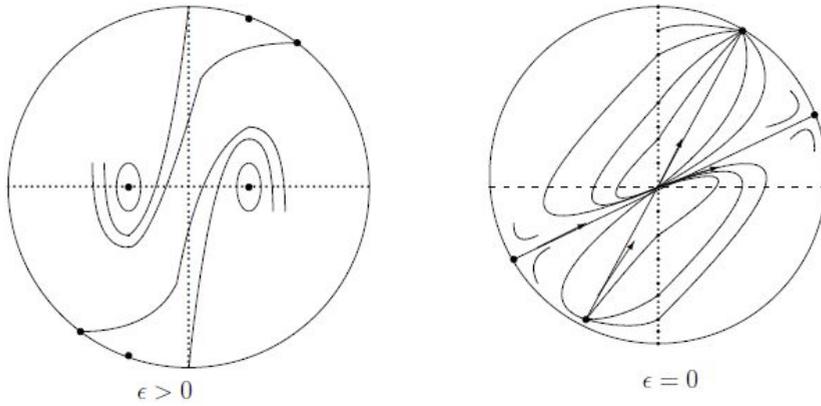
Figura 8.17. $\Delta(0) < 0$ 

Fuente: elaboración propia.

Figura 8.18. $\Delta(0) = 0$ 

Fuente: elaboración propia.

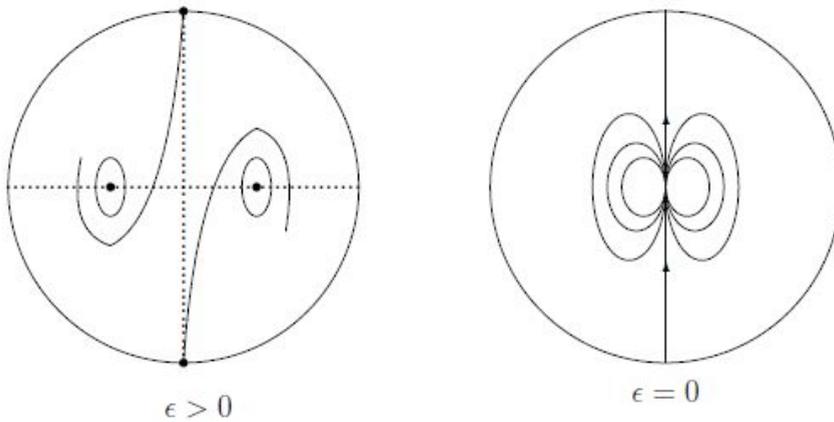
Figura 8.19. $\Delta(0) > 0$



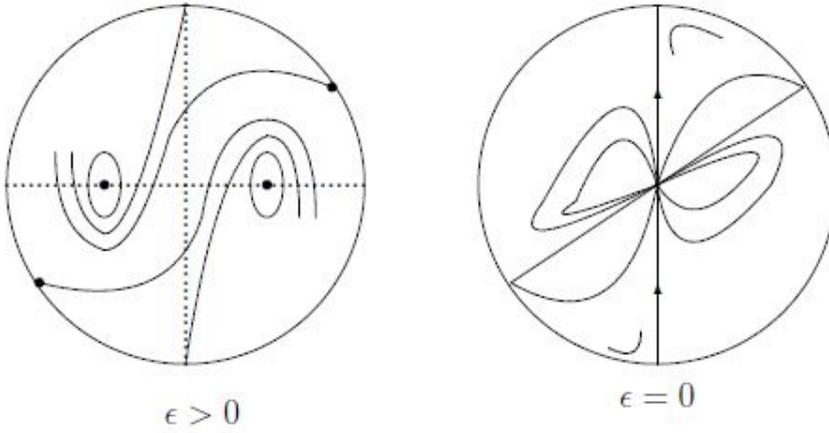
Fuente: elaboración propia.

2. $s \neq 0$

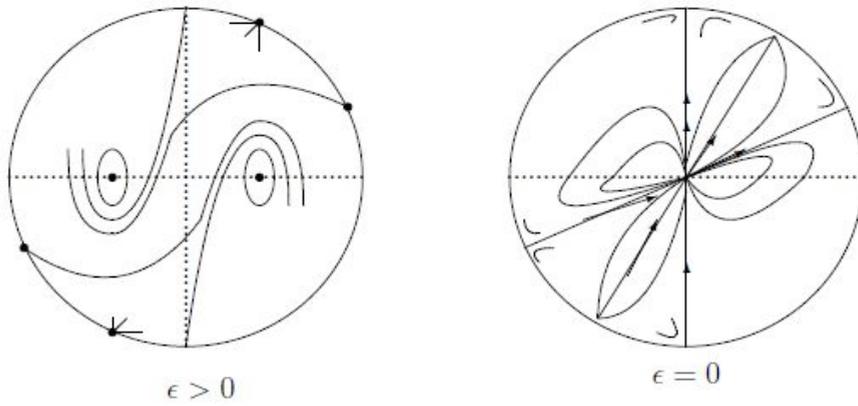
Figura 8.20. $\Delta(s) < 0$



Fuente: elaboración propia.

Figura 8.20. $\Delta(s)=0$ 

Fuente: elaboración propia.

Figura 8.21. $\Delta(s)>0$ 

Fuente: elaboración propia.

Bibliografía

- [1] A. F. Andreev, "Investigation of the Behaviour of the Integral Curves of a System of two Differential Equations in the Neighborhood of a Singular Point", *Trans. Amer. Math. Soc.* 8, pp. 183-207, 1958.
- [2] A. A. Andronov et al., *Theory of Bifurcations of Dynamical System on a Plane*. The Israel Program for Scientific Translations: Jerusalem, 1971.
- [3] H. W. Bover, F. Dumortier, S. J. van Strien y F. Takens, *Structures in Dynamics Studies in Math. Physics*, vol. 2. Ed. E. M de Jayer: North-Holland, 1991.
- [4] G. F. D. Duff, "Limit Cycles and Rotated Vector Fields", *Ann. of Math.*, vol. 67, pp. 15-31, 1953.
- [5] A. Gasull y R. Prohens, "On Quadratic Systems with a Degenerate Critical Point", *The Rocky Mountain Journal of Mathematics*, pp. 135-164, 1996.
- [6] J. Hale y H. Koçak, *Dynamics and Bifurcations*. Springer-Verlag New York, 1991.
- [7] H. Witold, *Sobre ecuaciones diferenciales ordinarias*. Ediciones Rialp: Madrid, 1978.
- [8] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*, segunda edición. Springer-Verlag New York, 1996.
- [9] L. Perko, "Rotated Vector Fields and the Global Behavior of Limit Cycles For a Class of Quadratic Systems in the Plane", *Journal of Differential Equations*, vol. 18, no. 1, pp. 63-86, 1975.
- [10] J. Guckenheimer y P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer-Verlag New York, 1983.
- [11] J. Sotomayor, *Curvas definidas por equações diferenciais no plano*. Rio de Janeiro, IMPA, 1981.
- [12] Y. Yan-Qian, *Theory of Limit Cycles*. Translations of Mathematical Monographs, vol. 66. American Mathematical Society, 1986.
- [13] Y. Yanqian, "Some problems in the Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations", *Journal of Differential Equations*, vol. 46, no. 2, pp. 153-164, 1982.

Los editores y autores

Jorge Luis Rodríguez Contreras

Licenciado en Matemática de la Universidad del Atlántico (1977), Especialista en Matemática Avanzada de la Universidad Nacional (1984), Magíster en Matemática de la Universidad Autónoma de Barcelona (2000), Doctor en Matemática de la Universidad de Barcelona (2003). Director del Grupo de Investigación Sistemas Dinámicos y EDO, categorizado como A1 por Colciencias. Entre sus publicaciones se encuentran libros y artículos referentes a ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos.

Alberto Mario Reyes Linero

Matemático de la Universidad del Atlántico (2009), Magíster en Ciencias Matemáticas de la Universidad del Atlántico (2014). Docente investigador del Programa de Matemáticas de la Universidad del Atlántico, miembro del Grupo de Investigación Sistemas Dinámicos y EDO, categorizado como A1 por Colciencias.

Otros autores

Primitivo B. Acosta-Humánez.

Angélica Arroyo Cabrera.

María Campo Donado.

Osmín Ferrer Villar.

Ismael Cohen Puertas.

Juliana P. Vargas Sánchez.

Fiama Jiménez Ochoa.

Bladimir Blanco Montes.

Luz Adriana Rodríguez Paba.