NOTAS DE CLASE DE PRE-CÁLCULO

JOSÉ MENCO
RAFAEL AHUMADA
JOAQUÍN CHOIS

De la colección: La deserción, un tigre de papel.

NOTAS DE CLASE DE PRE-CÁLCULO

NOTAS DE CLASE DE PRE-CÁLCULO

JOSÉ MENCO • RAFAEL AHUMADA • JOAQUÍN CHOIS

NOTAS DE CLASE DE PRE-CÁLCULO

Universidad del Atlántico

NOTAS DE CLASE DE PRE-CÁLCULO

José Menco
Universidad del Atlántico
Rafael ahumada
Universidad del Atlántico
Joaquín Chois
Universidad del Atlántico

EDITOR
Fernando Cabarcas Charris
Universidad del Atlántico

Universidad del Atlántico

2021

De la colección: La deserción, un tigre de papel

De la colección: La deserción, un tigre de papel

Revisión Técnica
Jairo Hernández Monzon

Corrector de estilo:
Luz Marina Torres

Diseño de portada:
Gilberto Marenco Better

Diagramación:
Jorge E. Hurtado F.

NOTAS DE CLASE DE PRECÁLCULO
Primera Edición

Por la Universidad del Atlántico
Kilómetro 7 Antigua Vía a Puerto Colombia
Barranquilla - Colombia.

ISBN: 978-958-8123-91-2

Impreso en:

Tiraje:

PRESENTACION

La Universidad del Atlántico creó, en 2008, los cursos nivelatorios para que los estudiantes admitidos que evidenciaran dificultades en su formación de lecto escritura y de pensamiento matemático, con el propósito de contrarrestar la alarmante deserción temprana en las carreras en la institución. Asimismo, y de acurdo con estudios realizados desde la vicerrectoría de docencia con datos de los exámenes de admisión que en ese entonces se practicaban, se detectaron, entre otras causas, que la baja capacidad de comprensión lectora y el bajo dominio del pensamiento lógico matemático, nuevamente, aparecían como elementos que incidían en los malos desempeños de las estudiantes que abandonan el ciclo universitario.

Con estos elementos en mente, presentamos una propuesta a una convocatoria de un proyecto consistente en la creación de ayudas educativas para evitar la deserción relacionada con estas causas, de esa forma surge la idea de que con el apoyo del recurso humano docente de la institución se crearon dos libros de texto que sirvieran de herramienta gratuita para que los estudiantes ubicados en esta condición tuvieran acceso a esta material, cuyo contenido esté orientado a estrategias pedagógicas capaces de suplir las falencias que en tales áreas del conocimiento llegan los estudiantes a la universidad.

Aunque conscientes de que la falta de competencias lectoras y matemáticas y su resultado la deserción tiene su origen en muchas razones, existe un hilo conductor se repite de forma sistemática. Esto es, en el afán de disminuir el fracaso escolar en la educación media, se ha definido, este como el porcentaje de estudiantes que no termina el bachillerato, lo que lleva al sistema a que se promueven estudiantes de un grado a otro sin la madurez académica necesaria requerida para una excelente formación. De ahí que una buena parte de la población egresada del bachillerato arribe al nivel universitario con la manifiesta incapacidad para escribir, comprender, operar y razonar. De esto dan fe no sólo los magros resultados obtenidos en las pruebas masivas estandarizadas que el sistema de evaluación colombiano practica a los estudiantes en distintos grados de escolaridad, sino también en los exámenes de admisión y en el desempeño académico en la universidad.

De cara al compromiso social de formar buenos profesionales, la Universidad ha procurado disminuir la brecha tendiéndoles puentes de tal forma que estos superen los umbrales de sus propias dificultades académicas y puedan interactuar adecuadamente con la comunidad del conocimiento. En esa continua búsqueda de opciones para disminuir la deserción, nuestra Universidad también participó en la convocatoria que para tal fin dispuso el Ministerio de Educación Nacional, del cual resultó ganadora. De ese proyecto se deriva el libro de texto Notas de Clase de Pre-Calculo, cuya elaboración estuvo a cargo de los docentes Mg. José Menco, PhD. Rafael Ahumada y Mg. Joaquín Chois.

Notas de Clase de Pre-cálculo es un texto de ayuda, básicamente intuitivo que está escrito en lenguaje sencillo y ameno. Paso a paso y con estilo directo le brinda al estudiante la posibilidad de crecer en habilidades matemáticas y algebraicas, potenciando competencias cognitivas asociadas al dominio de operaciones como la factorización, los sistemas algebraicos, la solución de desigualdades y ecuaciones, leyes de exponentes y logaritmos, entre otros temas. Los autores se han empeñado en presentar la teoría de forma inteligible y ágil sin perder rigor alguno. En concreto, se trata de un texto guía del estudiante para el abordaje de manera segura y confiada a los cursos de cálculo en la vida universitaria. De cara a mejorar los resultados de nuestros estudiantes, con herramientas de apoyo en los procesos de formación y de apuntarle a la acreditación de calidad de programas e institucional, ponemos a disposición de estudiantes y profesores estas notas de clase. A nombre de nuestra Institución agradezco a todos los que de alguna forma contribuyeron para que este proyecto se concretara, al PhD en Matemáticas, Jairo Hernández Munzón, por la revisión de la versión preliminar y a la Magíster Luz Marina Torres Roncallo por los ajustes de estilo que a bien realizó al escrito inicial. Para terminar, espero que este material didáctico, especialmente concebido para los estudiantes de Pre - cálculo sea de gran ayuda.

FERNANDO CABARCAS CHARRIS
Editor

ÍNDICE.

INTRODUCCIÓN

Las NOTAS DE CLASE DE PRE-CÁLCULO tienen el propósito de servir de guía tanto a profesores como a estudiantes en el desarrollo del curso de PRE-CÁLCULO del primer semestre. Pretende, asimismo, aclarar las dudas que se les puedan presentar a los estudiantes en dicho curso.

Este texto provee las bases matemáticas necesarias para realizar un primer curso de CÁLCULO DIFERENCIAL. De ahí que esté limitado al desarrollo de los elementos básicos de los conjuntos, en especial su algebra operativa, la presentación en forma intuitiva de las propiedades fundamentales de los números reales y el manejo algebraico de las desigualdades. De la misma forma, presenta el estudio del plano cartesiano y el producto cartesiano de conjuntos con sus respectivas propiedades. Aspecto básico para el desarrollo del concepto de función, del cual se desprenden los estudios de las más importantes como son las funciones polinomiales, las racionales, la exponencial y su inversa la función logarítmica, finalizando con las funciones trigonométricas.

Este curso sigue el esquema intuitivo sin perder el formalismo matemático. En razón a ello, algunos resultados aparecen sin demostraciones y otros, con apenas un esbozo de ellas, teniendo en cuenta el entendimiento gráfico de los resultados.

Los estudiantes deben resolver todos los problemas propuestos, pues les ayudará a aclarar las dudas que hayan podido quedar al estudiar la parte teórica.

La serie de ejercicios con algún grado de dificultad persigue que los estudiantes no sólo consulten otros textos, sino, también asistan a las tutorías brindadas por los docentes.

NOTAS DE CLASE DE PRE-CÁLCULO, además de ser una guía y apoyo al proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas básicas, también hace parte del interés institucional en mejorar los niveles académicos de los estudiantes en este campo del conocimiento.

CAPITULO 1: CONJUNTOS

1.1 La noción de conjunto

La actual matemática esta formulada en el lenguaje de los conjuntos. A partir del concepto de conjunto, considerado como una de las nociones más simples de las ideas matemáticas, todos los conceptos matemáticos pueden ser expresados.

Un conjunto esta formado por sus elementos

Dado un conjunto A y un objeto cualesquiera a, la única pregunta posible con relación a ellos es: **¿a es o no es elemento del conjunto A?**
En caso afirmativo, se dice que a es un elemento de A y se observa que $a \in A$, en caso contrario, se aprecia $a \notin A$ y se lee: a no es elemento del conjunto A.

La matemática se ocupa fundamentalmente de los números y del espacio. Por lo tanto, los conjuntos más frecuentes son los numéricos, las figuras geométricas -que son conjuntos de puntos- y los conjuntos que se deriven de éstos, como los de funciones, de matrices, etc. El lenguaje de los conjuntos, universalmente adoptado en la presentación de la matemática, ha ganado el privilegio de dar a los conceptos y a las proposiciones de ésta ciencia, la precisión y la generalidad que constituyen su característica básica.

Los conjuntos sustituyen a las propiedades y a las condiciones. Por ejemplo; sea P la propiedad de un número natural x de ser par, o sea divisible por 2 y C la condición que cumple el número real y, expresado por $y^2 - 5y + 6 = 0$; por otro lado, sean:

$$\boldsymbol{A} = \{2,4,6,8,10,\dots\}$$
$$\boldsymbol{B} = \{2,3\}$$

Entonces se dice que x cumple la propiedad P ó que y cumple la condición C, es lo mismo que afirmar que $x \in P, y \in C$.

La ventaja de utilizar el lenguaje y la notación de los conjuntos radica en que entre estos existe un algebra, basada en las operaciones de unión: $A \cup B$, intersección: $A \cap B$, además de la relación de inclusión: $A \subseteq B$, Las propiedades y reglas operatorias de esa algebra, por ejemplo: $\boldsymbol{A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)}$ **y** $\boldsymbol{A \cap B \subseteq A}$ son muy fáciles de manejar y representan una enorme ganancia en la simplicidad y exactitud, en comparación con la utilización de propiedades y condiciones.

Existe un conjunto excepcionalmente importante: **el conjunto vacio,** expresado por medio del **símbolo** $\emptyset$**.**

El conjunto vacio es aceptado como conjunto porque cumple la útil función de simplificar las proposiciones, evitando una larga y tediosa mención de excepciones. Así, cualquier propiedad contradictoria sirve para definir el conjunto vacío, por ejemplo $\emptyset = \{x | x \neq x\}$ o sea $\emptyset$ es el conjunto de los objetos x que son diferentes así mismo; sea cual fuese el objeto x, siempre se tiene que $x \notin \emptyset$.

En muchas preguntas matemáticas es importante saber que un determinado conjunto X no es vacio, para mostrar que X no es vacio se debe encontrar un objeto x, tal que $x \in X$.

1.2 La relación de inclusión

Sean A y B conjuntos, si todo elemento de A, también es elemento de B, se dice que A es un subconjunto de B, para indicar lo anterior se procede así: $A \cap B$. Por ejemplo, como todo triangulo es un polígono, entonces, si T es el conjunto de los triángulos y P el conjunto de los polígonos, tenemos que $T \subseteq P$.

Si P es el conjunto de los números pares y T es el conjunto de los múltiplos de 3, entonces $P \nsubseteq T$ **por que** $\boldsymbol{2 \in P}$ **y** $\boldsymbol{2 \notin T}$ **también** $\boldsymbol{T \nsubseteq P}$ **por que** $\boldsymbol{3 \in T}$ **y** $\boldsymbol{3 \notin P}$**.**

La relación $\boldsymbol{A \subseteq B}$ se denomina relación de inclusión

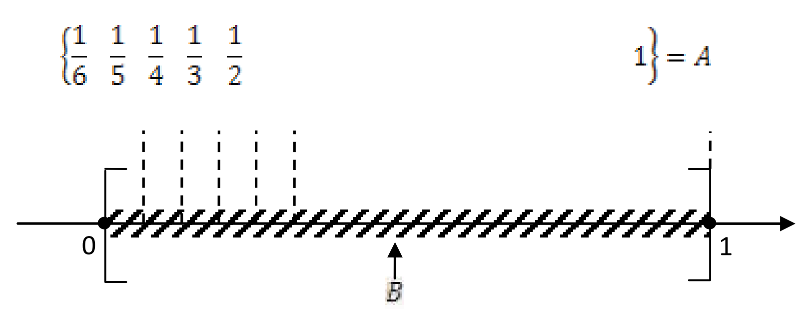
Para demostrar que A no es subconjunto de B como se nota en $A \nsubseteq B$ se debe mostrar un elemento de A que no es de B

Ejemplo:

i) Sea $U = R$, sean $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}\right\}$ y $B = \{x \in R | 0 \leq x \leq 1\} = [0,1]$

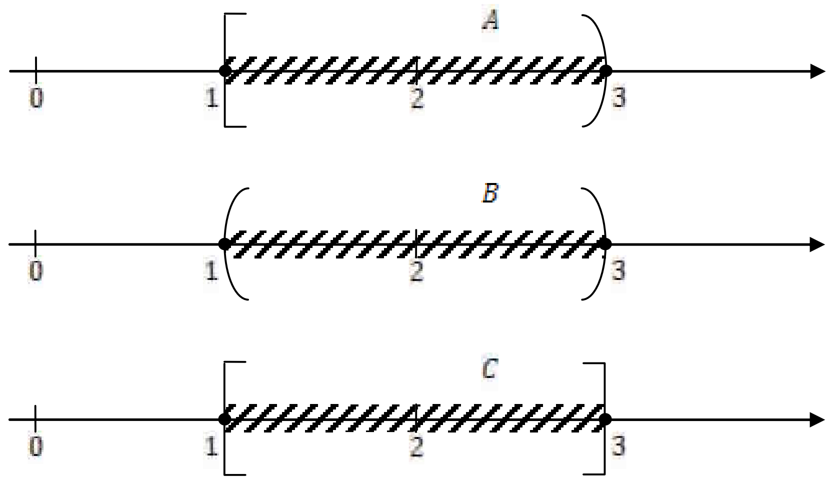
Se tiene que $U = R$ como el conjunto universal, lo que se precisa mas adelante.

Observando los elementos de A, vemos que cada uno de ellos no es mayor que 1 ni menor que cero; luego cada elemento de A está comprendido entre cero y uno, o sea que $A \subseteq B$; veámoslo gráficamente:



ii) Sea $U = R$, sean $A = \{x|1 \leq x < 3\}$, $B = \{x|1 < x < 3\}$ y $C = \{x|1 \leq x \leq 3\}$

Analicemos estos tres conjuntos:



De lo anterior se deduce que todo elemento de A, lo es también de C, luego $A \subseteq C$; de igual forma, todo elemento de B es también elemento de C, es decir $B \subseteq C$, ahora $1 \in A$, pero $1 \notin B$, luego $A \nsubseteq B$; $3 \in C$ pero $3 \notin A$ lo que nos dice que $C \nsubseteq A$; $3 \in C$ pero $3 \in B$, luego $C \nsubseteq B$.
En resumen tenemos: $B \subseteq A, A \subseteq C$ y $B \subseteq C$.

Pregunta: ¿se cumplirá que $B \subseteq A$ y $A \subseteq C$ implique que $B \subseteq C$, para A, B, C subconjuntos de un universo E?

Definición

Sean A, B conjuntos, se afirma **que A y B son iguales cuando simultáneamente A es subconjunto de B y B es subconjunto de A** de lo contrario, se deduce que los conjuntos A, B son desiguales o diferentes si existe

un elemento de A que es elemento de B, o bien si existe un elemento de B que no es elemento de A.

Ejemplo

i) $N \neq Z$ por que $-1 \in Z$ y $-1 \notin N$

ii) $Z \neq Q$ por que $\frac{1}{2} \in Q$ y $\frac{1}{2} \notin Z$

iii) $Q \neq R$ por que $\sqrt{2} \in R$ y $\sqrt{2} \notin Q$ nótese que $N \subseteq Z$, $Z \subseteq Q$ y $Q \subseteq R$

Definición

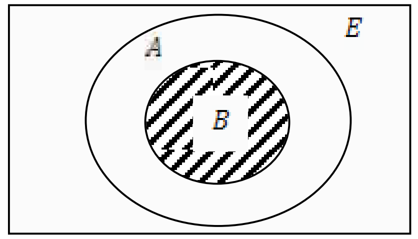
Sean A y B conjuntos, A se dice subconjunto propio de B si A es subconjunto de B y además A es diferente de B, lo anterior se expresa $\boldsymbol{A \subsetneq B}$ o también A es subconjunto propio de B, si A es subconjunto de B y además existe un elemento de B que no pertenece a A.

En los ejemplos anteriores tenemos que

i) $N \subsetneq Z$
ii) $Z \subsetneq Q$
iii) $Q \subsetneq R$

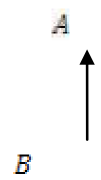
Representación de conjuntos por diagrama de Venn.

i)



$B \subsetneq A$

ii)



$B \subseteq A$

Propiedades de los subconjuntos.

i) $\emptyset \subseteq A$

ii) $A \subseteq A$ para todo conjunto A

iii) $(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \Longrightarrow (A \subseteq C)$

iv) $\sim(A \subsetneq A)$ $\sim$: es falso que

v) $(A \subsetneq B \wedge B \subsetneq C) \Longrightarrow A \subsetneq C$

vi) $A \subsetneq B \Longrightarrow A \subset B$

vii) $A \subsetneq B \Longrightarrow \sim(B \subsetneq A)$

1.3 Unión e intersección de conjuntos

Definición

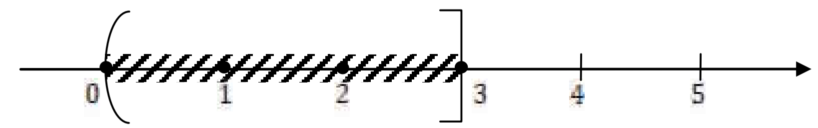
Sean A y B subconjuntos cualesquiera de un universo U, llámese reunión o unión de A y B al conjunto formado por aquellos elementos que están en A, están en B ó en A y B simultáneamente; este nuevo conjunto se designa así: $A \cup B$

$$A \cup B = \{x \in R | x \in A \vee x \in B\}$$

Ejemplo

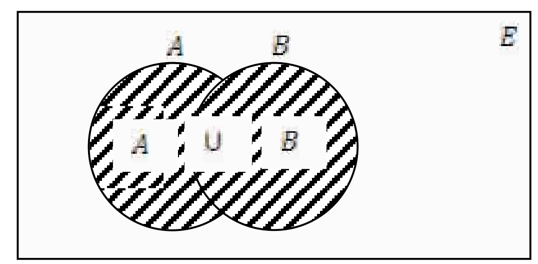
Sea $U = R,\ A = \{x \in R | 0 < x \leq 3\}\ B = \{0,1,4,5\}$. Es obvio que $A \subseteq R,\ B \subseteq R$

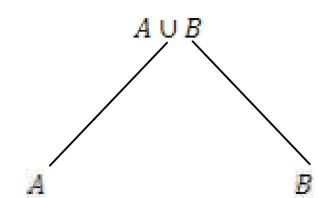
$$A \cup B = \{0,1,4,5\} \cup (0,3]$$



Luego: $A \cup B = [0,3] \cup \{4,5\}$

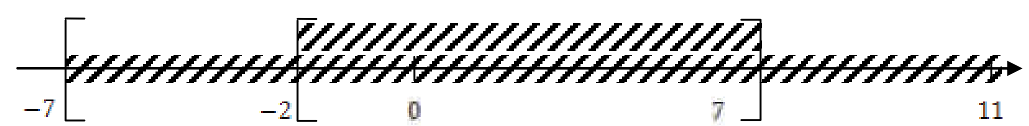
Representación de la unión por medio de los diagramas de Venn y lineal.





Ejemplo

Sea $U = R,\ A = \{x \in R | x \geq -7\}\ B = \{x \in R | -2 \leq x \leq 11\}$ es decir $A = [-7, \infty)\ B = [-2, 11]$



$$A \cup B = [-7, +\infty)$$

Obsérvese que $B \subsetneq A$ y $A \cup B = A$. ¿Se cumplirá en general?

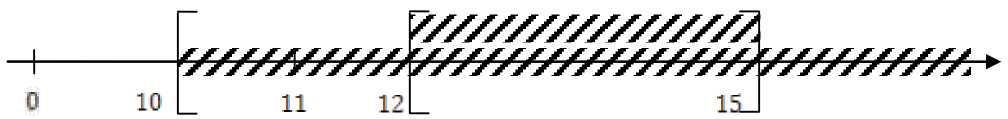
Definición

Sean A y B subconjuntos cualesquiera de un universo U, el conjunto formado por los elementos que están simultáneamente en A y B, se conoce como la intersección de A y B y se nota $A \cap B$

$$A \cap B = \{x \in E | x \in A \;\wedge\; x \in B\}$$

Ejemplo:

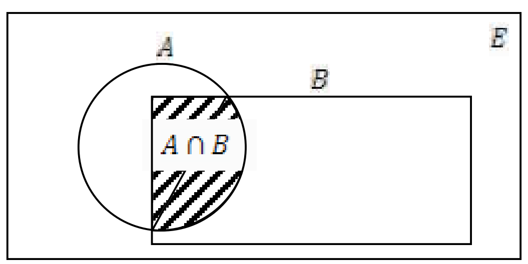
Sea $U = R$ $A = \{x \in R | x \geq 10\}$ $B = \{x \in R | 12 \leq x \leq 15\}$ o sea $A = [10, +\infty)$ $B = [12,15]$

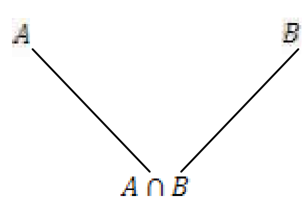


$$A \cap B = [12,15] = B$$

Obsérvese que $B \subsetneq A$ y $A \cap B = B$. ¿Se cumplirá en general?

Diagramas de Venn y lineal de la intersección.



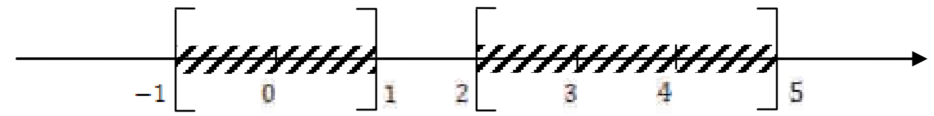


Definición

Sean A y B subconjuntos cualesquiera de un universo U, si $A \cap B = \emptyset$, se dice que A y B son disyuntos, esto es A y B no poseen elementos comunes.

Ejemplo:

Sea U$= R$, $A = \{x \in R | -1 \leq x \leq 1\}$ $B = \{x \in R | 2 \leq x \leq 5\}$ o sea $A = [-1,1]$ $B = [2,5]$



$A \cap B = \emptyset$, luego A y B son disyuntos.

Propiedades de la unión y la intersección.

i) $A \cup A = A$ para todo A conjunto

ii) $A \cap A = A$ para todo A conjunto

iii) $(A \cup A) \cup C = A \cup (B \cup C)$ para todo conjunto A, B, C

iv) $(A \cap A) \cap C = A \cap (B \cap C)$ para todo conjunto A, B, C

v) $A \cup B = B \cup A$ para todo A y B conjunto

vi) $A \cap B = B \cap A$ para todo conjunto A, B

vii) $A \cup \emptyset = A$ para todo conjunto A

viii) $A \cap E = A$ para todo conjunto A

ix) $A \cup E = E$ para todo conjunto A

x) $A \cap \emptyset = \emptyset$ para todo conjunto A

xi) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ para todo conjunto A, B, C

xii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ para todo conjunto A, B, C

1.4 Diferencia y complemento de conjuntos.

La noción de complemento de un conjunto solo tiene sentido cuando se fija un conjunto U, llamado el conjunto universo del discurso o conjunto universal, U podría ser llamado el asunto de discusión o el tema en estudio:

Solamente se habla de los elementos de U una vez fijado en U, todos los elementos a ser considerados que pertenecen a U y todos los conjuntos serán subconjuntos de U, por ejemplo en la geometría plana, U es el plano, en la teoría aritmética de la divisibilidad U es el conjunto de los números enteros Z.

Definición

Dado un conjunto A, el cual es subconjunto de U, llamase el complemento de A, al conjunto A^c ó A' formado por los objetos de U que no pertenecen a A.

Recordemos que fijado un conjunto A, para cada elemento x en U, vale una y solo una de las afirmaciones $x \in A$ ó $x \notin A$.

El hecho, de que para todo $x \in U$, no existe una alternativa diferente de $x \in A$ ó $x \notin A$, en lógica es conocido como el **Principio del tercio excluido** y el hecho de que las alternativas $x \in A, x \notin A$ no pueden ser verdaderas al mismo tiempo, se llama el **principio de no-contradicción**. Aplicando los principios anteriores se obtienen las siguientes propiedades

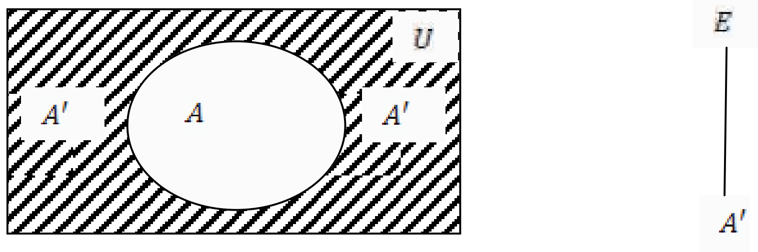
1) Para todo $A \subseteq U$, se tiene que $(A^c)^c = A$ o sea todo conjunto es el complemento de su complemento.

2) Si $A \subseteq B$ entonces $B^c \subseteq A^c$. Si un conjunto esta contenido en otro, su complemento contiene el complemento del otro.

3) $A \subseteq B$ equivale a $B^c \subseteq A^c$.

Obsérvese que si U es el universo entonces $U^c = \emptyset$ y $\emptyset^c = U$

Diagramas de Venn y lineal del complemento.

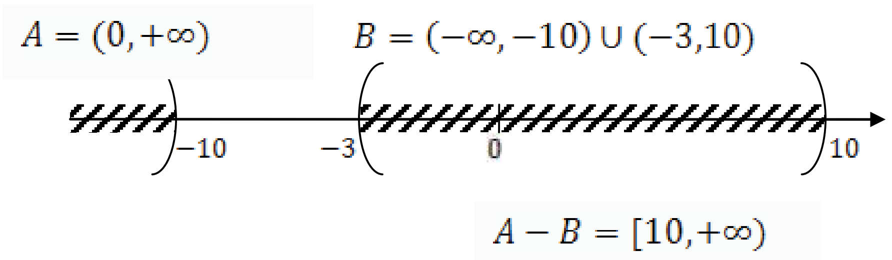


Definición

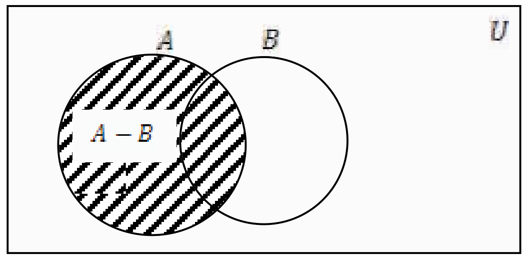
Sean A y B subconjuntos de un universo U; se denomina diferencia entre A y B al conjunto formado por aquellos elementos que están en A y no están en B, este nuevo conjunto se designa: $A - B$

Ejemplo:

Sea $U = R,\ \ A = \{x \in R | x > 0\}$ y $B = \{x \in R | x < -10 \ \ \vee \ \ -3 < x < 10\}$



Diagramas de Venn y lineal de la diferencia simétrica



Propiedades de la diferencia entre dos conjuntos

i) $A - A = \emptyset$

ii) $\emptyset - A = \emptyset$

iii) $A - \emptyset = A$

iv) $A - B \subseteq A$

v) $\big((A - B) - C\big) \subseteq (A - (B \cup C))$

vi) Si $A \subseteq B$ entonces $A - B = \emptyset$

vii) $A - B = A \cap B^c$

viii) $(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$

ix) $(A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B) = A \cup B$

x) $A - (A \cap B) = A - B$

1.5 Conjunto de partes de un conjunto

Sea A un subconjunto de universo U, existe un conjunto cuyos elementos son exactamente los subconjuntos de A, a dicho conjunto lo llamamos partes de A y se nota $P(A)$.

Ejemplo 1

Sea $U = R$, $A = \{1,2,3\}$, entonces $P(A) = \{\emptyset, \{1,2,3\}, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$

Obsérvese que $\#(P(A)) = 8 = 2^3$ y $\#A = 3$

Ejemplo.

Sea $E = alfabeto\ castellano$

$B = \{a, x\}$ $\quad\quad$ $\#B = 2$ $\quad\quad$ $\#\big(P(B)\big) = 2^2 = 4$

$P(B) = \{\emptyset, \{a, x\}, \{a\}, \{x\}\}$

Propiedades del conjunto de partes.

i) $P(A) \neq \emptyset$, por que $\emptyset \in P(A)$ para todo conjunto A, también $A \in P(A)$, para todo conjunto A

ii) Si $a \in A$ entonces $\{a\} \subseteq A$ luego $\{a\} \in P(A)$

iii) Sea A un conjunto contenido en un universo U, si el numero de elementos de A es n entonces el numero de elementos de $P(A)$ es 2^n

iv) Sean A y B conjuntos contenidos en un universo U y $A \subseteq B$ entonces $P(A) \subseteq \mathrm{P(B)}$ y viceversa si $P(A) \subseteq \mathrm{P(B)}$ entonces $A \subseteq \mathrm{B}$

v) Sean A y B conjuntos contenidos en un universo U, el conjunto de partes de A, unido con el conjunto de partes de B, es un subconjunto del conjunto de partes de A unido con B, o sea $(P(A) \cup P(B)) \subseteq \mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$

vi) Sean A, B conjuntos contenidos en un universo U, el conjunto de partes de A interceptado con el conjunto de partes de B, es igual, al conjunto de partes de A interceptado con B o sea $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$

vii) Sean A, B conjunto contenidos en un universo U, el conjunto de partes de $(A - B)$ es un subconjunto de la diferencia entre $P(A)$ y $P(B)$, unido al conjunto de partes del conjunto vacio, o sea $P(A - B) \subseteq \{(\mathrm{P(A)} - \mathrm{P(B)}) \cup \mathrm{P}(\emptyset)\}$

1.6 Ejercicios

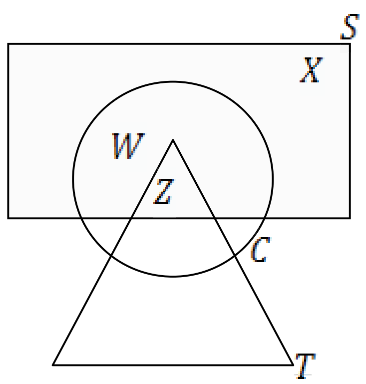
Identifique, según sea el caso, como ciertos o falsos los planteamientos propuestos en los siguientes ejercicios. Justifique su respuesta:

1. $A \in \{A\}$ con $A \neq \emptyset$, A conjunto

2. $\{0\} \in \{1,5,0,6\}$

3. $\{1,3\} \notin \left\{ \{1\}, 1,3, \{1,3\}, \{\{1\}, \{3\}\} \right\}$

4. $\emptyset \in \{\{\emptyset\}, \emptyset\}$



a) $Z \in S$

b) $Z \notin C$

c) $Z \in T$

d) $W \in T$

e) $X \in T$

f) $X \in S$

g) $W \in S$

h) $W \in C$

i) $X \in C$

Escribir los siguientes conjuntos dados por comprensión:

5. $A = \{x \in N | x = 5 \text{ ó } x = 3 \text{ ó } x = 0\}$

6. $B = \{x \in Z | x = 5 \text{ y } x = \sqrt{25}\}$

7. $C = \{x \in Z | x = 8 \text{ y } x = 3\}$

8. $D = \{x \in \{1,2,6,8\} | x = 2 \text{ ó } x - 1 = 1\}$

9. $E = \{x \in R | (x = 5 \text{ y } x^2 = 25) \text{ ó } \frac{10}{x} = 5\}$

10. $A = \{x \in N | (x + 3)(x + 8) = 0\}$

11. Probar que: si B es tal que para todo conjunto A, $A \cup B = A$ entonces $B = \emptyset$.

12. Decir si son ciertos o falsos los siguientes planteamientos:

a) $A \in \{A\}$ con $A \neq \emptyset$ y A conjunto

b) $A \subseteq \{A\}$ con $A \neq \emptyset$ y A conjunto

c) $\{0\} \in \{1,5,0,6\}$

d) $\emptyset \in \{\{\emptyset\},\emptyset\}$

e) $\{0\} \subseteq \{1,0,3,2\}$

f) $\{\{0\}\} \subseteq \{1,3,0,5\}$

CAPITULO II: NÚMEROS REALES

Introducción.

Los números naturales N corresponden al modelo para contar que se enseña desde la educación primaria. De este modo, se aprende que el proceso de medir las cantidades continuas conduce a la noción de número real. En este sentido, se usará como prototipo la determinación de la longitud de un segmento. Este ejemplo de medición es muy significativo ya que el conjunto de los números reales es conocido también como la recta real o simplemente la recta.

A continuación, se recordará la notación usual de los números naturales N, numero enteros Z y números racionales Q.

$N = \{1,2,3,4,5,\ldots\}$

$Z = \{\ldots,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$

$Z = N \cup \{0\} \cup \{-N\}$

$Q = \left\{\frac{p}{q}\middle| p \in Z, q \in N\right\}$

Además de los números racionales, existen otros números como $\sqrt{2}$ que reciben la denominación de irracionales y se identificarán con I, por tanto $I = \left\{x\middle| x \neq \frac{p}{q}, p \in Z, q \in N\right\}$. También existen otros números, los llamados reales que contienen a Q y a I o sea $R = Q \cup I$, éste conjunto tiene dos operaciones **suma** $(+)$ y multiplicación $(\cdot)$ que a su vez tienen las siguientes propiedades:

En el caso de la suma se representa como $a + b$ y existe cualesquiera sean a y b, los cuales, por supuesto, pueden coincidir.

1. **Propiedad asociativa de la suma.**

Si a, b, c son números reales, entonces:

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

El número 0 (cero) tiene la siguiente propiedad muy importante:

La existencia de una identidad para la suma.

Si a es un número real cualquiera, entonces:

$$a + 0 = 0 + a = a$$

El numero 0 (cero), también desempeña un importante papel en la tercera propiedad.

2. **Existencia de inverso para la suma.**

Para todo número a, existe un número $-a$ tal que:

$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

3. **Propiedad conmutativa para la suma.**

$$a + b = b + a$$

Definición

Se define la resta de dos números a y b, la cual se nota $a - b$, como $a - b = a + (-b)$. Según la definición anterior y la propiedad3, podemos decir que la resta es una operación de la suma.

Es posible encontrar la solución de ciertas ecuaciones sencillas mediante una serie de pasos, cada uno justificado por las propiedades $1, 2, 3$.

Ejemplo

$x+5=9$

$(x+5)+(-5)=9+(-5)$

$x+\big(5+(-5)\big)=9-5$

$x+0=4$

$x=4$

En la práctica no es necesario resolver la ecuación indicando de manera tan explicita la aplicación de las propiedades $1,2,3,4$.

4. Propiedad asociativa de la multiplicación.

Si a,b y c son números reales cualesquiera, entonces:

$$a(bc)=(ab)c$$

5. **Existencia de una identidad para la multiplicación**

Existe 1 (uno), diferente de cero (0), tal que para todo número real a se tiene que $a\cdot 1=1\cdot a=a$

6. **Existencia de inverso para la multiplicación**

Para todo numero real $a\neq 0$, existe un número a^{-1}, tal que:

$$a\cdot a^{-1}=a^{-1}\cdot a=1$$

7. Propiedad conmutativa para la multiplicación.

Dados a y b números reales cualesquiera, entonces: $ab=ba.$

Es importante destacar el hecho de que en la propiedad 7 existe la condición $a\neq 0$, la cual es absolutamente necesaria por que: $0\cdot b=0$ para todo número

real b y por lo tanto no existe ningún número 0^{-1} que satisfaga $0\cdot 0^{-1}=1$, la anterior restricción tiene una notoria consecuencia para la división.

Definición

La división de dos números $a,b,b\neq 0$, notada $\frac{a}{b}$, se define como:

$$\frac{a}{b}=a\cdot b^{-1}$$

Puesto que 0^{-1} carece de sentido, también ocurre lo mismo con $\frac{a}{0}$; la división por cero (0) es siempre indefinida, lo cual indica que no se puede dividir por cero (0).

De la propiedad 7 se desprenden dos consecuencias importantes. Si $ab=ac$ no se sigue necesariamente que $b=c$, pues si $a=0$, tanto ab como ac son cero (0), cualesquiera que sean b y c. Pero si $a\neq 0$, entonces $b=c$, resultado que se deduce de la propiedad 7. Así:

Si $ab=ac,\ a\neq 0$

Entonces $a^{-1}(ab)=a^{-1}(ac)$

De done $(a^{-1}a)b=(a^{-1}a)c$

$1\cdot b=1\cdot c$

$b=c$

Se concluye también de la propiedad 7 que si $ab=0$ y $a\neq 0$, entonces $a^{-1}(ab)=0$ de donde $(a^{-1}a)b=0$, luego $1\cdot b=0$, o sea $b=0$.

Ejemplo

Si un número real x satisface $(x-3)(x-4)=0$ se sigue entonces que, o bien $x-4=0$ ó $x-3=0$ de donde: $x=3$ ó $x=4$.

8. Propiedad distributiva de la suma con respecto al producto

Dados a, b y c números reales cualesquiera, entonces:

$$a(b+c)=ab+ac$$

Ejemplo

Para mostrar la utilidad de la propiedad 9, determinaremos exactamente cuando se cumple $a-b=b-a$.

Si $a-b=b-a$, entonces $(a-b)+b=(b-a)+b$

Luego $a=b+(b-a)=(b+b)-a$

$a+a=(b+b)-a+a$

$a+a=b+b+((-a)+a)$

$a+a=b+b$ Luego

$a(1+1)=b(1+1)$, Como $1+1\neq 0$ entonces

$a=b$

Ejemplo

Una segunda aplicación de 9 es la justificación de $a\cdot 0=0$

Si $a\cdot 0=a\cdot(0+0)$

$a\cdot 0=a\cdot 0+a\cdot 0$

$a\cdot 0+(-a\cdot 0)=(a\cdot 0+a\cdot 0)+(-a\cdot 0)$

$0=a\cdot 0+(a\cdot 0+(-a\cdot 0))$

$0=0\cdot a+0$

$0=a\cdot 0$

Otras consecuencias de la propiedad 9, propuestas a manera de ejercicio son:

$$(-a)b=-(ab)$$

$$(-a)(-b)=ab$$

Para enunciar las tres propiedades restantes, debemos considerar la existencia de los números positivos.

9. Propiedad de tricotomía.

Para un número real a se cumple una y solo una de las siguientes igualdades:

i) $a=0$

ii) a es positivo

iii) $-a$ es positivo

10. Propiedad de la cerradura de la suma

Si a y b son positivos, entonces $a+b$ es positivo.

***11.* Propiedad de la cerradura de la multiplicación**

Si a y b son positivos, entonces ab es positivo.

Definición

Sean a, b números reales cualesquiera.

$a > b$ Si $a - b$ es positivo; lo cual se lee "a es mayor que b"

$a < b$ Si $a - b$ es negativo; lo cual se lee "a es menor que b"

$a \leq b$ Si $a < b$ ó $a = b$

$a \geq b$ Si $a > b$ ó $a = b$

Nótese que en particular $a > 0$ es lo mismo que decir que a es positivo.

Ejemplo.

Se muestra una aplicación de las propiedades $10, 11$ y 12.

Si $a < b$ entonces $a + c < b + c$, en efecto como $a < b$ se tiene que $b - a$ es positivo, o sea $b - a > 0$, luego $(b - a) + 0 > 0$ luego $(b + c) - (a + c) > 0$ luego $b + c > a + c$ ó sea $a + c < b + c$.

Derive de las propiedades 1 a 12 de los números reales, las siguientes afirmaciones:

12. Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$

(Generalmente las dos desigualdades $a < b$ y $b < c$ se escriben en la forma abreviada $a < b < c$).

13. Si $a < 0$ y $b < 0$ entonces $ab > 0$

(El símbolo $a < 0$ significa que $0 > a$, o sea que $0 - a$ es positivo).

Según lo anterior, se tiene que $ab > 0$ cuando se cumple uno de los casos siguientes, $a > 0$ y $b > 0$ ó $a < 0$ y $b < 0$, lo que dice que si $a = b$ y diferente de cero, se tiene que $a^2 > 0$ si $a \neq 0$, así los cuadrados de números

reales distintos de cero son siempre positivos y en particular se tiene que $1 > 0$.

14. Si $ax = a$ para $a \neq 0$ entonces $x = 1$

15. $(x^2 - y^2) = (x - y)(x + y)$

16. **Si $x^2 = y^2$ entonces $x = y$ ó $x = -y$**

17. $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ **si b y c son diferentes de cero**

18. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ **si b y d son diferentes de cero**

19. $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ **si a, b son diferentes de cero.**

20. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ **si b y d son diferentes de cero.**

21. $\frac{a}{b} / \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$ si b, c y d son diferente de cero.

22. Si b, d son diferentes de cero, entonces $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ cuando $ad = bc$

23. Si $a < b$ y $c < d$ entonces $a + c < b + d$

24. Si $a < b$ entonces $-b < -a$

25. Si $a < b$ y $c > 0$ entonces $ac < cb$

26. Si $a < b$ y $c < 0$ entonces $ac > cb$

27. Si $a > 1$ entonces $a^2 > a$

28. Si $0 < a < 1$ **entonces** $a^2 < a$

29. Si $0 \leq a < b$ **y** $0 \leq c < d$ **entonces** $ac < bd$

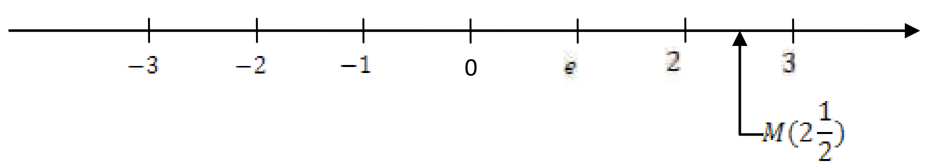
30. Si $a \geq 0$ **y** $b \geq 0$ **y** $a^2 < b^2$ **entonces** $a < b$

Nota

El axioma de completes es otra propiedad de los números reales (Tom M. Apóstol, Tomo I) cuyo estudio no está previsto en los objetivos de este curso.

2.1 El eje numérico

Para determinar la posición de un punto en una recta se procede de la siguiente forrma: se elige en la recta un punto 0, como origen de referencia, un punto cualquiera e y como unidad de medida se toma el segmento oe y tomamos además una dirección la cual se considera positiva. En la figura a continuación esta indicada por una flecha.



El eje numérico es la recta en la cual estan indicados el origen de referencia, la unidad de medida y la dirección positiva. Para determinar la posición de un punto en el eje numérico, es suficiente designar un número, por ejemplo $+5$. Esto significa que el punto se encuentra a una distancia de 5 unidades de medida del origen de referencia en la dirección positiva.

La coordenada de un punto en el eje numérico, es el número que determina la posición del punto en este eje. La coordenada del punto en el eje numérico es igual a la distancia entre el punto de referencia y el punto, la cual se expresa en la unidad de medida elegida y se considera con signo mas si el punto se

encuentra en la dirección positiva del origen y con signo menos en caso contrario. Frecuentemente el origen de referencia se llama origen de coordenadas, la coordenada del punto 0 es igual a cero (0).

Notemos $M(a)$ para designar el punto M con coordenada $\underline{a}$, en forma abreviada se dice punto $\underline{a}$.

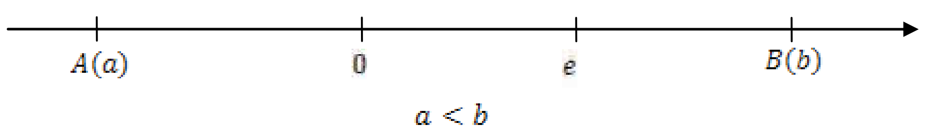
De esta forma se ha establecido una correspondencia entre números reales y los puntos de la recta, concluyendo que a cada punto de la recta corresponde un numero determinado: su coordenada y a cada numero real en esta misma correspondencia de un punto determinado de la recta.

En la misma forma como se ha establecido la correspondencia anterior, los números reales positivos, cuyo conjunto se nota R^+ quedan sobre la semi-recta $\overline{oe}$ y los negativos sobre la semi-recta opuesta. El punto 0 no pertenece a ninguna de las dos semi-rectas que determina, ya que el numero real cero (0) no ni negativo ni positivo.

Así los reales han quedado divididos en tres conjuntos a saber: $R^+, \{0\}$ y el conjunto de los reales negativos R^-.

El orden que le dimos a los números reales lo podemos interpretar así:

Si $a.b$ son dos números reales cualesquiera y A, B son sus puntos correspondientes en el eje numérico, $a < b$ significa que A esta a la izquierda de B.



2.2 Intervalos

Definición

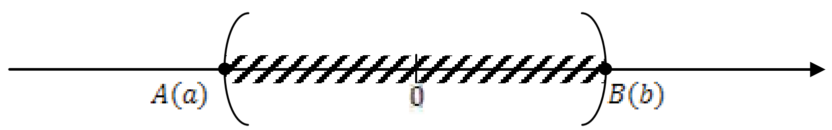
Un conjunto formado por los números reales comprendidos entre dos numero a y b dados, $a < b$, recibe el nombre de intervalo de extremos a y b.

Los intervalos puede ser de varios tipos, según contengan o no sus extremos. Se distinguen los siguientes:

Intervalo abierto.

El conjunto de reales comprendidos entre a y b, sin incluir ni a ni b, se denomina **intervalo abierto** y se nota (a, b), como se ve en la figura.

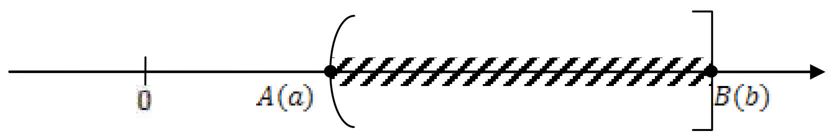
$(a, b) = \{x \in R | a < x < b\}$



Intervalo semi-abierto.

El conjunto de los reales comprendidos entre a y b, $a < b$, sin incluir a e incluyendo b, se llama **intervalo semi-abierto a la izquierda** y se nota $(a, b]$.

$(a, b] = \{x \in R | a < x \leq b\}$



El conjunto de números reales, comprendidos entre a y b, $a < b$, incluyendo a, sin incluir b se denomina **intervalo semi-abierto a la derecha** y se nota $[a, b)$.

$[a, b) = \{x \in R | a \leq x < b\}$

Intervalo cerrado.

El conjunto de los números reales, comprendidos entre a y $b, a < b$, incluyendo tanto a como b, se llama **intervalo cerrado** y se nota $[a, b]$.

$[a, b] = \{x \in R | a \leq x \leq b\}$

También se consideran intervalos las semi-rectas de la forma:

$(a, +\infty) = \{x \in R | x > a\}$

Definición

El intervalo $(a, +\infty)$ es el conjunto de números reales mayores que a; ver figura.

$(a, +\infty) = \{x \in R | x > a\}$

$(a, +\infty)$

Definición

El intervalo $[a, +\infty)$ es el conjunto de números reales mayores o iguales $\underline{a}$; ver figura.

$[a, +\infty) = \{x \in R | x \geq a\}$

$(a, +\infty)$

Definición

El intervalo $(-\infty, b)$ es el conjunto de números reales menores que b; ver figura.

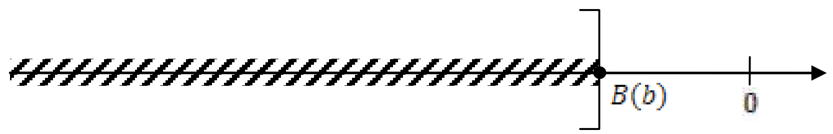
$$(-\infty, b) = \{x \in R | x < b\}$$

$(-\infty, b)$

Definición

El intervalo $(-\infty, b]$ es el conjunto de números reales menores o iguales que b; ver figura.

$$(-\infty, b] = \{x \in R | x \leq b\}$$



$(-\infty, b]$

Nota

$+\infty, -\infty$, no representan números, se debe considerar tan solo como símbolos.

2.3 Valor absoluto y distancia entre puntos en la recta

Definición

El valor absoluto de un número a o módulo del número a, es la distancia desde el punto $A(a)$ hasta el origen de coordenadas. El modulo del número a, se designa colocando el número a, entre un par de líneas verticales $|a|$. Entonces, $|a|$, no es más que el modulo de a, de los que lo se puede concluir:

$|a| = a$ Si a es positivo

$|a| = -a$ Si a es negativo

$|a| = 0$ Si $a = 0$

Ejemplo

$|3| = 3$

$|8| = -(-8)$

$|x-3| = x-3$ Si $x-3 \geq 0$ $|x-3| = -(x-3)$ si $x-3 < 0$

Propiedades del valor absoluto

Dados a y b números reales, se tiene:

1. $|ab| = |a||b|$
2. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ con $b \neq 0$
3. $|a| = |-a|$
4. $|a| \leq a$
5. Si $|a| < r$ entonces $-r < a < r$, para r, real mayor que cero.
6. Si $-r < a < r$ para $r > 0$, entonces $|a| < r$.
7. $|a+b| \leq |a| + |b|$
8. $||a| - |b|| \leq |a - b|$

Definición

Dados dos puntos $A(x_1), B(x_2)$, la distancia entre los puntos $A(x_1), B(x_2)$ se observa $P(A, B)$, que se lee "ro AB" y es igual a $|x_2 - x_1|$ ó $|x_1 - x_2|$, en resumen:

$$P(A, B) = |x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|$$

Ejemplo

Hallar la distancia entre dos puntos -3 y -8.

$$P(-3{,}8) = |(-3) - 8| = |8 - (-3)| = |-11| = |11| = 11$$

Ejemplo

A continuación se prueba algunas propiedades del valor absoluto.

1. $|ab| = |a||b|$

Se consideran los siguientes casos:

i) $a \geq 0$ y $b \geq 0$

Luego, $ab \geq 0$, luego $|ab| = ab$, también $|a| = a$ y $|b| = b$ luego $ab = |a||b|$ luego $|ab| = |a||b|$

ii) $a < 0$ y $b \geq 0$

Luego $ab \geq 0$ luego $|ab| = -ab = (-a) \cdot b$, también $|a| = -a$ y $|b| = b$, luego $|ab| = |a||b|$

iii) $a \geq 0$ y $b < 0$

Luego $ab \leq 0$ luego $|ab| = -ab = a \cdot (-b)$, también $|a| = a$ y $|b| = -b$, luego $|ab| = |a||b|$

iv) $a < 0$ y $b < 0$

Luego $ab > 0$ de donde $|ab| = ab$, también $|a| = -a$ y $|b| = -b$, luego $|a||b| = (-a)(-b) = ab$, luego $|ab| = |a||b|$

En resumen, se tiene que $|ab| = |a||b|$.

2. Si $|a| < r$, con $r > 0$, entonces $-r < a < r$

A continuación, dos casos:

i) $a \geq 0$

Luego $|a| = a$, luego $|a| < r$ se transforma en $a < r$, como $r > 0$ entonces $-r < 0$; como $a \geq 0$ entonces $-r < a$, luego tenemos $-r < a$ y $a < r$ luego $-r < a < r$.

ii) $a < 0$

Luego $|a| = -a$, luego $|a| < r$ se transforma en $-a < r$, luego $a > -r$ o sea $-r < a$, como $r > 0$ y $a < 0$ entonces $a < r$, luego tenemos $-r < a$ y $a < r$ luego $-r < a < r$.

En general tenemos que si $|a| < r$ con $r > 0$ se tiene que $-r < a < r$.

2.4 Ejercicios

Marque en el eje numérico los puntos $A(-2), B(13/3), K(0)$.

1. Marque en el eje número el punto $M(2)$. Encuentre el eje numérico dos puntos A y B que estén a la distancia de tres unidades del punto M. Cuales son las coordenadas de los puntos A y B.

2. ¿Si el punto $A(a)$ esta a la derecha del punto $B(b)$, cual número es mayor, a ó b?

i) Sin dibujar los puntos en el eje numérico, diga cual de los puntos esta mas a la derecha: $A(-3)$ ó $B(-4)$; $A(3)$ ó $B(4)$; $A(-3)$ ó $B(4)$; $A(3)$ ó $B(-4)$.

3. ¿Cual de los dos números esta mas a la derecha $A(a)$ ó $B(b)$?
4. Cual de los dos números esta mas a la derecha:

   i) $M(x)$ ó $N(2x)$
   ii) $A(c)$ ó $B(c+2)$
   iii) $A(x)$ ó $B(x^2)$
   iv) $A(x)$ ó $B(x-a)$

5. Marque en el eje numérico los puntos $A(-5)$ y $B(7)$. Encuentra la coordenada del punto medio de AB.
6. Señale en el eje numérico, los puntos cuyas coordenadas son:

   i) Números enteros
   ii) Números positivos

2.5 Inecuaciones

Definición

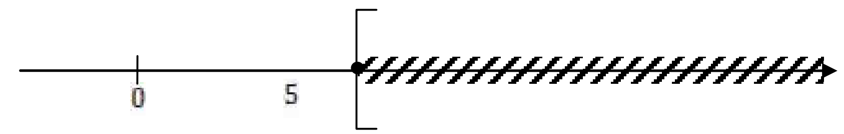
Aquellas proposiciones condicionales en las cuales aparecen los símbolos $<, >, \leq, \geq$ se conocen como inecuaciones; por ejemplo $5x+9 \geq 7x-10$; $3x^2+8a>5$ son inecuaciones con universo R.

Resolver una inecuación, no es mas que hallar su conjunto solución, o sea los elementos del universo que la hacen verdadera.

Ejemplo:

Sea $U=R$, resolver $3x \geq 15$

$3x \geq 15 \Leftrightarrow x \geq 5 \Leftrightarrow x \in [5,+\infty)$, luego el conjunto solución es $[5,+\infty)$.



Ejemplo:

Sea $U=R$, resolver: $8x-3>3x-28$

$8x-3>3x-28 \Longrightarrow 8x-3x>3-28 \Longrightarrow 5x>-25$

$\Longrightarrow x>-5 \Longrightarrow x \in (-5,+\infty)$

Ejemplo:

Sea $U=R$, resolver $ax+b \leq cx+h$ con $a, b, c, h \in R, a \neq 0, c \neq 0, a \neq c$

$ax+b \leq cx+h \Longrightarrow ax-cx \leq h-b \Longrightarrow x(a-c) \leq (h-b)$

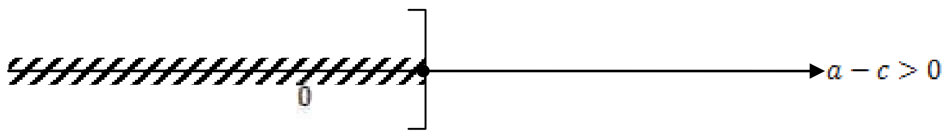
Luego $x \leq \frac{h-b}{a-c}$ si $a-c>0$ ó $x > \frac{h-b}{a-c}$ si $a-c<0$

Luego $x \in \left(-\infty, \frac{h-b}{a-c}\right]$ Si $a-c>0$ ó $x \in \left[\frac{h-b}{a-c},+\infty\right)$ si $a-c<0$

i) $h-b=0$ se obtienen las siguientes soluciones:

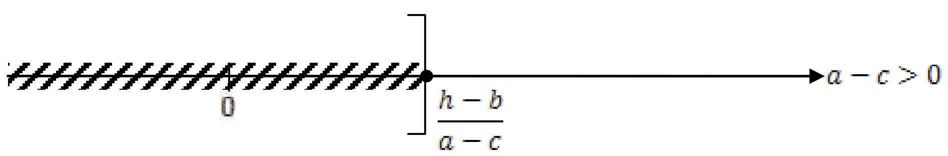
(a) $x \in (-\infty, 0]$ si $a-c>0$ ó

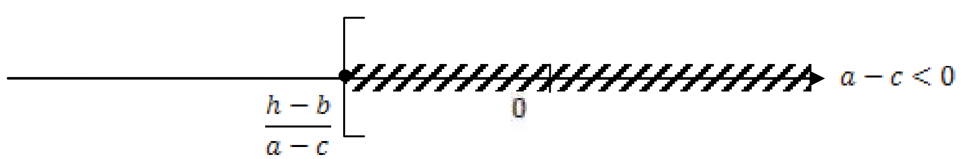
(b) $x \in (0, +\infty]$ si $a-c<0$



ii) $h-b>0$ se obtienen las siguientes soluciones:

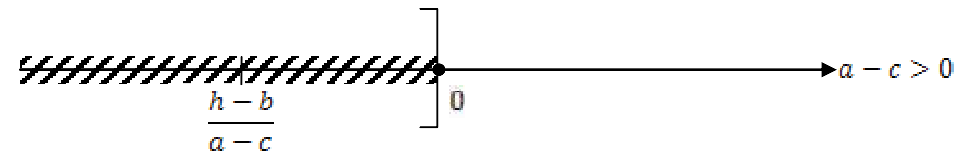
$x \in \left(-\infty, \frac{h-b}{a-c}\right]$ Si $a-c>0$ ó $x \in \left[\frac{h-b}{a-c}, +\infty\right)$ si $a-c<0$

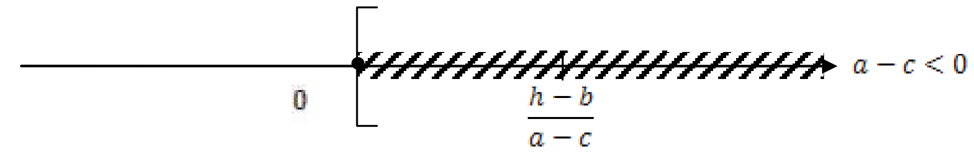




iii) $h-b<0$ se obtienen las siguientes soluciones:

$x \in \left(-\infty, \frac{h-b}{a-c}\right]$ Si $a-c>0$ ó $x \in \left[\frac{h-b}{a-c}, +\infty\right)$ si $a-c<0$





Ejemplo:

Sea $U=R$, resolver:

a) $(x-3)(x+9) \geq 0$

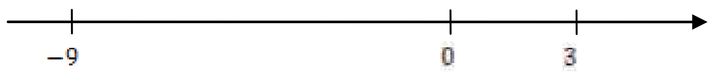
b) $(x-3)(x+9) > 0$

c) $(x-3)(x+9) \leq 0$

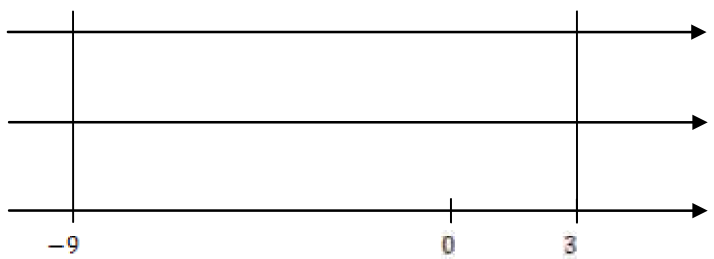
d) $(x-3)(x+9) < 0$

Para resolver lo anterior se procede así:

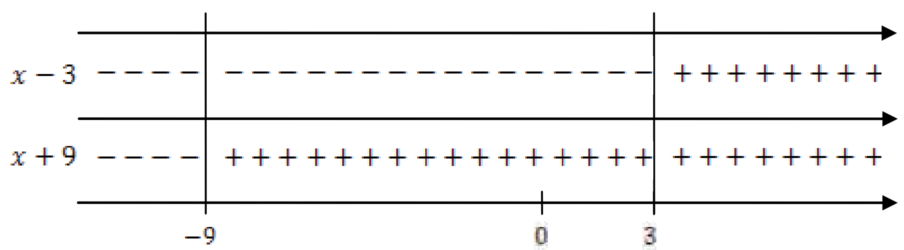
1. Se traza el eje numérico y se marca sobre él los puntos donde se anulan los factores $x-3$ y $x+9$, o sea los puntos $x=3$ y $x=-9$



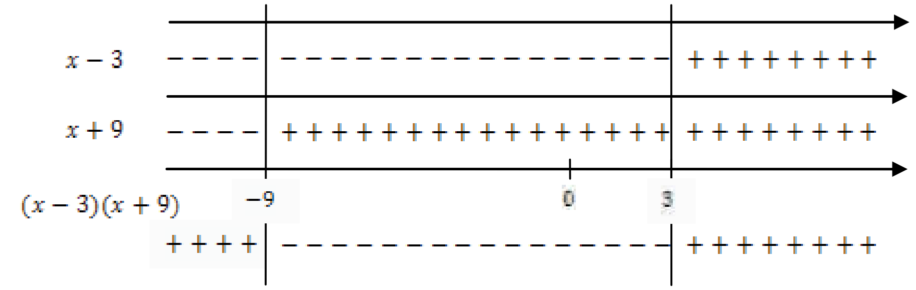
2. Trazo verticales a los puntos $x=3$ y $x=-9$, trazando luego dos casillas horizontales:



3 Se colocan los factores en dichas casillas y se analizan así: $x-3$ se anula en $x=3$; se observa que toma valores positivos a la derecha de tres y negativos a su izquierda, así



Analizando $x+9$ se ve que se anula en $x=-9$ y que es positivo para los valores mayores que -9 y negativo para los valores menores que -9, como se puede observar en el grafica de arriba.



De lo anterior se concluye que:

$(x+9)(x-3)>0$ Si $x\in(-\infty,-9)\cup(3,+\infty)$

$(x+9)(x-3)\geq 0$ Si $x\in(-\infty,-9]\cup[3,+\infty)$

$(x+9)(x-3)<0$ Si $x\in(-9,3)$

$(x+9)(x-3)\leq 0$ Si $x\in[-9,3]$

Entonces, las soluciones son:

a) $(-\infty,-9)\cup(3,+\infty)$

b) $(-\infty,-9]\cup[3,+\infty)$

c) $(-9,3)$

d) $[-9,3]$

Ejemplo:

Sea $U=R$, resolver:

a) $ax^2+bx+c>0$

b) $ax^2+bx+c\geq 0$

c) $ax^2 + bx + c < 0$

d) $ax^2 + bx + c \leq 0$

Con $a \neq 0$ y la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene raíces reales diferentes.

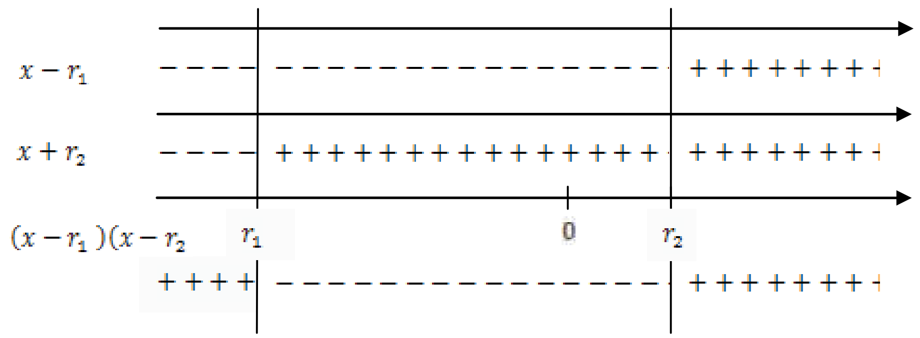
Suponiendo que r_1 y r_2 son las raíces reales de $ax^2 + bx + c = 0$, luego $ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2)$ $r_1 > r_2$ por lo tanto lo pedido se transforma en:

a) $(x - r_1)(x - r_2) > 0$

b) $(x - r_1)(x - r_2) \geq 0$

c) $(x - r_1)(x - r_2) < 0$

d) $(x - r_1)(x - r_2) \leq 0$



En consecuencia, las soluciones son:

a) $(-\infty, r_2) \cup (r_1, +\infty)$

b) $(-\infty, r_2) \cup [r_1, +\infty)$

c) (r_2, r_1)

d) $[r_2, r_1]$

Ejemplo:

Sea $U = R$, resolver:

a)$(x-1)(2x+3)(5x-10)(x+3) > 0$

b)$(x-1)(2x+3)(5x-10)(x+3) \geq 0$

c)$(x-1)(2x+3)(5x-10)(x+3) < 0$

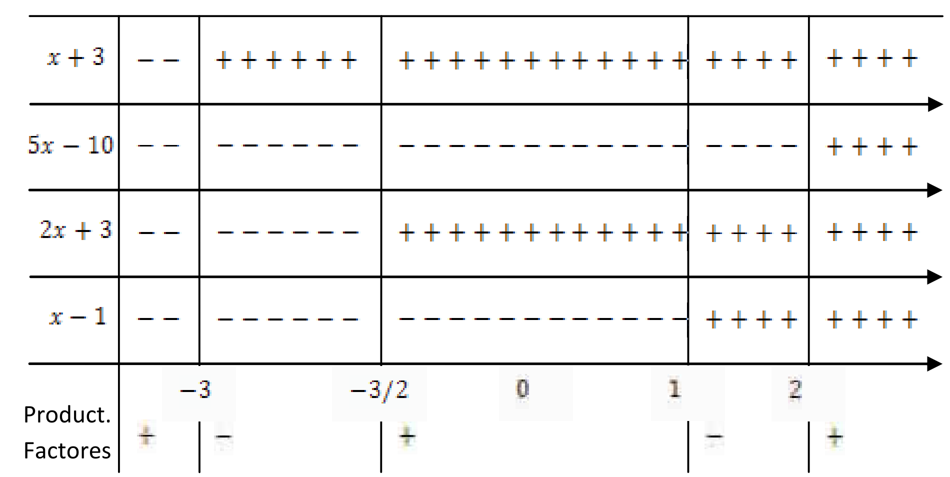
d)$(x-1)(2x+3)(5x-10)(x+3) \leq 0$

En primer lugar, se buscan los términos donde se anulan los factores:

$x - 1 = 0 \therefore x = 1;$ $\quad 2x + 3 = 0 \therefore x = -\frac{3}{2};$

$5x - 10 = 0 \therefore x = 2;$ $\quad x + 3 = 0 \therefore x = -3.$

Ahora, se traza el eje numérico, señalando los valores que anulan a los factores y trazando verticales en dichos puntos y horizontales como factores hay. Se procede como en los ejemplos anteriores.



De acuerdo a lo anterior, las soluciones son:

a)$(-\infty,-3) \cup \left(-\frac{3}{2},1\right) \cup (2,\infty)$

b)$(-\infty,-3] \cup \left[-\frac{3}{2},1\right] \cup [2,\infty)$

c)$\left(-3,-\frac{3}{2}\right) \cup (1{,}2)$

d)$\left[-3,-\frac{3}{2}\right] \cup [1{,}2]$

Ejemplo:

Sea $U = R$, resolver:

a) $\frac{(4x-1)(x+3)}{4x} > 0$

b) $\frac{(4x-1)(x+3)}{4x} \geq 0$

c) $\frac{(4x-1)(x+3)}{4x} < 0$

d) $\frac{(4x-1)(x+3)}{4x} \leq 0$

Se considera $x \neq 0$, lo cual modifica E, entonces se toma

$U = R - \{0\}$.

Ante todo es necesario analizar el denominador, como x puede ser positivo o negativo, y para obviar esto, se multiplica por x tanto numerador como denominador; quedando así:

$$\frac{(4x-1)(x+3)x}{4x^2} > 0$$

Así sucesivamente, como $4x^2 > 0$ se puede multiplicar la desigualdad por $4x^2$ conservándose el signo; luego se tiene que:

a)$(4x-1)(x+3)(x) > 0$

b)$(4x-1)(x+3)(x) \geq 0$

c)$(4x-1)(x+3)(x) < 0$

d)$(4x-1)(x+3)(x) \leq 0$

x	$--$	$-------------$	$+++++$	$+++++++++$
$x+3$	$--$	$+++++++++++++$	$+++++$	$+++++++++$
$4x-1$	$--$	$-------------$	$-----$	$+++++++++$
		-3	0	$1/4$
Producto factores	$-$	$+$	$-$	$+$

Luego las soluciones en $R - \{0\}$ son:

a) $(-3{,}0) \cup \left(\frac{1}{4},+\infty\right)$

b) $[-3{,}0) \cup \left[\frac{1}{4},+\infty\right)$

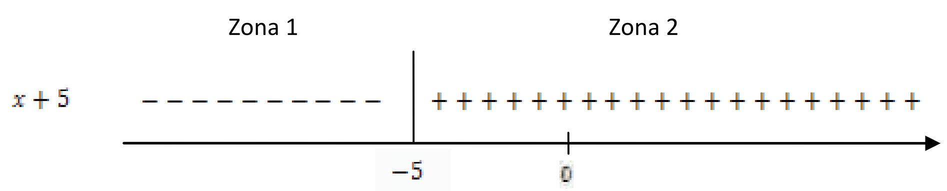
c) $(-\infty,-3) \cup \left(0,\frac{1}{4}\right)$

d) $(-\infty,-3] \cup \left(0,\frac{1}{4}\right]$

Ejemplo:

Sea $U = R$, resolver $|x+5| > 7$

Primero, se obseva en donde se anula la expresión entre las barras. Es decir, se halla la solución de $x+5=0$, luego $x=-5$; se escribe este número sobre el eje numérico y se traza por ese punto una vertical, quedando dos zonas, así:



En la zona 1 $x+5<0$ y en la zona 2 $x+5>0$; ahora se procede a resolver lo pedido en dichas zonas.

Zona 1: $(-\infty,-5)$

En dicha zona $x+5<0$, luego $|x+5| = -x-5$, luego $|x+5|>7$ se transforma en $-x-5>7$ luego $x \in (-\infty,-12)$. La solución en la zona 1 será: $(-\infty,-12) \cap (-\infty,-5)$ que es igual a $(-\infty,-12)$.

Es necesario considerar que la solución debe estar en la zona.

Ahora se resuelve la zona 2: $(-5,+\infty)$

En dicha zona $x+5>0$, luego $|x+5| = x+5$; entonces $|x+5|>7$ se transforma en $x+5>7$ o sea $x>2$, entonces $x \in (2,+\infty)$. La solución en la zona 2 será: $(2,+\infty) \cap (-5,+\infty) = (2,+\infty)$

Después se analiza el punto $x=-5$;

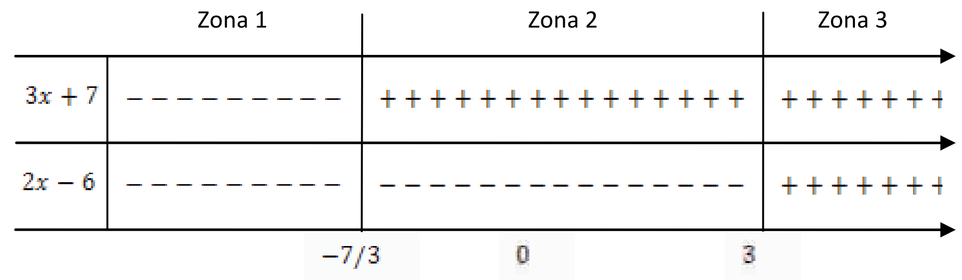
$|-5+5|>7$ O sea $0>7$, absurdo

La solución general es $(-\infty,-12) \cup (2,+\infty)$.

Ejemplo:

Sea $U = R$, resolver $|2x-6| + |3x+7| \geq 10$

Se hallan los valores de x, donde se anulan $2x-6$ y $3x+7$, o sea, se resuelven: $2x-6=0$ y $3x+7=0$ cuyas soluciones son $x=3$ y $x=-7/3$. Ahora se representan dichos puntos en el eje numérico:



Como se puede apreciar, el eje ha quedado divido en tres zonas. Se procede a resolver lo pedido en tales zonas:

Zona 1: $\left(-\infty,-\frac{7}{3}\right)$. En este caso $3x+7<0$ y $2x-6<0$ luego $|3x+7| = -3x-7$ $\therefore$ $|2x-6|+|3x+7| \geq 10$ se transforma en: $-2x+6-3x-7 \geq 10$ O sea $-5x-1 \geq 10 \therefore -5x \geq 11 \therefore x \leq -\frac{11}{5}$, luego $x \in \left(-\infty,-\frac{11}{5}\right)$, luego la solución en la zona es: $\left(-\infty,-\frac{7}{3}\right) \cap \left(-\infty,-\frac{11}{5}\right)$ que igual a $\left(-\infty,-\frac{7}{3}\right)$.

Zona 2: $\left(-\frac{7}{3},3\right)$. En esta zona $2x-6<0$, $3x+7>0$ luego $|2x-6| = -2x+6$; $|3x+7| = 3x+7$ por lo que $|2x-6|+|3x+7| \geq 10$ se transforma en: $-2x+6+3x+7 \geq 10$ O sea $x+13 \geq 10$, $x \geq -3$, luego $x \in [-3,+\infty)$. Por lo tanto la solución será: $\left(-\frac{7}{3},3\right) \cap [-3,+\infty) = \left(-\frac{7}{3},3\right)$

Zona 3: $(3,+\infty)$. Aquí $2x-6>0$ y $3x+7>0$, luego $|2x-6|=2x-6$ y $|3x+7|=3x+7$, de donde: $|2x-6|+|3x+7|\geq 10$ se transforma en $2x-6+3x+7\geq 10$ O sea $5x+1\geq 10$; $5x\geq 9$, luego $x\geq\frac{9}{5}$ es decir: $x\in\left[\frac{9}{5},+\infty\right)$

La solución será entonces $(3,+\infty)\cap\left[\frac{9}{5},+\infty\right)=(3,+\infty)$.

Ahora se analiza $x=3$ y $x=-\frac{7}{5}$

$|2\cdot 3-6|+|3\cdot 3+7|\geq 10$

$0+16\geq 10$, verdadero, luego $\{3\}$ es solución.

$$\left|2\cdot-\frac{7}{3}-6\right|+\left|3x-\frac{7}{3}+7\right|\geq 10$$

$\left|-\frac{14}{3}-6\right|\geq 10$ O sea $\left|-\frac{32}{2}\right|\geq 10$

O sea $\frac{32}{2}\geq 10$, verdadero, luego $\left\{-\frac{7}{3}\right\}$ es solución.

De todo lo anterior la solución general es:

$\{3\}\cup\left\{-\frac{7}{3}\right\}\cup\left(-\infty,-\frac{7}{3}\right)\cup\left(-\frac{7}{3},3\right)\cup(3,+\infty)=\left(-\infty,-\frac{7}{3}\right)\cup\left[-\frac{7}{3},3\right]\cup(3,+\infty)=R$

.

En resumen, el conjunto solución es R

2.6 Pareja ordenada.

Introducción

Tal como se puede apreciar en el próximo capitulo, una relación no es más que un conjunto de parejas ordenadas. Por lo tanto es necesario precisar que la noción de pareja ordenada corresponde a un conjunto con dos objetos, en el cual importa el orden en que aparezcan tales objetos. En el caso de $\{x,y\}=\{y,x\}$ es decir $\{x,y\}$ no nos sirve como definición para pareja ordenada. Se dice que x,y es un par desordenado por ser igual a $\{y,x\}$.

Definición

Un par ordenado es un conjunto de dos elementos en el cual es importante el orden en que aparezcan tales elementos.

Definición

Sea x,y objetos, definimos $(x,y)=\{\{x\},\{x,y\}\}$. x,y Se denomina pareja o par ordenado, de componentes x,y; x es la primera componente; y por su parte es la segunda.

La definición anterior satisface las condiciones de pareja ordenadas, es decir:

1) $(x,y)\neq(y,x)$ siempre que $x\neq y$.

2) $(x,y)=(u,v)$ si y solo si $x=u\ \wedge\ y=v$

Probemos primero 2).

a) Hipótesis: $(x,y)=(u,v)$

Tesis: $x=u\wedge y=v$

Como $(x,y)=(u,v)$ entonces $\{\{x\},\{x,y\}\}=\{\{u\},\{u,v\}\}$ luego tenemos que:

i) $\{x\}=\{u\}\wedge\{x,y\}=\{u,v\}$

ó

ii) $\{x\}=\{u,v\}\wedge\{x,y\}=\{u\}$

Para el caso i) $x = u \wedge y = v$ se tienen.

Para el caso ii) como $\{x\} = \{x, x\}$ y $\{u\} = \{u, u\}$ se tiene que $\{x, x\} = \{u, v\}$ $\{x, y\} = \{u, u\}$

Luego $x = u \wedge y = u = x = v$ en resumen se tiene $x = u \wedge y = v$.

Luego $((x, y) = (u, v)) \Rightarrow x = u \wedge y = v$.

b) Hipótesis: $x = u \wedge y = v$

Tesis: $(x, y) = (u, v)$

De $x = u$ se tiene que $\{x\} = \{u\}$; de $y = v$ se tiene que $\{y\} = \{v\}$, luego $\{x\} \cup \{y\} = \{u\} \cup \{v\}$ o sea $\{x, y\} = \{u, v\}$, luego $x,\ x, y = u,\ u, v$

1) Tesis: $(x, y) \neq (y, x)$

Hipótesis: $x \neq y$

Suponiendo que $(x, y) = (y, x)$ entonces con lo demostrado arriba $x = y$ lo cual es absurdo; luego $(x, y) \neq (y, x)$ cuando $x \neq y$.

Observaciones

a) Muchos autores definen pareja ordenada mediante la propiedad:

$(x, y) = (u, v)$ Si y solo si $x = u \wedge y = v$

b) La definición de pareja ordenada no es muy importante, en cambio si lo son sus propiedades.

Definición

Generalicemos el concepto de pareja ordenada

1) Sean x, y, z objetos, definimos:

$(x, y, z) = ((x, y), z)$; (x, y, z) Se dice una terna o una tripla ordenada, que satisface: $(x, y, z) = (x', y', z') \Leftrightarrow (x = x' \wedge y = y' \wedge z = z')$.

2) En general, sean $x_1, x_1, \dots, x_n$ objetos, definimos:

$(x_1, x_1, \dots, x_n) = ((x_1, x_1, \dots, x_{n-1}), x_n)$; $(x_1, x_1, \dots, x_n)$ Se dice una n-upla ordenada, que satisface:

$(x_1, x_1, \dots, x_n) = (y_1, y_1, \dots, y_n)$ Si y solo si:

$(x_1 = y_1 \ \wedge \ x_2 = y_2 \ \wedge \ x_3 = y_3 \ \ \wedge \ x_n = y_n)$

Producto cartesiano

Definición

Sean X, Y conjunto, el conjunto formado por las parejas ordenadas, cuyas primeras componentes son los elementos de X y las segundas componentes son los elementos de Y, se llama Producto Cartesiano de X por Y y se nota $X \times Y$.

$X \times Y = \{(x, y) | x \in X \ \wedge \ y \in Y\}$

Observación

$((x, y) \in X \times Y) \Leftrightarrow (x \in X \ \wedge \ y \in Y)$

$((x, y) \notin X \times Y) \Leftrightarrow (x \notin X \ \wedge \ y \notin Y)$

Ejemplo:

Sea $X = \{2,3\}$ $\quad Y = \{1,5\}$

$X \times Y = \{(2,1),(2,5),(3,1),(3,5)\}$

$Y \times X = \{(1,2),(1,3),(5,2),(5,3)\}$

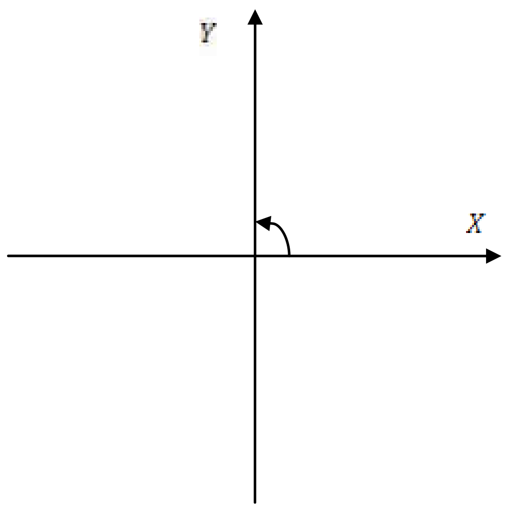
Observación

En general se tiene que $X \times Y$ es diferentes de $Y \times X$; un caso particular es $X = Y = R$, luego $R \times R = \{(x,y) | x \in R \ \wedge \ y \in R\}$

El conjunto $R \times R$ se nota R^2.

Coordenadas en el plano

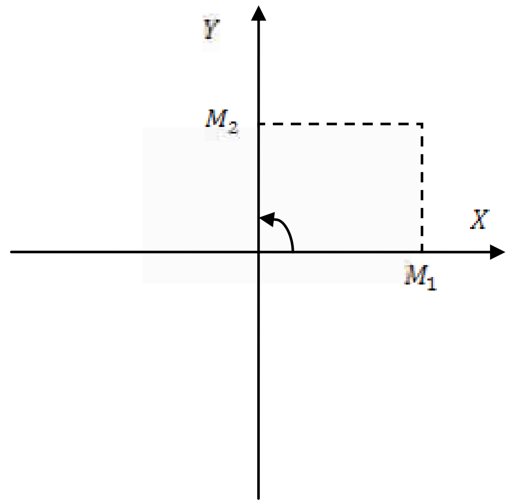
Para determinar las coordenadas de un punto en el plano, se trazan en este último, dos ejes numéricos perpendiculares entre si. Uno de los ejes se conoce como eje de las abscisas o eje $X(OX)$; el otro es el eje de las coordenadas o el eje $Y(OY)$.



La dirección de los ejes se elige frecuentemente de tal modo que el semi-eje positivo OX coincida con el semi-eje positivo OY al realizar un giro de $90º$ en el sentido contrario a las agujas del reloj, tal como se ve en la figura anterior. El punto de intersección de los ejes, se conoce como el origen de coordenadas y se designa con la letra O. Generalmente las unidades de medida sobre los ejes se toman iguales.

Si se toma en el plano un punto cualquiera M y se baja desde este perpendicularmente a los ejes OX y OY; los puntos de intersección M_1 y M_2 de dichas perpendiculares con los ejes se llaman proyecciones del punto M sobre los ejes coordenados.

El punto M_1 ubicado sobre el eje OX, le corresponde un número determinado x, que equivale a su coordenada en este eje. De igual forma al punto M_2 le corresponde cierto número y que coincide con su coordenada en el eje OY.



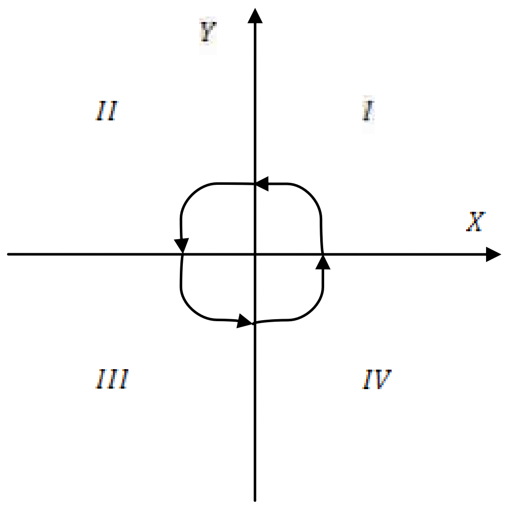
Así que a cada punto M situado en el plano le corresponden dos números, el de x y el de y, que a su vez son sus coordenadas rectangulares o coordenadas cartesianas del punto M. El punto x es abscisa de M y y su ordenada.

Recíprocamente, a cada par de números x y y le corresponde un punto del plano para el cual x es la abscisa y y es la ordenada.

En síntesis, existe una correspondencia entre los puntos del plano y los pares de números x y y que siguen un orden determinado, primero x y luego y.

Las coordenadas del punto M se escriben $M(x,y)$.

Los ejes de coordenadas dividen al plano en (4) cuadrantes, numerados así:



Definición

Sea $M(x, y)$ un punto cualquiera en el plano y $O(0,0)$ el origen de coordenadas, la distancia entre M y O, notada (O, M) se define así:

$$P(O, M) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Definición

Sean $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ dos puntos dados en el plano, la distancia entre $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ notada $P(O, M)$, se define como:

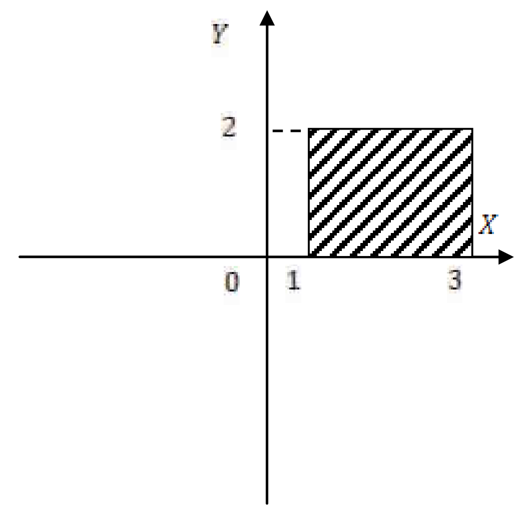
$$P(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Ejemplos:

Sean $A = [1,3] \quad B[0,2]$

$$A \times B = [1,3] \times [0,2] = \{(x, y) | x \in [1,3] \;\wedge\; y \in [0,2]\}$$

$$= \{(x, y) | 1 \leq x \leq 3 \;\wedge\; 0 \leq y \leq 2\}$$



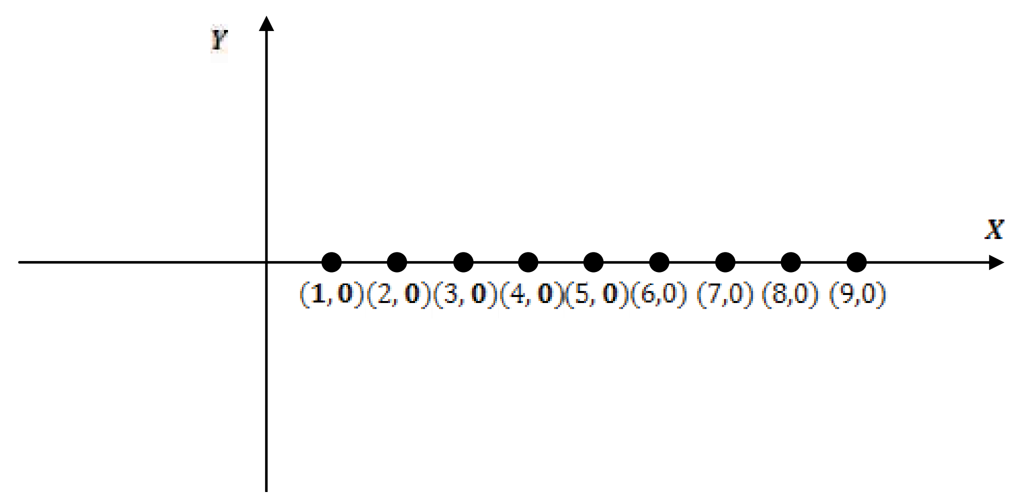
Ejemplo:

Sean $A = N \quad B = \{0\}$

$$A \times B = \{(x, y) | x \in N \;\wedge\; y \in \{0\}\}$$

$$= \{(x, y) | x \in N \;\wedge\; y = 0\}$$

$$= \{(x, y) | x \in N = \{(1,0), (2,0), (3,0), \ldots, (n, 0) \ldots\}\}$$

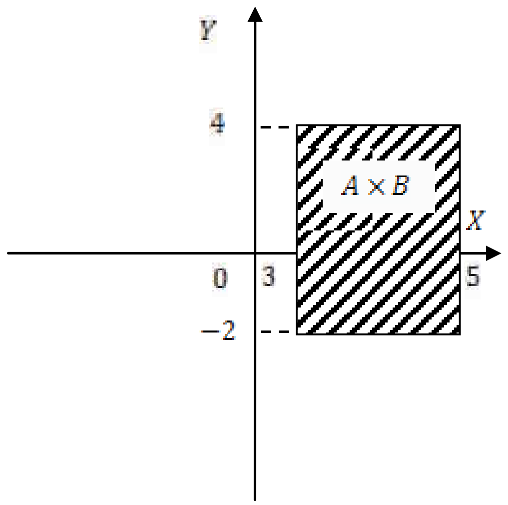


Ejemplo:

Sean $A = (3{,}5)\quad B = (-2{,}4)$

$A \times B = (3{,}5) \times (-2{,}4) = \{(x,y)|x \in (3{,}5)\ \wedge\ y \in (-2{,}4)\}$

$\{(x,y)|3 < x < 5\ \ \wedge\ \ -x < y < 4\}$

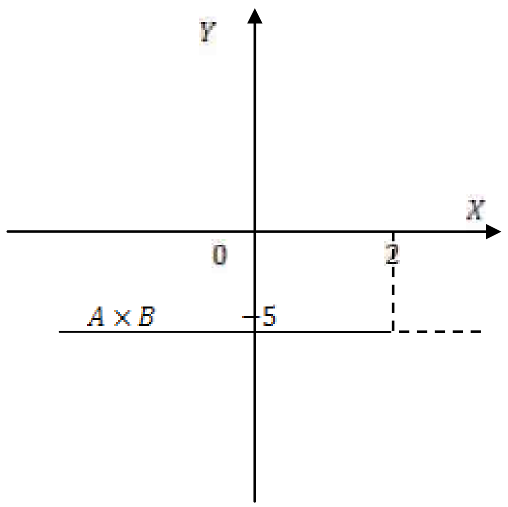


Ejemplo:

Sean $A = (-\infty,2]\quad \{B = -5\}$

$A \times B\{(x,y)|x \in (-\infty,2)\ \wedge\ y \in \{-5\}\}$

$\{(x,y)|x \leq 2\ \wedge\ y = -5\} = \{(x,-5)|x \leq 2\}$



Ejemplo:

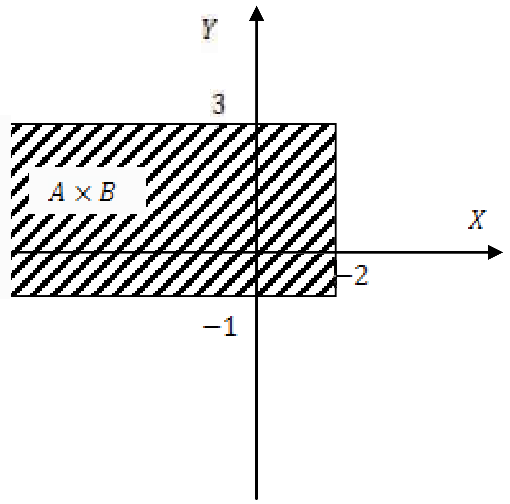
Sean $A = (-\infty,-2]\quad B = [-1{,}3]$

$A \times B = (-\infty,-2] \times [-1{,}3]$

$= \{(x,y)|x \in (-\infty,-2]\ \ \wedge\ \ y \in [-1{,}3]\}$

Luego

$A \times B = (-\infty,-2] \times [-1{,}3] = \{(x,y)|x \leq -2\ \ \wedge\ \ -1 \leq y \leq 3\}$



Ejemplo:

Sean $A = (2,3)$ y $B = (4,5)$ puntos en el plano. Hallemos $P(A), P(B), P(A,B)$.

$$P(A) = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$$P(B) = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{16+25} = \sqrt{41}$$

$$P(A,B) = \sqrt{(2-4)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2}$$

$$= \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

Luego $P(A,B) = 2\sqrt{2}$

2.7 Ejercicios

1. Descifrar la palabra escrita en el plano cartesiano representando:

$$(6,2),(9,2),(12,1),(12,0),(11,-2),(9,-2),(4,-2),(2,-1),(1,1),$$
$$(-1,1),(-2,0),(-2,-2),(2,1),(5,2),(12,2),(9,1),(10,-2),(10,0),$$
$$(4,1),(2,2),(-2,2),(-2,1),(-2,-1),(0,0),(2,0),(2,-2),$$
$$(4,0),(4,-1),(12,-1),(12,-2),(11,0),(7,2),(9,0),(4,2).$$

2. Dibuje $A(4,1), B(3,5), C(-1,4), D(0,0)$. ¿Cual es la longitud del lado y área del cuadrilátero que se forma?

3. Represente en el plano $[2,4] \times [-1,1]$

4. Represente en el plano $N \times N$

5. Represente en el plano $([-3,-2] \cup [2,3)) \times [3,4]$
6. Represente en el plano $(-\infty,8) \times [-1,1]$
7. Represente en el plano $N \times \{0,1,2\}$
8. Represente en el plano $\{0,1\} \times N$
9. Represente en el plano:

$$[-1,1] \times ([-1,1] \cup [1,2]) \times ([3,7] \cup [-2,-1]) \times ([3,4] \cup [-1,1])$$

1. Resolver, utilizando el dominio real más amplio posible:

$$\frac{4x-5}{x-1} > \frac{x+1}{2}$$

2. Resolver, utilizando el dominio real más amplio posible:

$$|x| - |x+1| > 3$$

3. Resolver, utilizando el dominio real más amplio posible, resuelva las siguientes desigualdades:

a) $\big||x+1| + |3x-8|\big| \leq 4$

b) $\big||x+1| + |3x-8|\big| \geq 4$

c) $(x^2 + 3x + 8) > 2$

d) $(-x^2 - 5x + 3) \leq 0$

e) $(x^2+1)(x-3)(x+2)(6-x) \geq 0$

f) $(x^2 - x - 2)(2-3x)(x-1) < 0$

g) $\left(\frac{4x+3}{x-8}\right) \leq \left(\frac{2-5x}{2x+5}\right)$

h) $(3x^2 - x + 7) \geq 4$

1. Marque en el eje numérico los puntos $A(-2), B\left(\frac{13}{3}\right), K(0)$.

2. Marque en el eje numérico el punto $M(2)$. Encuentre en el eje numérico dos puntos A y B que estén a la distancia de tres unidades del punto M. ¿Cuales son las coordenadas de los puntos A y B?

3.

i. Si el punto $A(a)$ esta a la derecha del punto $B(b)$, ¿cual número es mayor, a ó b?

ii. Sin dibujar los puntos en el eje numérico, diga, ¿Cual de los puntos esta mas a la derecha: $A(-3)$ ó $B(-4)$; $A(3)$ ó $B(4)$; $A(-3)$ ó $B(4)$; $A(3)$ ó $B(-4)$?

1. ¿Cual de los dos números esta mas a la derecha $A(a)$ ó $B(-a)$?

2. Cual de los dos números esta a la derecha:

   i. $M(x)$ ó $N(2x)$

   ii. $A(x)$ ó $B(x^2)$

   iii. $A(c)$ ó $B(c+2)$

   iv. $A(x)$ ó $B(x-a)$

1. Marque en el eje numérico los puntos $A(-5)$ y $B(7)$. Encuentre la coordenada del punto medio de AB.

2. Señale en el eje numérico, los puntos cuyas coordenadas son:

   i. Números enteros.

   ii. Números positivos.

1. Señale sobre el eje numérico los puntos x, para las cuales:

   i. $x < 2$

   ii. $x \geq 5$

   iii. $2 < x < 5$

   iv. $-3\frac{1}{4} \leq x \leq 0$

   v. $x - 3 < 5$

   vi. $x^2 < 1$

   Escribir lo anterior en intervalos.

1. Escribir sin signo de modulo las expresiones

   i. $|a^2|$

   ii. $|a-b|$ si $a > b$

   iii. $|a-b|$ si $a < b$

iv. $|-a|$ si $a < 0$

2. ¿Que valores puede tomar la expresión $\frac{|x|}{x}$?

3. Si $|x-3| = x = 3$, ¿que valores puede tomar x?

1. Señale en el eje numérico los puntos para los cuales se cumple que $|x-2| = 2-x$

2. Compruebe las propiedades del valor absoluto.

En los siguientes ejercicios, decir, justificando su respuesta, si son ciertos o falsos los siguientes planteamientos propuestos:

1. Si $a < 0$ y $b < c$ entonces $a > c$

(Generalmente las dos desigualdades $a < b$ y $b < c$ se escriben en la forma abreviada $a < b < c$)

2. Si $a < 0$ y $b < 0$ entonces $ab > 0$

(El símbolo $a < 0$ significa que $0 > a$, o sea que $0 - a$ es positivo o sea que $-a$ es positivo).

Según lo anterior, se tiene que $ab > 0$ cuando se cumple uno de los casos siguientes, $a > 0$ y $b > 0$ ó $a < 0$ y $b < 0$, lo que dice que si $a = b$ y diferente de cero, se tiene que $a^2 > 0$ si $a \neq 0$, así los cuadrados de números reales distintos de cero son siempre positivos y en particular de tiene que $1 < 0$.

1. Si $ax = a$ para $a \neq 0$ entonces $x = 1$

2. $(x^2 - y^2) = (x-y)(x+y)$

3. Si $x^2 = y^2$ entonces $x = y$ ó $x = -y$

4. $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ Si b y c son diferentes de cero

5. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ Si b y d son diferentes de cero

6. $(ab)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$ Si a, b son diferentes de cero

7. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ Si b y d son diferentes de cero

8. $\frac{a}{b} / \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$ Si b, d y d son diferentes de cero

9. Si b, d son diferentes de cero, entonces $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ cuando $ad = bc$

10. Si $a < b$ y $c < d$ entonces $a + c < b + d$

11. Si $a < b$ entonces $-b < -a$

12. Si $a < b$ y $c > 0$ entonces $ac < cb$

13. Si $a < b$ y $c < 0$ entonces $ac > cb$

14. Si $a > 1$ entonces $a^2 > a$

15. Si $0 < a < 1$ entonces $a^2 < a$

16. Si $0 \leq a < b$ y $0 \leq c < d$ entonces $ac < bd$

17. Si $a \geq 0$ y $b \geq 0$ y $a^2 < b^2$ entonces $a < b$

Capitulo III: Funciones

1.1 Relación – Función

Definición

Sea A y B conjuntos no vacios. Una $relación$ de A y B es cualquier subconjunto de A x B.

Ejemplo:

Dados

$$A = \{1, 2, 3\} \quad y \quad B = \{1, 2, 3, 4\}$$

Obtener tres relaciones distintas de A en B

Solución

$$A \times B = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4)\}$$

De $A \times B$ podemos tomar varios subconjuntos, siendo cada uno de ellos una relación de A y B.

Sean R_1, R_2, R_3 las relaciones pedidas, entonces

$$R_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$$

$$R_2 = \{(1,2),(2,4)\}$$

$$R_3 = \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,2),(3,4)\}$$

Téngase presente que R_1, R_2, R_3 pueden ser otros subconjuntos cualesquiera de $A \times B$.

Existen casos en los que al asignar un valor a un elemento de un conjunto, inmediatamente queda determinado un único valor para un elemento de otro conjunto.

Ejemplo:

Si se piensa en el volumen de una esfera, dado por la formula $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, donde V representa volumen y r representa radio, se puede observar que si se le asigna a r el valor de 3, inmediatamente queda determinado un único valor para el volumen, que es 36π.

Definición

Se dice que f es una FUNCIÓN de un conjunto X en otro conjunto Y, lo cual se denota por "$f: X \to Y$ es una función", si f hace corresponder a cada $x \in X$ uno y solo un $y \in Y$.

Observaciones.

a) El conjunto X se llama DOMINIO o conjunto de definición de la función f.

b) El conjunto Y se llama CODOMINIO o conjunto de llegada de la función f.

a) Si $x \in X$, el elemento $y \in Y$ que corresponde a x según f, se llama IMAGEN de x bajo f o correspondiente a x según f; y se denota por $y = f(x)$ (léase $y = f$ de x.

b) El conjunto de las imágenes de todos los elementos de X, bajo la f, se llama RANGO de f o recorrido de f, y se denota por $f(X)$. es decir,

$$f(X) = \{y \in Y \mid y = f(x) \ \ Para\, algún\, x \in X\}$$
$$= \{f(x) | x \in X\}$$

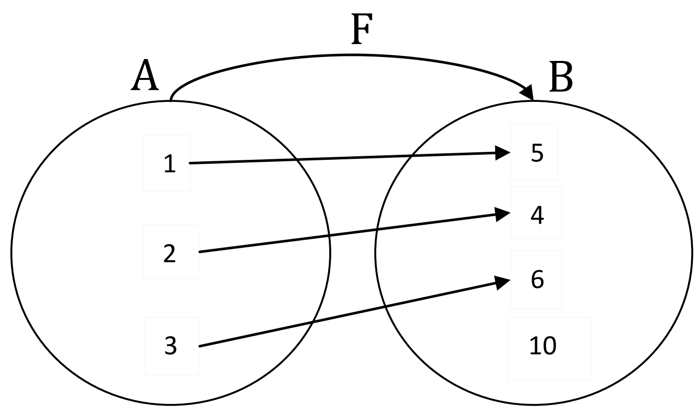
Por lo tanto, el rango o recorrido de f es un subconjunto de Y $(f(X) \subseteq Y)$.

c) La anterior definición es equivalente a la siguiente: $f: X \to Y$ es una función si para cualesquiera x_1, x_2 elementos de X, tales que $x_1 = x_2$, entonces $f(x_1) = f(x_2)$.

d) Otra forma de definir una función es: f es una función de X en Y si f es un subconjunto de X x Y, en el cual no hay dos pares ordenados distintos que tengan la misma primera componente.

Una función puede quedar determinada por diagramas de flechas, mediante una ecuación o de alguna otra manera.

Ejemplo:



$f: X \to Y$ Es una función, pues a cada $x \in X$, f le hace corresponder un único $y \in Y$.

O también,

$X \times Y$

$f = \{(1,5), (2,4), (3,6)\}$

Como se puede apreciar, f mirada como conjunto de pares ordenados, es un subconjunto de $X \times Y$, donde no hay dos pares distintos con la misma primera componente.

Ejemplo:

Al considerar la ecuación $y = 3x + 1$ se puede observar que a cada valor x, corresponde un único valor de y. En este caso decimos que la ecuación $y = 3x + 1$ defina a y como función de x y se acostumbra escribir como $f(x) = 3x + 1$.

Nota

Salvo que se diga lo contrario, se trabajará con funciones cuyo dominio y rango es algún subconjunto de R.

Ejemplo:

Sea

$$f: \underbrace{R \to R}_{x \mapsto x^2 - 1}$$

La notación anterior significa $f(x) = x^2 - 1$ ó $y = x^2 - 1$.

Demuestre que:

a) f es una función.

b) Hallar el rango de f.

Solución:

a) Sean $x_1 \in R, x_2 \in R$ tales que $x_1 = x_2$

Veamos que $f(x_1) = f(x_2)$

En efecto:

$$x_1 = x_2 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1^2 - 1 = x_2^2 - 1$$

Pero

$$f(x_1) = x_1^2 - 1 \text{ y } f(x_2) = x_2^2 - 1$$

Entonces $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

Luego f es una función.

b) El rango de f es el conjunto de la imágenes bajo f, una forma sencilla, en lo posible, para hallar el rango f, consiste en despejar x en términos de y; en cuyo caso el rango de f lo constituyen los valores que pueden tomar y para que x sea un real.

En efecto,

$$x^2 = y + 1, \qquad x = \pm\sqrt{y + 1}$$

Como vemos, x es real cuando $y + 1 \geq 0$,

Es decir, x es real cuando $y \geq -1$.

Por lo tanto,

Rango de $f = \{y \in R | y \geq -1\}$

O rango de $f = [-1, +\infty)$

Definición

i. Sean f y g funciones de X en Y, se dice que $f = g$ si $f(x) = g(x) \forall x \in X$.

ii. Se dice que una función $f: X \to Y$ es $1-1$ (uno a uno) o inyectiva, si para todo x_1, x_2, elementos de X con $x_1 \neq x_2$ entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$.

(Como toda proposición equivale a su contra recíproca, entonces otra forma equivalente de decir que f es $1-1$ es la siguiente:

f es $1-1$ si $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \underbrace{x_1 = x_2}$).

i. f es sobre o sobreyectiva o epiyectiva si el rango de f es igual a su codominio

Es decir, si $f(X) = Y$.

ii. f es una función biyectiva o f es una biyección de X en Y, si f es $1-1$ y sobre.

Ejemplo

$f: \underbrace{R \to R}_{x \mapsto 2x}$. Demostrar que f es $1-1$.

Demostración

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

Es decir $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Luego f es $1-1$.

Ejemplo:

Sea

$$h: \underbrace{R \to R}_{x \mapsto 3x}$$

Demostrar que h es sobre.

Demostración

$h(R) \stackrel{\text{def}}{=} \{h(x) | x \in R\} = \{3x | x \in R\}$

$= \left\{y \middle| \frac{y}{3} \in R\right\} = \{y | y \in R\} = R$

Luego h es sobre. Observe que si $\frac{y}{3} \in R$ entonces $\frac{y}{3}3 = y \in R$

Ejemplo:

$$g: \underbrace{R \to R}_{x \mapsto 3x+1}$$

Demostrar que g es biyectiva.

Demostración

a) Veamos que g es $1-1$.

Sea $g(x_1) = g(x_2)$. Debemos demostrar que $x_1 = x_2$.

En efecto

$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow 3x_1 + 1 = 3x_2 + 1 \Rightarrow 3x_1 = 3x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$,

$$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Luego g es $1-1$.

b) Veamos que g es sobre.

$$g(R) \overset{\text{def}}{=} \{g(x)|x \in R\} = \{3x+1|x \in R\}$$

$$= \left\{y \middle| \frac{y-1}{3} \in R\right\} = \{y|y-1 \in R\} = \; R$$

Luego g es sobre.

De a) y b) se sigue que g es biyectiva.

Nota

a. La solución de una ecuación en x e y es una relación de R en R.

b. Si la grafica de una ecuación en x e y es cortada por una paralela al eje Y en mas de un punto, entonces dicha ecuación no define a y como una función de x.

c. Si la grafica de una función es cortada por la paralela al eje X es mas de un punto, entonces tal función no es $1-1$.

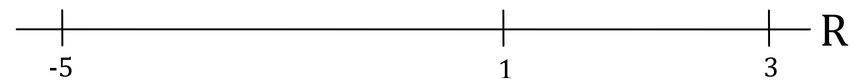
Ejemplo

Considere la función $f(x) = \sqrt{\frac{(x-1)(x+5)}{x-3}}$ y determine su dominio

Sea $y = f(x) \in R$ entonces $\frac{(x-1)(x+5)}{x-3} \geq 0$

i. Los ceros de los factores son:

$x = 1, \quad x = -5, \quad x = 3$



ii. En $(-\infty,-5)$ $\frac{(x-1)(x+5)}{x-3} < 0$ lo que implica que no existe $x \in R | x \in (-\infty,-5) \; \wedge \; f(x) \in R$.

iii. En $(-5,1)$ $\frac{(x-1)(x+5)}{x-3} > 0$ lo que significa que para todo $x \in (-5,1),\; f(x) \in R$.

iv. En $(1,3)$ $\frac{(x-1)(x+5)}{x-3} < 0$ lo que significa que en $(3-1)$ no existe $x \; \in Dominio$.

v. En $(3,+\infty)$ $\frac{(x-1)(x+5)}{x-3} < 0$ lo que significa que para todo $x \in (3,+\infty),\; f(x) \in R$.

vi. Considere $f(x)$ en los ceros de los factores.

En $x = -5$ $\quad f(x) = 0$

En $x = 1$ $\quad f(x) = 0$

En $x = 3$ no es parte del dominio porque la división por cero no esta definida.

Entonces el dominio de f es:

$$\{x \in R| -5 \leq x \leq 1 \;\; \vee \;\; x > 3\}$$

3.2 Ejercicios

Determine el dominio de la función f.

1) $f(x) = \frac{2x-5}{x(x-3)}$

2) $f(x) = \frac{1}{x^2-10x+25}$

3) $f(x) = \frac{x}{x^2-x+1}$

4) $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{3x-1}}$

3.3 Operaciones entre funciones.

Definición

Sean f y g funciones cuyos dominios se intersecan en C, entonces

La SUMA de f con g *se nota* $f+g$, esta definida por

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in C$$

La DIFERENCIA entre f y g *se nota* $f-g$, esta definida por

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) \quad \forall x \in C$$

El PRODUCTO entre f y g *se nota* fg, esta definida por

$$(fg)(x) = f(x)g(x) \quad \forall x \in C$$

EL PRODUCTO POR UN ESCALAR, kf, donde k es un real,

Se define por

$$(kf)(x) = kf(x) \quad \forall x \in C$$

EL COCIENTE entre f y g *se nota* $\frac{f}{g}$ ó f/g, y se define así

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \forall x \in C \ \wedge \ g(x) \neq 0$$

Nota

Se puede demostrar que cada una de las anteriores también es función.

Ejemplo

Sean

$$f: \underbrace{R \to R}_{x \longmapsto 4x} \quad \wedge \quad g: \underbrace{W \to R}_{x \longmapsto 2\sqrt{x}}$$

Donde W representa los reales no negativos.

a. Hallar las funciones: SUMA – DIFERENCIA - PRODUCTO Y COCIENTE de f con g.

b. Hallar:

$$(f+g)(4); (f-g)(z); \quad (fg)(x-y); \quad \left(\frac{f}{g}\right)(1+w)$$

Solución

En primer lugar se tiene que la intersección de los dominios d f y g es $R \cap W = W$

a. Entonces, $\forall x \in R \geq 0$ se tiene:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 4x + 2\sqrt{x}$$
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = 4x - 2\sqrt{x}$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = 4x2\sqrt{x} = 8x\sqrt{x}$$

$\forall x \in R^+$ Se tiene:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{4x}{2\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}$$

Estas funciones las podemos expresar como sigue:

$$f+g\colon \underbrace{W \to R}_{x \mapsto 4x+2\sqrt{x}} \qquad f-g\colon \underbrace{W \to R}_{x \mapsto 4x-2\sqrt{x}}$$

$$fg\colon \underbrace{W \to R}_{x \mapsto 8x\sqrt{x}} \qquad \frac{f}{g}\colon \underbrace{R^+ \to R}_{x \mapsto 2\sqrt{x}}$$

b.

$(f+g)(4) = 4 \cdot 4 + 2\sqrt{4} = 20$ Ó también

$(f+g)(4) = f(4) + g(4) = 4 \cdot 4 + 2\sqrt{4} = 20$

$(f-g)(z) = 4z - 2\sqrt{z}$ Ó también

$(f-g)(z) = f(z) - g(z) = 4z - 2\sqrt{z}$

$(fg)(x-y) = 8(x-y)\sqrt{x-y}$ Ó también

$$\begin{aligned}(fg)(x-y) &= f(x-y)g(x-y)\\ &= 4(x-y)2\sqrt{x-y}\\ &= 8(x-y)\sqrt{x-y}\end{aligned}$$

$(f/g)(1+w) = 2\sqrt{1+w}$ Ó también

$$(f/g)(1+w) = \frac{f(1+w)}{g(1+w)}$$

$$(f/g)(1+w) = \frac{4(1+w)}{2\sqrt{1+w}} = 2\sqrt{1+w}$$

Definición: (composición o compuesta de g con f)

Sean $f\colon X \to Y \ \wedge \ g\colon W \to Z$ dos funciones, donde $W \subseteq Y$ y sea $A \subseteq X$ tal que $f(A) \subseteq W$; entonces

La COMPUESTA de g con f *se nota* $g \circ f$, es la función definida así:

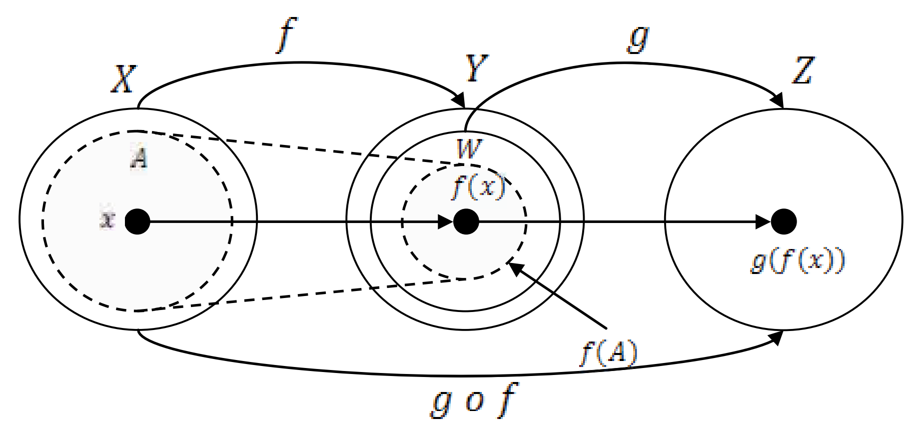
$$g \circ f\colon \underbrace{A \to Z}_{x \mapsto g(f(x))}$$

Es decir, $(g \circ f)(x) \overset{\text{def}}{=} g(f(x))$ donde el dominio de

$g \circ f$ es $A = \{x \in X \mid x \in dominio\ de\ f \ \wedge \ f(x) \in dominio\ de\ g\}$

(Ver ilustración).

Ilustración



Veamos que $g \circ f$ es una función de A en Z.

Sean x_1 y x_2 elementos de A, con $x_1 = x_2$. Debemos llegar a que $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$.

En efecto:

$$x_1 = x_2 \xRightarrow{f-función} f(x_1) = f(x_2)$$

$$\xRightarrow{g-función} g(f(x_1)) = g(f(x_2))$$

Es decir,

$$x_1 = x_2 \Longrightarrow (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$$

Luego $g \circ f$ es función.

Ejemplo

Sean las funciones f y g definidas como sigue $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ y $g(x) = 7x^2 + 1$.

Hallar:

a) Dominio de f, y dominio de g.

b) Dominio de $g \circ f$ y dominio de $f \circ g$ y además ilustrar tanto $g \circ f$ como $f \circ g$.

c) $g \circ f$ y $f \circ g$.

d) $(g \circ f)(2)$ y $(f \circ g)(2)$.

Solución

a) Dominio de f.

$f(x)$ Es real, siempre que $x^2 - 4 \geq 0$

$f(x)$ Es real, siempre que $x^2 \geq 4$

$f(x)$ Es real, siempre que $|x| \geq 2$

$f(x)$ Es real, siempre que $x \leq -2$ ó $x \geq 2$

Luego el dominio de $f = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

Dominio de g

$g(x)$ Es un real, siempre que x sea real. Luego, dominio de $g = R$.

b) Dominio de

$$gof = \{x \in [(-\infty,-2] \cup [2,+\infty)] | x \in [(-\infty,-2] \cup [2,+\infty)] \wedge f(x) \in R\}$$

$$= \{x \in [(-\infty,-2] \cup [2,+\infty)]/x \in [(-\infty,-2] \cup [2,+\infty)] \wedge \sqrt{x^2-4} \in R\}$$

$$= \{x \in [(-\infty,-2] \cup [2,+\infty)]/x \in [(-\infty,-2] \cup [2,+\infty)] \wedge x^2 - 4 \geq 0\}$$

$$= \{x \in [(-\infty,-2] \cup [2,+\infty)]/x \in [(-\infty,-2] \cup [2,+\infty)] \wedge x \in [(-\infty,-2] \cup [2,+\infty)]\}$$

$$= \{x \in [(-\infty,-2] \cup [2,+\infty)]/x \in [(-\infty,-2] \cup [2,+\infty)] \cap [(-\infty,-2] \cup [2,+\infty)]\}$$

$$= \{x \in [(-\infty,-2] \cup [2,+\infty)]/x \in [(-\infty,-2] \cup [2,+\infty)]\}$$

$$= (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$$

En este caso, por mera coincidencia, resultó dominio de $g \circ f$ = dominio de f.

Dominio de $f \circ g$ es el conjunto

$$\{x \in dominio\ de\ g | x \in dominio\ de\ g\ \wedge\ g(x) \in dominio\ de\ f\}$$

$$= \{x \in R | x \in R\ \wedge\ g(x) \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)\}$$

$$= \{x \in R | x \in R\ \wedge\ |g(x)| \geq 2\} =$$

$$= \{x \in R | x \in R\ \wedge\ |7x^2 + 1| \geq 2\} =$$

$$= \{x \in R | x \in R\ \wedge\ 7x^2 + 1 \geq 2\} =$$

$$= \{x \in R | x \in R\ \wedge\ 7x^2 \geq 1\} =$$

$$= \left\{x \in R \middle| x \in R\ \wedge\ x^2 \geq \frac{1}{7}\right\} =$$

$$= \{x \in R | x \in R\ \wedge\ |x| \geq \sqrt{\frac{1}{7}}\} =$$

$$= \left\{x \in R | x \in R\ \wedge\ x \in \left(\left(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{7}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{1}{7}}, +\infty\right)\right)\right\}$$

$$= \left\{x \in R | x \in R \cap \left(\left(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{7}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{1}{7}}, +\infty\right)\right)\right\}$$

$$= \left\{x \in R | x \in \left(\left(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{7}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{1}{7}}, +\infty\right)\right)\right\}$$

$$= \left(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{7}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{1}{7}}, +\infty\right)$$

c)

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt{x^2 - 4}\right)$$
$$= 7(x^2 - 4) + 1$$
$$(g \circ f)(x) = 7x^2 - 27$$

Por lo tanto

$$g \circ f : \underbrace{(-\infty, -2] \cup [2, +\infty) \to R}_{x \mapsto 7x^2 - 27}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(7x^2 + 1)$$

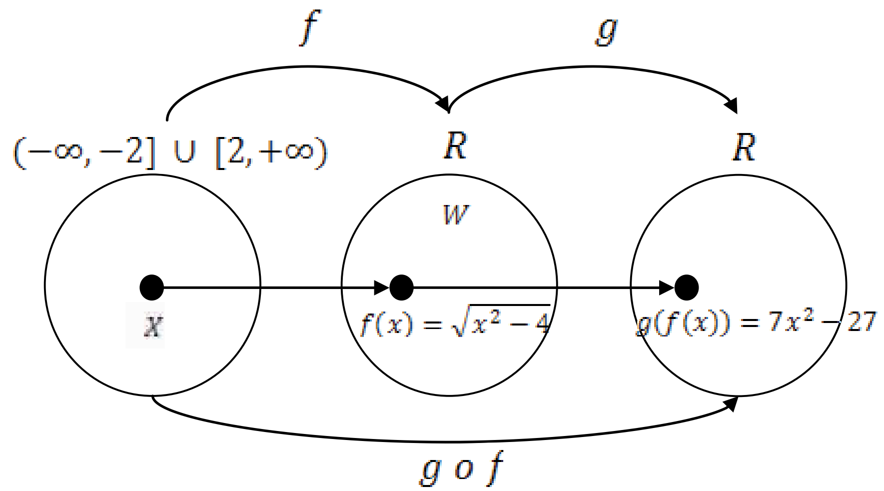
$$= \sqrt{(7x^2 + 1)^2 - 4}$$

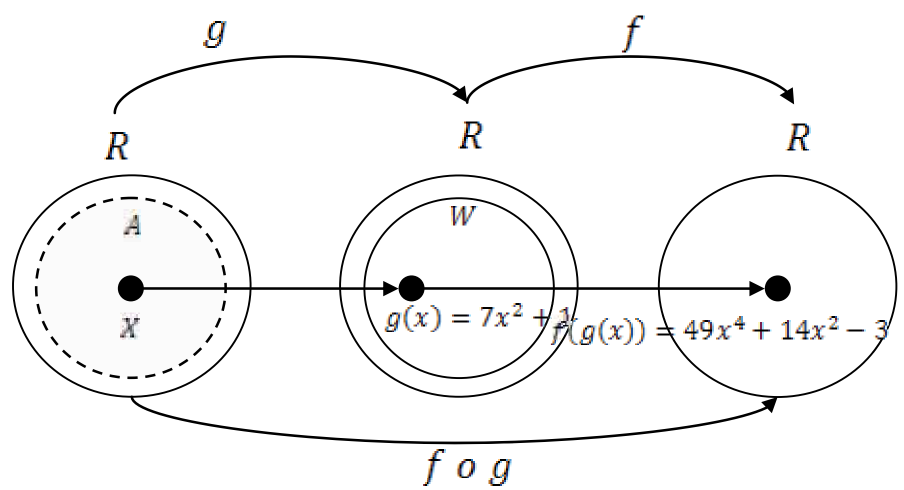
$$= \sqrt{49^4 + 14x^2 - 3}$$

Por lo tanto

$$f \circ g : \underbrace{\left(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{7}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{1}{7}}, +\infty\right) \to R}_{x \mapsto \sqrt{49^4 + 14x^2 - 3}}$$

Ilustración de $g \circ f$ y $f \circ g$.





Observe que:

$W = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

$$A = \left(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{7}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{1}{7}}, +\infty\right)$$

$(f\ o\ g)(0)$ No existe (pues $0 \notin$ dominio de $f o g$)

d)

$(g\ o\ f)(2) = 7 \cdot 2^2 - 27 = 1$ Ó también

$$(g\ o\ f)(2) = g(f(2)) = g(\sqrt{2^2 - 4})$$
$$= g(0) = 7 \cdot 0^2 + 1 = 1$$
$$(f\ o\ g)(2) = \sqrt{49 \cdot 2^4 + 14 \cdot 2^2 - 3}$$
$= \sqrt{837}$ Ó también

$$(f\ o\ g)(2) = f(g(2)) = f(29)$$
$$= \sqrt{29^2 - 4} = \sqrt{837}$$

Como se ve, $(g\ o\ f)(2) \neq (f\ o\ g)(2)$

Por lo tanto: $g\ o\ f \neq f\ o\ g$ es decir, la compuesta de dos funciones no goza de la propiedad conmutativa.

Ejemplo:

a. Dadas f y $f\ o\ g$ por $f(x) = x - 1$ y $(f\ o\ g)(y) = y + 2$
Hallar g.

b. Dadas g y $f\ o\ g$ por $g(z) = 3z,$ $(f\ o\ g)(h) = h + 3$
Hallar f.

Solución

a. $(f\ o\ g)(y) \stackrel{\text{def}}{=} f(g(y)) \stackrel{\text{def}}{=} g(y) - 1$

Pero $(f\ o\ g)(y) = y + 2$

Igualando se tiene $g(y) - 1 = y + 2$, $g(y) = y + 3$

b. $(f \ o \ g)(h) \stackrel{\text{def}}{=} f\big(g(h)\big) \stackrel{\text{def}}{=} f(3h)$

Pero $(f \ o \ g)(h) = h + 3$

Igualando se tiene $f(3h) = h + 3$

Llamemos $3h = z$, $h = \frac{z}{3}$, entonces $f(z) = \frac{z}{3} + 3$

Ejemplo

Sean las funciones f, g definidas a continuación

$$f(x) = \begin{cases} 0, & si \quad x < 0 \quad ó \quad x > 1 \\ x^2, & si \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1, & si \quad x < 0 \quad ó \quad x > 1 \\ 2x, & si \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Hallar $f \ o \ g$.

Solución

$$(f \ o \ g)(x) = f\big(g(x)\big) = \begin{cases} f(1), & si \quad x < 0 \quad ó \quad x > 1 \\ f(2x), & si \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Pero $f(1) = 1^2 = 1$ (pues $0 \leq 1 \leq 1$)

Para hallar $f(2x)$ debemos observar en que intervalo esta $2x$.

Como $0 \leq x \leq 1$, entonces, $0 \leq 2x \leq 2$

Ahora, el argumento $2x$ se puede descomponer en dos intervalos, así:

$0 \leq 2x \leq 1$ ó $1 \leq 2x \leq 2$; Entonces

$0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ ó $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$

Por lo tanto, en f se tiene que:

Si $2x <\in [0,1]$ entonces $f(2x) = (2x)^2 = 4x^2$

Si $2x <\in [1,2]$ entonces $f(2x) = 0$

Es decir,

$f(1) = 1,$ Si $x < 0$ ó $x > 1$

$f(2x) = 4x^2,$ Si $x \in [0, \frac{1}{2}]$

$f(2x) = 0,$ Si $x \in [\frac{1}{2}, 1]$

Por lo tanto,

$$(f \ o \ g)(x) = \begin{cases} 1, & si \quad x < 0 \quad ó \quad x > 1 \\ 4x^2, & si \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0, & si \quad \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

3.4 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6 determine las funciones $f+g$, $f-g$, fg, $f/_g$, y describa sus dominios.

1.) $f(x) = x^2 + 1,\qquad g(x) = 2x^2 - x$

2.) $f(x) = x - 2,\qquad g(x) = \frac{1}{x-4}$

3.) $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 5x,\qquad g(x) = (1-x)^2$

4.) $f(x) = \frac{4}{x-6},\qquad g(x) = \frac{x}{x-3}$

5.) $f(x) = \sqrt{x+2},\qquad g(x) = \sqrt{5-5x}$

6.) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-9}},\qquad g(x) = \frac{\sqrt{x+4}}{x}$

7.) Complete la tabla.

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	-1	2	10	8	0
$g(x)$	2	3	0	1	4
$(f\ o\ g)(x)$					

En los ejercicios 8 a 13 determine las funciones $f\ o\ g\ \wedge\ g\ o\ f$ y describa sus dominios.

8.) $f(x) = \sqrt{x^2+1},\qquad g(x) = \sqrt{x-1}$

9.) $f(x) = \frac{1}{2x-1},\qquad g(x) = x^2 + 1$

10.) $f(x) = x - 1,\qquad g(x) = x^3$

11.) $f(x) = x + \frac{1}{x^2},\qquad g(x) = \frac{1}{x}$

12.) $f(x) = x + 1,\qquad g(x) = x + \sqrt{x-1}$

13.) $f(x) = x^3 - 4,\qquad g(x) = \sqrt[3]{x+3}$

En los ejercicios 14 y 15 determine $f\ o\ f\ \wedge\ f\ o\ \left({}^{1}/_{f}\right)$ y describa su dominio.

14.) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

15.) $f(x) = \frac{x+4}{x}$

En los ejercicios 16 a 18 determine funciones f y g tales que $F(x) = f\ o\ g$.

16.) $F(x) = (x^2 - 4x)^5$

17.) $F(x) = \sqrt{9x^2 + 16}$

$F(x) = 1 + |2x + 9|$

3.5 Funciones especiales.

Se denominan funciones especiales las siguientes: función constante – función identidad – función polinómica o polinomio. Funciones racional -función valor absoluto – función parte entera – función algebraica y función trascendente.

La función f definida por $f(x) = c$ (c es una constante), se llama FUNCION CONSTANTE.

La función f definida por $f(x) = x$, se llama FUNCION IDENTIDAD.

La función f definida por

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ ... + a_nx^n \quad con \quad a_n \neq 0,$$

Donde a_i $(i = 1, 2, 3, ... n)$ son reales y los exponentes son enteros positivos, se llama FUNCION POLINOMICA DE GRADO n, ó simplemente POLINOMIO DE GRADO n.

Dentro de las funciones polinómicas son frecuentes:

- La función LINEAL, definida por $f(x) = a_0 + a_1x$, con $a_1 \neq 0$ (su grafica en una línea recta).
- La función CUADRÁTICA, definida por $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, con $a_2 \neq 0$ (su grafica es una parábola).

NOTA

Las funciones lineal y cuadrática serán consideradas mas adelante dada su importancia para el objetivo de estas notas.

Función racional

Es la función definida mediante el cociente entre dos polinomio y cuyo dominio son los reales que no anulan el denominador.

Ejemplo, sea F, tal que,

$$F(x) = \frac{1 + 3x + 5x^2}{4x^3 - 8x^4}$$

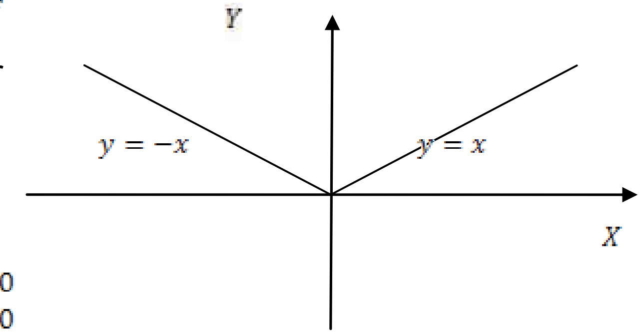
Entonces F es una función racional, cuyo dominio es $R - \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$

Función valor absoluto

Es la función f definida por $f(x) = |x|$;

Es decir,

$$f(x) = \begin{cases} x, & si\ x \geq 0 \\ -x, & si\ x < 0 \end{cases}$$



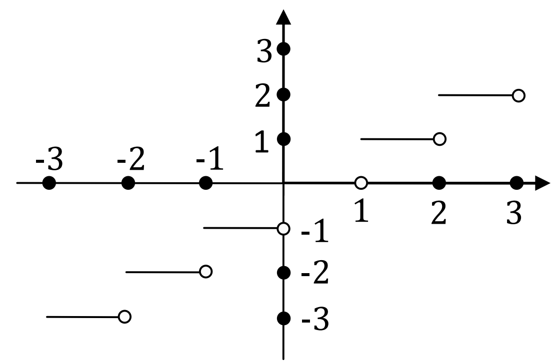
Su grafica esta dada por las dos semirrectas de la figura.

Función parte entera de x

Que se denota por $f(x) = [\![x]\!]$ donde $[\![x]\!]$ significa que el mayor entero menor o igual que x.

Observe que:

$[\![0]\!] = 0$	$[\![-1]\!] = -1$
$[\![0{,}1]\!] = 0$	$[\![-1{,}3]\!] = -2$
$[\![0{,}5]\!] = 0$	$[\![-1{,}7]\!] = -2$
$[\![0{,}8]\!] = 0$	$[\![-1{,}9]\!] = -2$



Su gráfica aparece a la derecha, observe que el extremo derecho de cada segmento no pertenece a la grafica, allí ocurre un salto.

Esta gráfica representa unos peldaños o escalones; de ahí, que se le llame FUNCION ESCALONADA.

Función algebraica

Una función f se llama algebraica si $f(x)$ se puede obtener mediante un número finito de sumas, diferencias, productos, cocientes o raíces de polinomios.

Ejemplo:

La función f definida por

$$f(x) = x + \frac{x^2 + \sqrt{x^3 + 5x} + 7}{2x + (x+1)^{1/3}}$$

Existen otras funciones como las trigonométricas, logarítmicas, exponenciales, hiperbólicas, etc., llamadas FUNCIONES TRASCENDENTES. (Estas funciones son consideradas en las siguientes secciones).

3.6 Ejercicios:

1) Dado $f(x)$. Determine los valores indicados.

i. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^4-1}{x^2-1}, & x \neq 1 \ \ y \ \ x \neq -1 \\ 3, & x = 1 \\ 5, & x = -1 \end{cases}$

$f(-1) =$ ________ . $f(1) =$ ________ . $f(3) =$ ________ .

ii. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x \geq 1 \\ -x^3, & x < 1 \end{cases}$

$f(1) =$ ________ $f(0) =$ ________ $f(-2) =$ ________

$f(\sqrt{2}) =$ ________

iii. $f(x) = \begin{cases} 1, & si\ x\ es\ un\ numero\ racional \\ 0, & si\ x\ es\ un\ numero\ irracional \end{cases}$

$f(1/3) =$ ________ $f(-1) =$ ________

$f(\sqrt{2}) =$ ________ $f(\pi) =$ ________

iv. $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & x < 0 \\ x^2 - 2, & x \geq 0 \end{cases}$

Determine los valores x tal que $f(x) = 7,\ f(x) = 0,\ f(x) = 1,\ f(x) = -2$

2) Grafique:

i. $y = -[\![x]\!]$

ii. $y = |x + 3|$

iii. $y = 2 - |x|$

3) Determine el rango de $f(x) = (-1)^{[\![x]\!]}$

4) Exprese las funciones, como funciones definidas por intervalos.

i. $f(x) = \frac{|x|}{x}$

ii. $f(x) = \frac{x-3}{|x-3|}$

3.7 Otros tipos de funciones.

Considere la función $f(x) = x^n$ (función potencia). El dominio de $f(x)$ depende de n (consideramos solo para $n = 1, n = 2, n = 3, n = 4,$ $n = -1, n = {}^1/_2, n = {}^1/_3, n = {}^2/_3$) debido a que suelen presentarse con frecuencia en algunos problemas de calculo.

El dominio para $n = 1, n = 2, n = 3, n = 4 \ldots (-\infty, +\infty) = R$

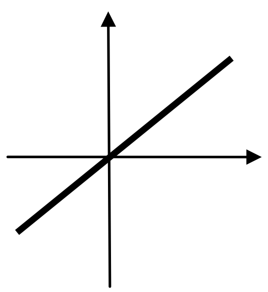
El dominio para $n = -1, n = -2$ ... es $R - \{0\}$

El dominio para $n = {}^1/_2$ es $[0, +\infty)$

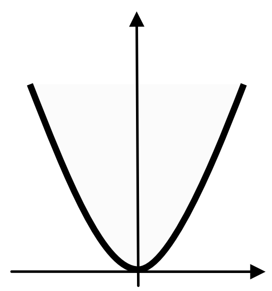
El dominio para $n = {}^1/_3$ es R

El dominio para $n = {}^2/_3$ es R

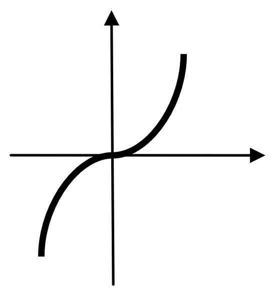
El rango de cada una de las funciones se puede ver de las graficas que se muestran a continuación o de la definición de rango para una función.



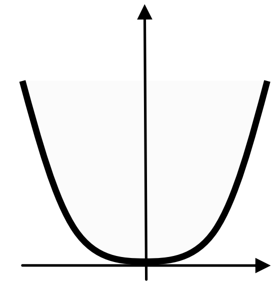
a) $n = 1, f(x) = x$



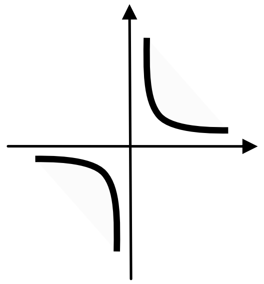
b) $n = 2, f(x) = x^2$



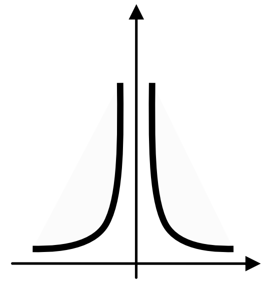
c) $n = 3, f(x) = x^3$



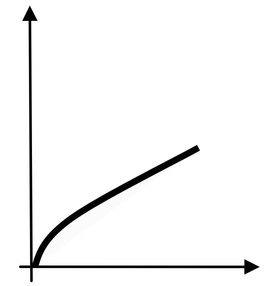
d) $n = 4, f(x) = x^4$



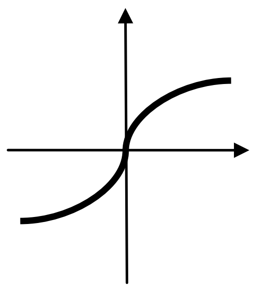
e) $n = -1, f(x) = x^{-1} =$



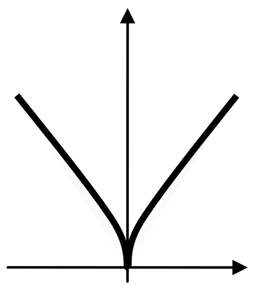
f) $n = -2, f(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$



g) $n = \frac{1}{2}, f(x) = x^{1/2} = \sqrt{x}$



h) $n = \frac{1}{3}, f(x) = x^{1/3} =$



i) $n = \frac{2}{3}, f(x) = x^{2/3} =$

Funciones simétricas (pares impares).

Definición

Una función $f(x)$ con dominio $D \subseteq R$ se dice par si $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D$ y $-x \in D$.

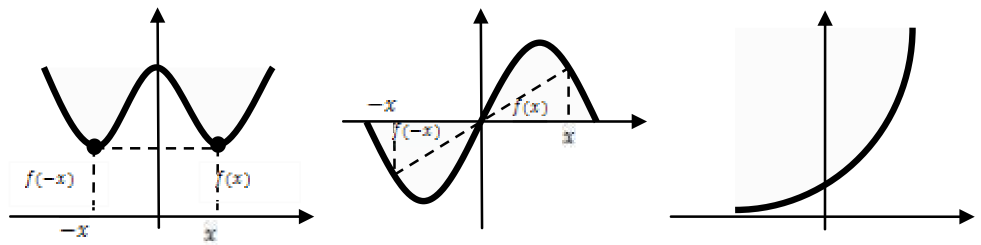
Su grafica se dice simétrica con respecto al eje y.

De la misma forma se dice impar si $f(-x) = -f(x)$

Su grafica se dice simétrica con respecto al origen.

Nota

No se considera simetría con respecto al eje x puesto que una grafica diferente de cero ($y \neq 0$) y simétrica con respecto a x no representa una función en el plano cartesiano.



Función par　　Función impar　　No par no impar

Funciones reflejadas.

Sea $y = f(x)$ una función. Entonces la grafica de

$y = -f(x)$ Se dice reflejada en el eje x y

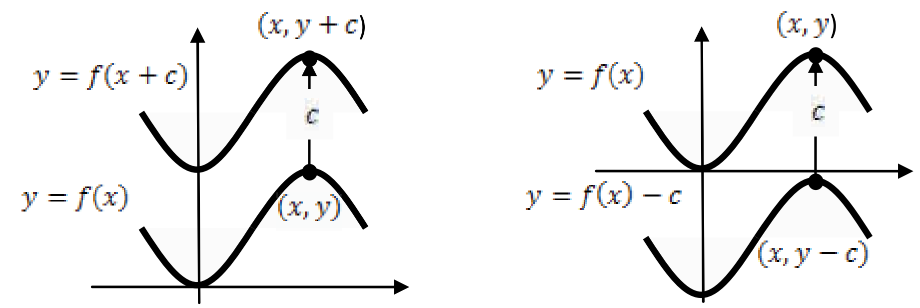
$y = f(-x)$ Se dice f reflejada en el eje y.

Funciones desplazada.

Sea $y = f(x)$ una función y sea c una constante positiva entonces la grafica de

1) $y = f(x) + c$ es la grafica de f desplazada c unidades verticalmente hacia arriba.

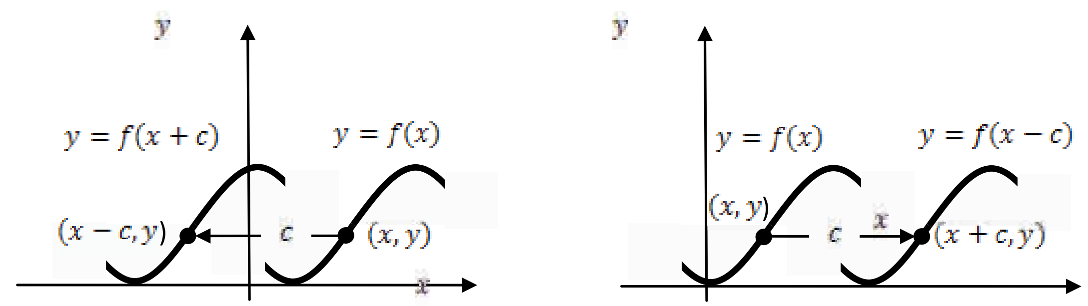
2) $y = f(x) - c$ es la grafica de f desplazada c unidades verticalmente hacia abajo.



a) Desplazamiento vertical hacia　　b) Desplazamiento vertical hacia

De la función compuesta, si se tiene $y = f(x)$ una función y $g(x) = x + c$ una función, entonces $y = (f \ o \ g)(x) = f(g(x)) = f(x + c)$ es la grafica de f desplazada c unidades horizontalmente hacia la izquierda y tiene la misma forma.

$y = f(x - c)$ Es la gráfica de f desplazada c unidades a la derecha.



c) Desplazamiento horizontal hacia la izquierda　　d) Desplazamiento horizontal hacia la derecha

Nota

Las transformaciones anteriores (desplazamientos) se dicen transformaciones rígidas puesto que cambia de posición pero su forma es la misma.

Ejemplo

Considere la función $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

Dominio de $f = R$ puesto que $x^2 + 1 \geq 1$ para todo $x \in R$ y veamos que si $f(x)$ es par – impar - o ni par ni impar

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2+1} = -\frac{x}{x^2+1} = -f(x)$ Lo que implica que es impar.

Ejemplo

Considere $f(x) = x^3 - x + 4$

Dominio de $f = R$

$f(-x) = (-x)^3 - (-x) + 4$

$= -x^3 + x + 4$

$$= -(x^3 - x - 4) \underbrace{\neq -(x^3 - x + 4)}_{f(x)}$$

También $f(-x) \neq f(x)$

Lo que implica que f no es par ni impar.

3.8 Ejercicios

En los problemas 1 a 7. Determine si la función $y = f(x)$ es par, impar o ni par ni impar.

1. $f(x) = 4 - x^2$

2. $f(x) = x^2 + 2x$
3. $f(x) = 3x - \frac{1}{x}$
4. $f(x) = x|x|$
5. $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$
6. $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x}$
7. $f(x) = |x^3|$

3.9 Función inversa

Definición

Sea $f\colon \underbrace{X \to Y}_{x \mapsto y}$ una función biyectiva, entonces

La función g definida como sigue

$g\colon \underbrace{Y \to X}_{y \mapsto x}$ Se llama FUNCION INVERSA DE f, y se suele denotar por f^{-1} (es decir, $g = f^{-1}$).

Siempre que

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

Es decir,

$$y = f\left(f^{-1}(y)\right), \quad y = (f \; o \; f^{-1})(y), \quad f \; o \; f^{-1}$$

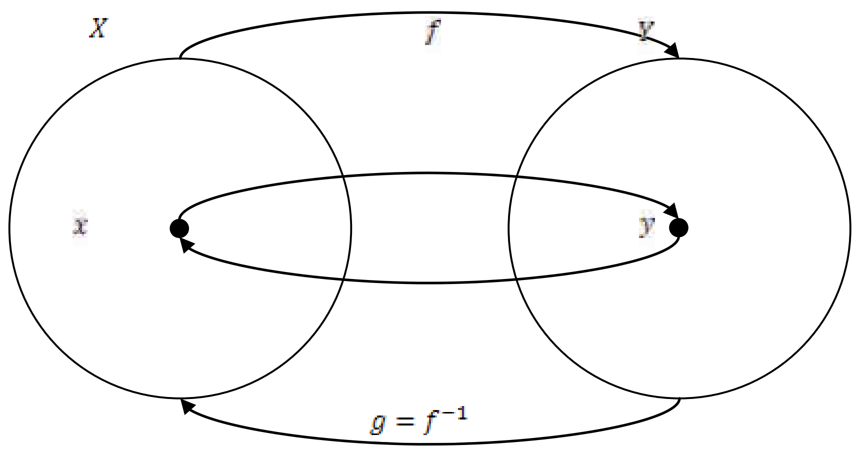
Es la función identidad $\forall y \in dominio \; de \; f^{-1};$ y

$$x = f^{-1}\left(f(x)\right), \; x = (f^{-1} \; o \; f)(x), \; f^{-1} \; o \; f$$

Es la función identidad $\forall x \in dominio\ de\ f$.

Es decir, f^{-1} es la inversa de f si y solo si $f\ o\ f^{-1}$ es la identidad en el dominio de f^{-1} y $f^{-1}\ o\ f$ es la identidad en el dominio de f.

Ilustración.



g También resulta ser biyectiva (verificarlo)

Se observa que:

- El dominio de f^{-1} es el rango de f, y el rango de f^{-1} es el dominio de f.

- El efecto de f^{-1} es devolver la imagen bajo f en su pre imagen (es decir, devolver y en x).

Ejemplo

Sea $f: \underbrace{R \to R}_{x \mapsto 2x}$

Hallar, si existe, f^{-1} y darle la prueba

Nota

$$f^{-1} \neq \frac{1}{f}$$

Solución

Como f es biyectiva (verificarlo), entonces existe su inversa.

f Está dada por $f(x) = 2x$, sea $y = 2x$

(Es decir, $y = f(x)$)

Al despejar x en términos de y se tiene: $x = \frac{y}{2}$ como se aprecia, x es una función de y; en tal caso se escribe $g(y) = \frac{y}{2}$

Esta función g es la inversa de f; es decir,

$$f^{-1}(y) = \frac{y}{2}$$

Prueba

f^{-1} Es la inversa de f si

$f^{-1}\ o\ f$ Es la función identidad en el dominio de f y

$f o\ f^{-1}$ Es la función identidad en el dominio de f^{-1}

En efecto:

$$(f^{-1}\ o\ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x) = \frac{2x}{2} = x$$

$\forall x \in$ Dominio de f y

$$(f\ o\ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f\left(\frac{y}{2}\right) = 2 \cdot \frac{y}{2} = y$$

$\forall y \in$ Dominio de f^{-1}

Luego $f^{-1} \circ f$ es la función identidad en el dominio de f y $f \circ f^{-1}$ es la función identidad en el dominio de f^{-1}

Por lo tanto, f^{-1} sí es la inversa de f.

Nota

a. A veces no es posible despejar x en términos de y, por lo tanto no se puede hallar una ecuación para la función inversa. No obstante, es posible, en estos casos, obtener propiedades para la función inversa, lo cual se verá más adelante.

b. En le ejemplo 1 encontramos que

$$f^{-1}(y) = \frac{y}{2}$$

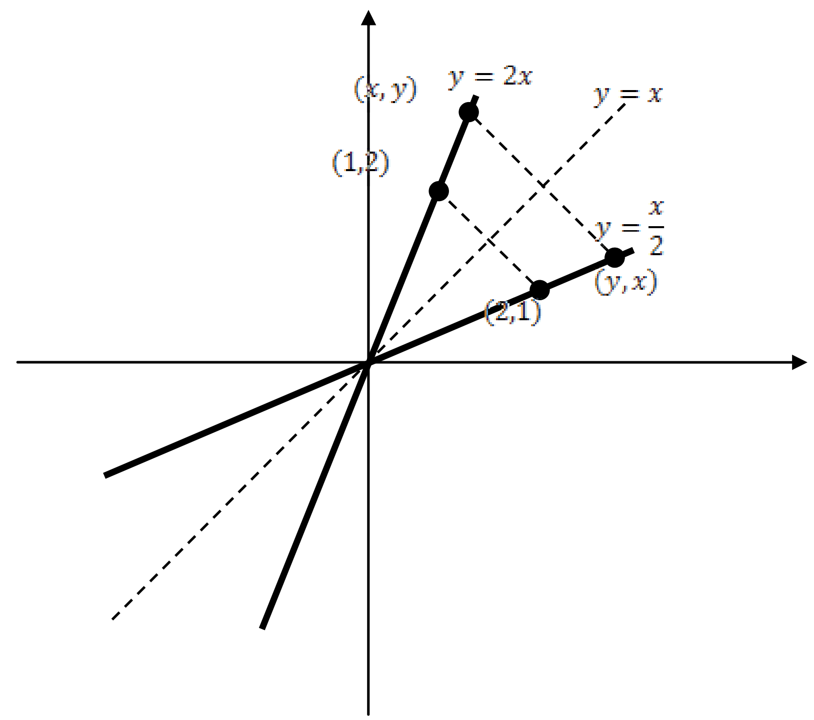
Es conveniente mencionar que la variable y se puede cambiar por cualquier otra letra; sin embargo, es importante tener presente que el efecto de f^{-1} al aplicarla a cualquier real es producir como imagen la mitad de dicho real.

c. Si deseamos graficar las funciones f y f^{-1} en el mismo sistema coordenado Y contra X entonces en ambos casos la variable independiente debe ser x; en tal caso, debemos expresar f^{-1} como

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$$

Es decir, la función f está dada por $y = 2x$ y la función f^{-1} esta dada por $y = \frac{x}{2}$

Sus graficas aparecen en la figura.



d. Se puede apreciar que si $(x, y) \in$ la grafica de f, entonces, según la definición de f^{-1}, $(y, x) \in$ la grafica de f^{-1}. Como el punto (y, x) es el simétrico de (x, y) con respecto a la recta $y = x$ (bisectriz del I, III cuadrantes), entonces para hallar la grafica de f^{-1}, conocida la grafica de f, basta reflejar esta ultima sobre la recta $y = x$ (piense que en $y = x$ hay un espejo plano $\perp$ al plano XY).

3.10 Ejercicios.

1. Sea f función definida por $f(x) = x^2 - x + 1$. Hallar:

(a) $f(-3)$

(b) $f(\sqrt{3})$

(c) $f(2 + h)$

(d) $f[(\frac{1}{a})^2]$

(e) $[f(\frac{1}{a})]^2$

(f) $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

2. Hallar el subconjunto más grande de R que pueda servir como dominio de f, si $f(x) = \sqrt{3x-6}$

3. Hallar el subconjunto más grande de R que pueda servir como dominio de la función g, definida por

$$g(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2-9}}$$

4. Lo mismo que el 3. Para la función h, definida por

$$h(z) = \sqrt{-8z-4z^2+8}$$

5. Investigue si la función f es $1-1$; sabiendo que $f(x) = x^2 + x - 1$

6. Sea f la función definida por

$$f(x) = \frac{|4+x| - |x| + 2}{x}$$

(a) Hallar el dominio de f

(b) Expresar $f(x)$ sin las barras e valor absoluto

(Observe que f se puede definir por tres ramas)

7. Sea f una función cuyo dominio es D. f se llama FUNCION PAR, si $f(-x) = f(x) \forall \in D$; f se llama FUNCION IMPAR, si $f(-x) = -f(x) \forall x \in D$.

(a) Dentro de cada paréntesis indique P, I o deje en blanco, según que la respectiva función sea PAR, IMPAR o ninguna de las dos.

$$f(x) = x^4 + 3x^2 + 1 \quad (\quad)$$
$$f(x) = x^3 + x - 2 \quad (\quad)$$
$$f(x) = x^2 + x + 1 \quad (\quad)$$

(b) Demuestre que toda función se puede expresar como la suma de una PAR con otra IMPAR.

8. Demuestre que la sume y el producto de funciones PAR, es otra función PAR.

9. Si f y g son las funciones definidas por

$$f(z) = \sqrt{4+2z}, \quad g(y) = 3 + y^2$$

Hallar:

(a) $f \ o \ g$ e indicar su dominio

(b) $g \ o \ f$ e indicar su dominio

(c) $(f \ o \ g)(\sqrt{3})$

(d) $(g \ o \ f)(\sqrt{3})$

(e) $g(f(0))$

10. Sean las funciones f y g definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & si\ x < 0 \quad ó \quad x > 1 \\ 2x, & si\ x \in [0,1] \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1, & si\ x < 0 \ \text{ ó } \ x > 1 \\ \frac{x}{2}, & si\ x \in [0,1] \end{cases}$$

Hallar $f\ o\ g$ e indicar su dominio.

11. Si $h(z) = z^2 + 2z + 2$. Encuentre dos funciones f para las cuales $(h\ o\ f)(z) = z^2 - 4z + 5$

12. Sean $f(h) = \frac{1+h}{h}$ y $g(z) = \frac{1}{z-1}$

    (a) Analice si f tiene inversa
    (b) Si (a) es afirmativa, encuentre f^{-1}
    (c) Compare f^{-1} con g.
    (d) Dibujar, en el mismo plano XY, la graficas de f y f^{-1}

13. Sea $y = f(x) = 3x^2 + 1$

    (a) Analice si f tiene inversa
    (b) A que conjunto debe restringir el dominio de f para que sea $1-1$ en dicho conjunto.
    (c) Hallar la inversa de la nueva función
    (d) Grafique en el mismo sistema coordenado, la nueva función y su inversa.

14. Sea $f(x) = \sqrt{2x - 10}$

    (a) Analice si f tiene inversa

    (b) Si (a) es afirmativa, encuentre f^{-1}
    (c) Dibujar, en el mismo plano XY, las graficas de f y f^{-1}
    (d) Hallar $f(7)$
    (e) Hallar $f^{-1}(2)$

3.11 Función lineal y la línea recta.

La noción de la línea recta juega un papel importante en el estudio del cálculo diferencial.

Una ecuación se dice lineal si es de la forma:

$Ax + By + C = 0$ $\quad A, B, C$ Son constantes reales

Se dice lineal puesto que las variables x y y aparecen elevadas a la potencia uno.

Si $A = 0, B \neq 0$ entonces $y = {}^{-C}/_{B} = b$ (1)

Si $A \neq 0, B = 0$ entonces $x = {}^{-C}/_{A} = d$ para todo y (2)

Si $A \neq 0, B \neq 0$ entonces $y = {}^{-A}/_{B}\, x - {}^{C}/_{B}$

$$y = ax + b \qquad (3)$$

(1) (2) y (3) representan rectas en el plano $x\ y$

(1) Una recta horizontal
(2) Una recta vertical
(3) Una recta oblicua (inclinada)

La forma (3) se dice función lineal (como antes fue definida)
La forma (1) $y = f(x) = b$ se dice función constante.

Nota

Es claro que la forma (2) no define una función $y = f(x)$.

La línea recta

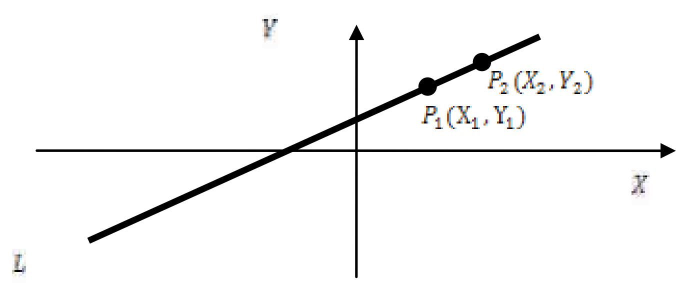
La idea de una línea recta nos la proporciona un hilo templado en sus extremos y prolongados indefinidamente.

Pendiente de una recta.

Definición

Sea $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$ dos puntos distintos de una recta L no paralela al eje Y (no vertical); la PENDIENTE de la recta L, que denotamos por m, esta definida por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



NOTA

Se puede demostrar, utilizando semejanza de triángulos, que la pendiente de una recta es una constante, independientemente del par de puntos que se consideren sobre ella.

Observaciones

a. m esta definida por la diferencia entre las ordenadas de dos puntos, dividida por la diferencia entre sus respectivas abscisas.

b. Si el cambio en $y = \Delta y \stackrel{def}{=} y_2 - y_1$ (ordenada final menos ordenada inicial) y el cambio en $x = \Delta x \stackrel{def}{=} x_2 - x_1$ (abscisa final menos abscisa inicial), entonces

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{cambio\ en\ y}{correspondiente\ cambio\ en\ x}$$

c. Si se considera $P_1(x_1,y_1)$ como punto a la izquierda de $P_2(X_2,Y_2)$; entonces $x_1 < x_2,\ x_2 - x_1 > 0$ y por lo tanto:

- Si $m > 0$, entonces $y_2 - y_1 > 0,\quad y_2 > y_1$

Y en este caso se afirma que la recta L sube o es ascendente o es creciente; lo cual significa que al considerar un punto que se mueve sobre L, si x aumenta entonces su correspondiente ordenada y también aumenta.

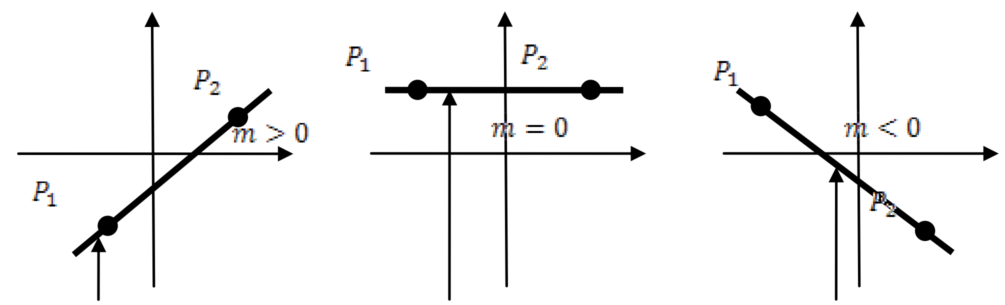
d. Si $m = 0$, entonces $y_2 - y_1 = 0,\ \ y_2 = y_1$

Entonces en este caso la recta L es paralela al eje X (es una recta horizontal)

e. Si $m < 0$, entonces $y_2 - y_1 < 0,\ \ y_2 < y_1$

f. En este caso se dice que la recta L baja o es descendente o es decreciente; lo cual significa que al considerar un punto que se mueve sobre L, si x aumenta entonces su correspondiente ordenada y disminuye.

Ilustración



Recta creciente　　Recta horizontal　　Recta decreciente

Nota

En el ítem c. se dice que la recta L es creciente

Y en el ítem e. se dice que la recta L es decreciente

En general **(definición de función creciente-decreciente)**

Suponga que una función $y = f(x)$ esta definida en un intervalo y que x_1 y x_2 son dos números cualesquiera en el intervalo tal que $x_1 < x_2$ entonces la función f es:

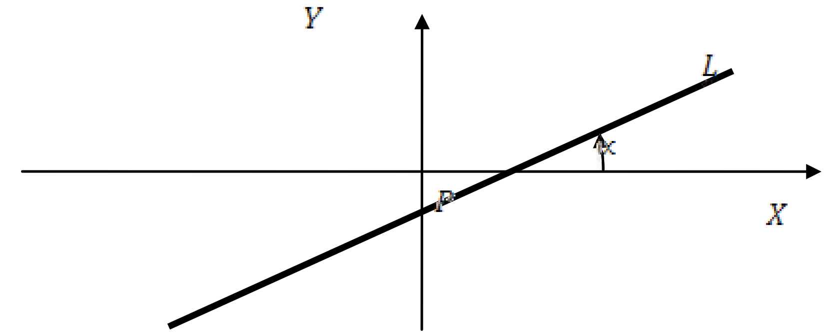
Creciente en el intervalo, si $f(x_1) < f(x_2)$

Decreciente en el intervalo, si $f(x_1) > f(x_2)$

Inclinación de una recta

Definición

Se llama inclinación de una recta L, no paralela al eje X, al menor ángulo positivo α que necesita rotar la semirrecta PX para coincidir con la recta L (ver figura); P es el punto de corte de la recta L con el eje X.



Si L es paralela al eje X, su inclinación se define por 0º

De la definición se sigue que $0º \leq \alpha \leq 180º$

Se observa que:

a) Si $m > 0$, entonces α es agudo

b) Si $m = 0$, entonces $\alpha = 0º$

c) Si $m < 0$, entonces $90º < \alpha < 180º$

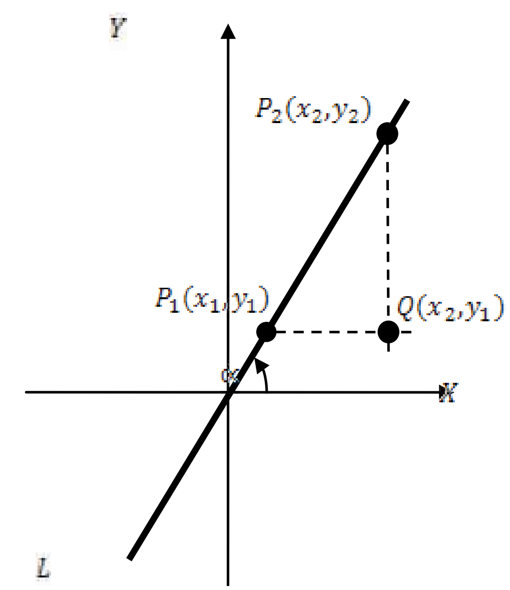
d) Si $\alpha = 90º$, entonces m no esta definida

Relaciones entre pendiente e inclinación

Sea L una recta de pendiente m e inclinación α.

Demostrar que

$$m = \tan\alpha$$



Demostración.

Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P(x_2, y_2)$ puntos de L (ver figura)

Entonces $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (1)

Por P_1 y P_2 trazamos paralelas a los ejes X y Y respectivamente las cuales cortan en $Q(x_2, y_1)$. En el triangulo rectángulo PQP_2 se tiene:

$$\tan\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (2)$$

D (1) y (2) se sigue que $m = \tan \propto$

Nota: Recuerde que $\tan\alpha = \frac{lado\ opuesto}{lado\ abyacente}$ en un triangulo rectángulo

Definición

Sean L_1 y L_2 dos rectas que se cortan en el punto C.

El ángulo que forma la recta L_1 con L_2 esta definido por la magnitud de la mínima rotación positiva (en el sentido contrario al de las agujas del reloj) alrededor del punto C, necesario para que L_1 coincida con L_2.

Calculo del ángulo que forma L_1 con L_2

Sean L_1 y L_2 rectas no verticales y no paralelas. Demostraremos que el ángulo θ que forma la recta L_1 con L_2 esta dado por la expresión.

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

Donde m_1 y m_2 son las pendientes L_1 y L_2 respectivamente.

Demostración.

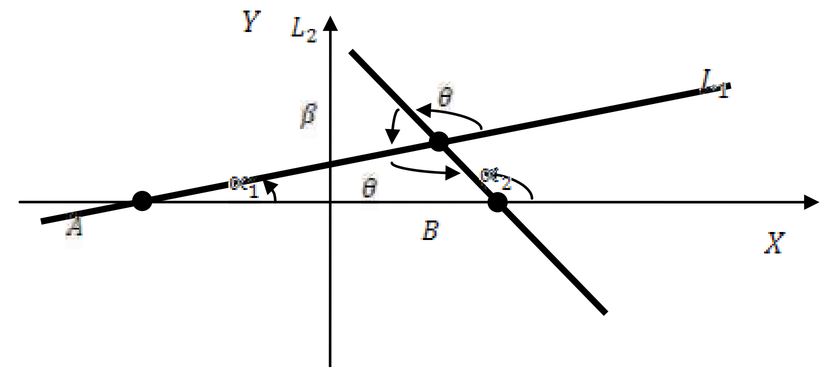
Sean α_1 y α_2 las inclinaciones de L_1 y L_2 respectivamente (ver figura); entonces las respectivas pendientes son m_1 y m_2, donde

$$m_1 = \tan\alpha_1 \qquad \text{Y} \qquad m_2 = \tan\alpha_2$$

$\alpha_2 = \alpha_1 + \theta$ (Ángulo exterior del triángulo ABC)

$\theta = \alpha_2 - \alpha_1$ Entonces $\tan\theta = \tan(\alpha_2 - \alpha_1)$,

$$\tan\theta = \frac{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1}{1 + \tan\alpha_1 \tan\alpha_2} \quad \text{Y} \quad \tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$



Nota: Recuerde que

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)} \quad \text{y} \quad \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)}$$

Observe que el ángulo β que forma L_2 con L_1 es el suplemento de θ; es decir $\beta = \pi - \theta$, $\tan\beta = \tan(\pi - \theta)$

$$\tan\beta = \frac{\tan\pi - \tan\theta}{1 + \tan\pi\tan\theta}, \qquad \tan\beta = \frac{0 - \tan\theta}{1 + 0.\tan\theta}, \qquad \tan\beta = -\tan\theta$$

Por lo tanto, el ángulo β que forma L_2 con L_1 esta dado por

$$\tan\beta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

Condiciones de paralelismo y perpendicularidad.

Recordemos que, por definición, dos rectas son paralelas si tienen la misma inclinación.

Sean L_2 y L_1 rectas no verticales de inclinación y pendiente respectivamente $\alpha_1, m_1, \alpha_1\ y\ m_2$. Demostrar que:

a- $L_2 \parallel L_1 \Leftrightarrow m_1 = m_2$

b- $L_2 \perp L_1 \Leftrightarrow m_1 m_2 = -1 \quad (m_2 = -\frac{1}{m_1})$.

Demostración

a- $L_2 || L_1 \overset{def}{\Leftrightarrow} \alpha_1 = \alpha_2 \xRightarrow{0º \le \alpha_1 \ \ \alpha_2 \le 180º} \tan\alpha_1 = \tan\alpha_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$

b- Sea θ el ángulo que forma L_1 con L_2, $\theta = 90º$ (por definición de rectas perpendiculares) entonces $L_2 \perp L_1 \overset{def}{\Leftrightarrow} \theta = 90º \xRightarrow{0º \le \theta \le 180º} \tan\theta$ no esta definida $\Leftrightarrow 1 + m_1 m_2 = 0 \Leftrightarrow m_1 m_2 = -1$ ó $m_2 = -\frac{1}{m_1}$

Luego, $L_2 \perp L_1 \Leftrightarrow m_2 = -\frac{1}{m_1}$.

Ejemplo:

Sean $A(-1,1), B(3,5), C(2,-2)$ los vértices de un triangulo. Demuestre que dicho triangulo es rectángulo.

Solución

El triangulo ABC será rectángulo si dos de sus lados son perpendiculares y por lo tanto el producto de sus pendientes es -1.

Sean m_{AB}, m_{AC}, m_{BC} las pendientes de los lados AB, AC, BC respectivamente.

Entonces,

$m_{AB} = -\frac{5-1}{3-(-1)} = \frac{4}{4} = 1;$

$m_{AC} = -\frac{-2-1}{2-(-1)} = \frac{-3}{3} = -1;$

$m_{BC} = -\frac{-2-5}{2-3} = \frac{-7}{-1} = 7;$

Como vemos, $m_{AB} \cdot m_{AC} = 1 \cdot (-1) = -1$

Luego $AB \perp AC$ y por tanto el triangulo ABC es rectángulo en A

Observe que no era necesario, en este caso el calculo de la pendiente de BC.

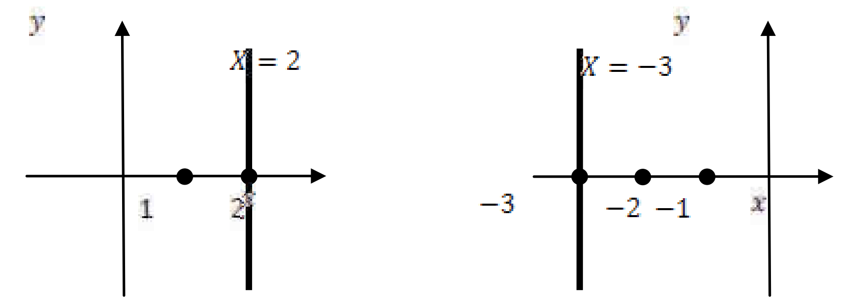
Formas de la ecuación de la línea recta

Sea la ecuación $x = a$ (a es una constante) esta ecuación considerada en el plano XY, significa que la x toma únicamente el valor a, mientras que la y toma cualquier Valor real. Por lo tanto, la solución de la ecuación $x = a$ (considerada en el plano XY) es el conjunto de dos pares ordenados (a, y), para cualquier real y. En consecuencia, la GRAFICA de $x = a$ es una línea recta, paralela al eje Y y separada una distancia de a unidades de aquel.

Recta paralela al eje Y

$x = a$

Las graficas de $x = 2$ y $x = -3$ aparecen en la siguiente figura

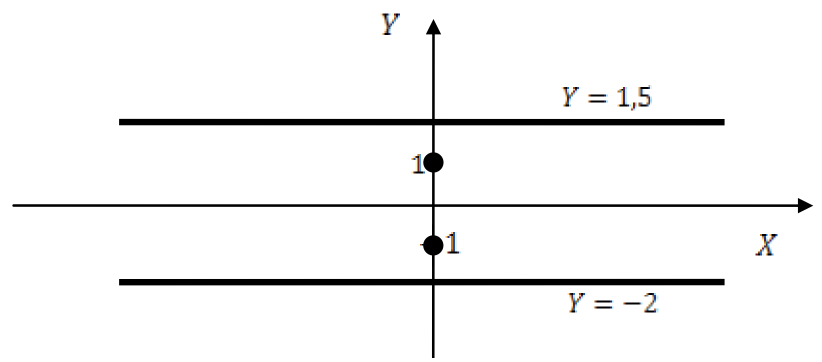


En forma análoga a la anterior, la ecuación $y = b$ (b es una constante) representa una recta paralela al eje X, que está a b unidades de distancia de él.

Recta paralela al eje X

$y = b$

Las graficas de $y = 1{,}5$ y $y = -2$ aparecen en la figura a continuación



Punto y pendiente

Sea L una recta que pasa por el punto dado $P_1(x_1, y_1)$, que tiene pendiente dada m.

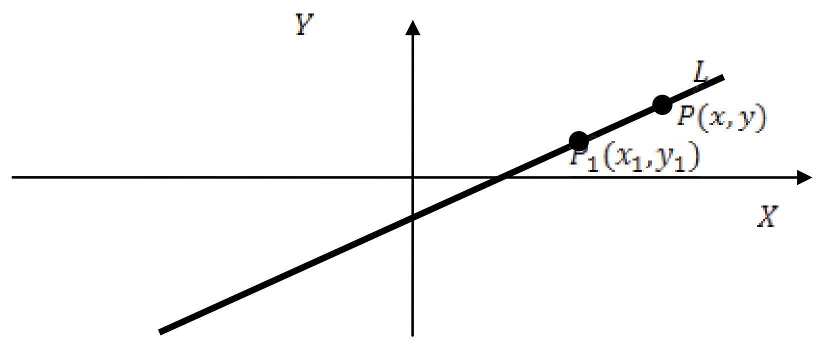
Hallar la ecuación L.

Solución

Sea $P(x, y)$ cualquier punto de L, distinto de P_1. (Ver figura 3)

Entonces

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}, \qquad y - y_1 = m(x - x_1)$$



Ecuación de L, conocidos $P_1(x_1, y_1)$ y su pendiente m

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Las demás formas de la ecuación de la línea recta se derivan de lo anterior, así:

a- Intercepto en el eje Y en el punto $P_1(0, b)$ el cual se conoce; y sea m su pendiente, que también se conoce; entonces, por punto y PENDIENTE, se tiene:

$$y - b = m(x - 0), \quad y = mx + b.$$

Ecuación de L, conocidos su intercepto en el eje Y, $P_1(0, b)$ y su pendiente m

$$y = mx + b$$

b- Dos puntos. Se conocen $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$

Dos puntos de L entonces

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Y por tanto, de la forma PUNTO PENDIENTE se tiene

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Ecuación de L, conocidos dos puntos, $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

c- Interceptos en los dos ejes coordenados.

Se conocen $P_1(a, 0)$ (intercepto en el eje X) y $P_2(0, b)$ (intercepto en el eje Y) distinto del origen.

Entonces,

$$m = \frac{b - 0}{0 - a} = \frac{b}{-a} = \frac{-b}{a}$$

Y por tanto, de la forma PUNTO y PENDIENTE se tienen:

$$y-0=\frac{-b}{a}(x-a), \qquad bx+ay=ab, \qquad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

Esta última expresión suele recibir el nombre de ecuación SIMETRICA o SEGMENTARIA de la línea recta.

Ecuación de L, conocidos los interceptos en los dos ejes coordenados $P_1(a,0)$ (intercepto en el eje X) y $P_2(0,b)$ (intercepto en el eje Y)

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

Ejemplo:

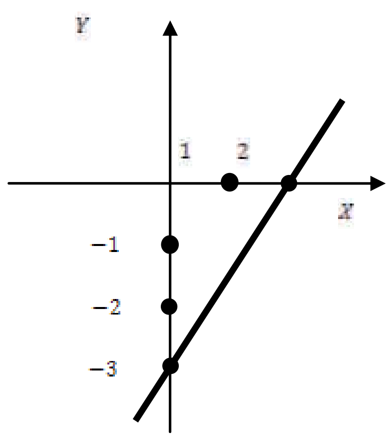
Hallar la ecuación de la recta que corta al eje X a dos unidades de distancia del origen y a su derecha, y al eje Y, lo corta a tres unidades de distancia del origen y debajo de él.

Solución

$a=+2$ Y $b=-3$

Entonces la ecuación pedida esta dada por

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{-3}=1$$



Es decir, $3x-2y-6=0$

Al observar las distintas formas de la ecuación de una línea recta, se concluye que estas se pueden representar mediante la ecuación $Ax+By+C=0$. Llamada ecuación lineal o ECUACION GENERAL DE PRIMER GRADO EN LAS VARIABLES x e y, en la cual A y B no son simultáneamente cero. Esta ecuación general representa una línea recta de pendiente $\frac{-A}{B}$ o una recta vertical, si $B=0$ (verificarlo).

Ejemplo

La ecuación $6x-2y+4=0$ representa una recta.

a- Encuentre la pendiente de dicha recta.

b- Encuentre el punto donde dicha recta corta al eje Y (intercepto con el eje Y).

c- Encuentre el punto donde dicha recta corta al eje X (intercepto con el eje X).

d- Pase la ecuación dada a la forma simétrica.

e- Encuentre un punto P_1 de abscisa 2 sobre dicha recta.

f- Encuentre un punto P_2 de ordenada 5 sobre dicha recta.

g- Encuentre la pendiente de dicha recta, utilizando los puntos P_1 y P_2 hallados en (e) y (f).

h- Haga la grafica de dicha ecuación.

i- Encuentre la ecuación de una recta paralela a la dada y que pase por el origen.

j- Encuentre la ecuación de una recta perpendicular a la dada y que pase por el punto $R(4,2)$.

k- Hallar el punto de intersección de la recta dada con la recta cuya ecuación es $2x-y+1=0$.

Solución

a- $2y=6x+4, \;\; y=3x+2, \;\; m=3$

b- En (a-) vimos que el termino independiente, después de despejar y, es $+2$; por lo tanto, el corte con el eje Y es el punto $P(0,+2)$ otro camino, consiste en hacer en la ecuación dada $x=0$; en tal caso $y=3\cdot 0+2 \quad y=2, \;\; P(0,2)$.

c- La recta corta al eje X donde $y = 0$. Por lo tanto, $6x + 4 = 0$, $x = -\frac{2}{3}$, $Q(-\frac{2}{3}, 0)$

d- Se tiene $6x - 2y + 4 = 0$, $6x - 2y = -4$,

$$\frac{6x - 2y}{-4} = 1, \ \frac{6x}{-4} + \frac{-2y}{-4} = 1, \ \frac{x}{-\frac{2}{3}} + \frac{y}{2} = 1$$

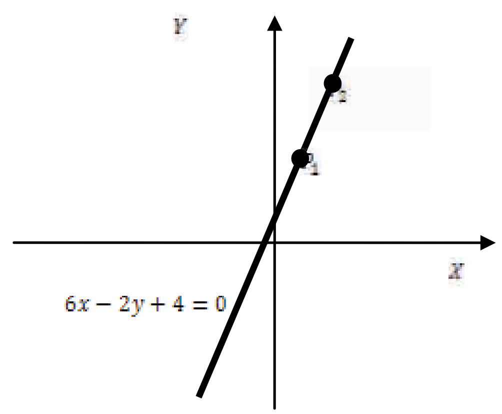
e- Para $x = 2$, $y = 3 \cdot 2 + 2 = 8$, $P_1(2{,}8)$

f- Para $y = 5$, $5 = 3x + 2$, $x = 1$, $P_2(1{,}5)$

g-

$$m = \frac{5-8}{1-2} = \frac{-3}{-1} = 3 \text{ (Es una recta creciente)}$$

h- Para hacer su grafica, por ser una ecuación lineal, basta hacer una tabla de valores, únicamente con dos puntos.



X	2	1
Y	8	5
$Pts.$	$P_1(2{,}8)$	$P_2(1{,}5)$

i- Como la recta pedida es paralela a la recta dada, entonces tienen la misma pendiente y por lo tanto, para la ecuación de la recta pedida conocemos punto y pendiente; es decir $O(0{,}0), m = 3$. Entonces la ecuación de la recta pedida esta dada por $y - 0 = 3(x - 0)$, $y = 3x$ ó $3x - y = 0$

Observe que la ecuación de cualquier recta que pase por el origen es de la forma $y = mx$ (su termino independiente es cero)

j- La pendiente de la recta pedida es $-\frac{1}{3}$ y como pasa por $R(4{,}2)$, entonces su ecuación esta dada por $y - 2 = -\frac{1}{3}(x - 4)$, $x + 3y - 10 = 0$

k- El punto pedido se obtiene resolviendo simultáneamente las dos ecuaciones

$$6x - 2y + 4 = 0 \quad (1)$$

$$2x - y + 1 = 0 \quad (2)$$

$$(1) - (2) \cdot 3: \quad y + 1 = 0, \ y = -1$$

Entonces, en (2) se tiene: $2x = y - 1 = -1 - 1 = -2$, $x = -1$ por lo tanto, las dos rectas se cortan en el punto $Q(-1, -1)$.

3.12 Ejercicios.

1.

(a) Hallar la pendiente de la recta L que pasa por los puntos $A(-\sqrt{3}, 2)$ y $B(0{,}1)$.

(b) Hallar la inclinación de la recta L (Sol. $\alpha = 150º$)

2. Sean L_1 la recta determinada por los puntos $A_1(-1{,}1)$ y $A_2(1{,}3)$ y L_2 la recta determinada por $B_2(5,-3)$ y $B_2(1{,}1)$.

   (a) Hallar las ecuaciones de L_1 y L_2

   (b) Hallar el ángulo que forma L_1 con L_2

   (c) Hallar el punto de intersección de L_1 con L_2

3. Hallar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2+y^2+2x+6y+6=0$ en el punto $(0,-3\pm\sqrt{3})$

4. Sean $A(a_1,b_1), B(a_2,b_2)\ y\ C(a_3,b_3)$ los vértices de un triangulo ABC.

   (a) La recta que une los puntos medios P y Q que los lados AC y BC respectivamente, es paralela al lado AB.

   (b) La longitud del segmento PQ es igual a la mitad de la longitud del lado AB.

5. Demuestre que la distancia d desde el punto $P_1(x_1,y_1)$ hasta la recta cuya ecuación es $Ax+By+C=0$ esta dada por

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

6. Hallar la distancia desde $P_1(1{,}3)$ a la recta $2x+3y-5=0$

7. Los vértices de un triangulo ABC son $A(-3{,}5), B(10{,}5)\,y\ C({}^4/_3, {}^2/_3)$. Hallar:

   (a) La longitud de la altura relativa al lado AB

   (b) La ecuación de la recta que pasa por B y C

   (c) La ecuación de la recta que contiene la mediana relativa al lado de BC

   (d) La ecuación de la mediatriz relativa al lado AC

   (e) La ecuación de la bisectriz del ángulo $\widehat{BCA}$

8. Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto (1,4) y forman con los ejes coordenados triángulos rectángulos de área 9 unidades cuadradas.

9. Hallar el valor de la constante real k, de tal manera que las rectas $5kx+9y=5$ y $3y-2kx=-1$ sean perpendiculares.

10. Dibujar las graficas de las siguientes funciones:

   (a)

$$y=g(x)=\begin{cases}2x+1, & x\geq 1\\ 3x, & x<1\end{cases}$$

   (b) $y=f(x)=x+2+|x-2|$

   (c) $y=|x-3|+1$

   (d)

$$y=f(x)=\begin{cases}5x+3, & si\ x\leq 2\\ x^2+9, & si\ x>2\end{cases}$$

   (e)

$$y=g(x)=\begin{cases}x^2, & si\ x<1\\ 2x+1, & si\ x\geq 1\end{cases}$$

   (f) $f(x)=x-|x|$

   (g) $h(x)=\frac{x}{|x|}$

   (h) $f(x)=x-[\![x]\!]$

11. Sean $Ax+By+C=0$ y $Ax_1+By_1+C_1=0$ ecuaciones lineales que representan la misma recta L. Demostrar que:

$$\frac{A}{A_1}=\frac{B}{B_1}=\frac{C}{C_1}$$

12. Sea $P(x_0, y_0)$ un punto de la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio r. Demuestre que la ecuación de la recta tangente a dicha circunferencia en el punto P, esta dada por $x_0x + y_0y = r^2$.

13. Hallar las siguientes graficas:

(a) $w = \{(x, y): x + y = 1\}$
(b) $w_1 = \{(x, y): x + y \geq 1\}$
(c) $w_2 = \{(x, y): x + y < 1\}$
(d) $w_3 = \{(x, y): |x| + |y| \leq 1\}$

CAPITULO IV: FUNCIONES POLINOMIALES Y FUNCIONES RACIONALES

4.1 Polinomios

Las funciones polinomiales son de las más importantes en matemáticas y una función f se llama polinomial si:

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1x^1 + a_0$$

En donde los coeficientes a_0 , $a_1 \ldots\ldots\ldots a_n$ son números reales y los exponentes son enteros no negativos. Si $a_n \neq 0$ se dice que f es de grado n.

Una función polinomial de grado 1 es una función lineal.

Cuando f es de grado 2 se llama función cuadrática.

Se dice que f es una función cuadrática si:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

En donde a, b, c son números reales y $a \neq 0$

Si $b = c = 0$

Entonces $f(x) = ax^2$

Su grafica es una parábola con vértice en el origen que abre hacia arriba si $a > 0$ y hacia abajo si $a < 0$

Si $b = 0$ y $c \neq 0$

Entonces $f(x) = ax^2 + c$

La gráfica es una parábola con vértice en el punto $(0, c)$ sobre el eje y.

Las consideraciones anteriores se justifican mas adelante cuando se estudie la función cuadrática.

La función cero $f(x) = 0$ es una función polinomial que no tiene grado y no tiene coeficiente principal.

Las funciones polinomiales están definidas en todos los números reales y es muy importante reconocer si una función es polinomial.

Funciones polinomiales de grado bajo y sin grado

Nombre	Forma	Grado
Función cero	$f(x) = 0$	No definido
Función constante	$f(x) = a, \ (a \neq 0)$	0
Función lineal	$f(x) = ax + b, \ (a \neq 0)$	1
Función cuadrática	$f(x) = ax^2 + bx + c$	2

4.2 Funciones lineale

Por definición una función lineal es una función de la forma $\boldsymbol{f(x) = ax + b}$ donde $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son constates y $\boldsymbol{a \neq 0}$. Si se utiliza $\boldsymbol{m}$ en lugar de **a** para el coeficiente principal y se hace $\boldsymbol{y = f(x)}$ la ecuación se transforma en la ecuación conocida de la recta pendiente $\boldsymbol{y = mx + b}$.

Ejemplo:

Escriba una ecuación para la función lineal f tal que $f(-4) = 2$ y $f(-3) = -4$

Se busca una recta que pase por los puntos $(-4,2)$ y $(-3,-4)$ cuya pendiente es:

$$m = \frac{-4-2}{-3+4} = -6 \ ;$$

$$m = -6$$

Se utiliza la ecuación de la recta punto pendiente:

$$y + 4 = -6(x + 3)$$
$$y + 4 = -6x - 18$$
$$y = -6x - 22$$
$$f(X) = -6X - 22$$

Ejemplo:

Encuéntrese la ecuación de la recta que pasa por el punto $(2,4)$ y cuya pendiente es:

$m = \frac{-3}{4}$, ¿Dónde corta esta recta el eje X? ¿Dónde corta al eje Y? ¿Dónde corta a la recta $X = 3$?

Utilizando la ecuación punto-pendiente $Y - Y_1 = m(X - X_1)$ con $(X, Y) = (2,4)$ y $m = \frac{-3}{4}$

Entonces: $y - 4 = \frac{-3}{4}(x - 2)$

$$y = \frac{-3}{4}x + \frac{3}{2} + 4 = \frac{-3}{4}x + \frac{11}{2}$$
$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{11}{2}$$

Para saber dónde corta al eje X hacemos $Y = 0$ en la ecuación $Y = -\frac{3}{4}x + \frac{11}{2}$

$$\frac{3}{4}x = \frac{11}{2}$$
$$x = \frac{22}{3}$$

Esto muestra que la recta corta al eje x en el punto $\left(\frac{22}{3}, 0\right)$

Para hallar donde corta al eje Y, se hace $X = 0$ en la ecuación $Y = -\frac{3}{4}x + \frac{11}{2}$, despejando Y entonces:

$$Y = -\frac{3}{4}(0) + \frac{11}{2} = \frac{11}{2}$$

Esto significa que la recta corta al eje Y en el punto $\left(0, \frac{11}{2}\right)$

Para averiguar dónde corta la recta dada a la recta $X = 3$ hacemos $X = 3$ en la ecuación $Y = -\frac{3}{4}x + \frac{11}{2}$ y despejamos Y entonces:

$$Y = -\frac{3}{4}(3) + \frac{11}{2} = \frac{-9}{4} + \frac{11}{2} = \frac{13}{4}$$

Por tanto las coordenadas del punto de intersección son $(X, Y) = \left(3, \frac{13}{4}\right)$

4.3 Ecuación lineal general

Las ecuaciones $6x + 3y = 10$, $7x = -2$, y $6y = 18$ tienen la forma $Ax + By = C$

Para valores particulares de A, B, C.

Cualquier ecuación pendiente-ordenada en el origen $Y = mx + b$ puede escribirse de la forma $Ax + By = C$ ordenándola de la siguiente manera:

$$mx - y = b$$

La ecuación anterior tiene la forma $Ax + By = C$ con $A = m, B = -1$ y $C = b$

La ecuación lineal general es $Ax + By = C$ donde A, B, C son constantes y A y B no son simultáneamente cero.

Ejemplo:

Hállese la pendiente y la ordenada en el origen de la recta $6X + 3Y = 15$

Solución:

Primero despejamos Y en la ecuación $6X + 3Y = 15$ para obtener la forma pendiente-ordenada de la recta $Y = -\frac{6}{3}x + \frac{15}{3}$, entonces $Y = -2x + 3$

La pendiente es $m = -2$ y la ordenada en el origen es $b = 5$.

4.4 Representación grafica

Un método rápido para representar una recta que corta ambos ejes es hallar sus intersecciones, señalarlas en los ejes y trazar la recta que pasa por los puntos señalados (si la recta para por el origen es de la forma $y = mx$). Se determina su grafica dando un valor a x y se obtiene y y la recta para por $(0,0)$ y el punto obtenido.

Ejemplo:

Represéntese la recta $3x + 5y = 20$

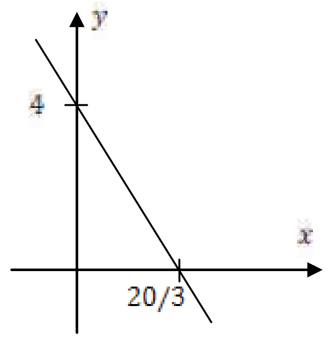
Solución:

1. Hállese el punto de intersección x haciendo $y = 0$, con lo que se obtiene $3x = 20$,

$$x = \frac{20}{3}$$

2. Hállese el punto de intersección Y haciendo $X = 0$ con lo que se obtiene $5y = 20$ entonces $Y = 4$

3. Márquese las intersecciones y trácese la recta como se muestra en la figura:



Gráfica de la recta $3x + 5y = 20$

En el siguiente cuadro se presentan las formulas mas importantes de la recta

FORMULAS IMPORTANTES	
$x = a$	Recta vertical que pasa por (a,b), $b \in R$
$Y = b$	Recta horizontal que pasa por (a,b), $a \in R$
$Y = mx + b$	Ecuación pendiente ordenada
$Y - Y1 = m\,(X - X1)$	ecuación punto pendiente
$AX + BY = C$	ecuación lineal general

Otra propiedad que caracteriza a la función lineal es su tasa (razón) de cambio. La tasa promedio de cambio para una función $y = f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$, con a$\neq b$ es:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Una función definida sobre todos los números reales es una función lineal si y solo si tiene una tasa promedio de cambio constante entre cualquier dos puntos de su gráfica.

La tasa de cambio de la función lineal es constante y la pendiente m en la formula $f(x) = mx + b$ es la tasa de cambio de la función lineal.

4.5 Ejercicios:

Resuelva para x las siguientes ecuaciones

1. $12x - 7 = 23$
2. $4x + 9 = 13 - 2\,(x + 3)$
3. $\frac{2}{3}x - 4 = \frac{5}{7}$
4. $7x + 5 = 26$
5. $\frac{1}{2}x + 5 = 10 - \frac{1}{3}x$
6. $6\,(7x + 1) = 21\,(1 - 3x)$
7. $2x + 3 = x - 4\,(5 - x) + 1$
8. $(x + 0.6)\,(x - 0.25) = (x - 0.15)\,(x + 0.4)$
9. $(x + 1)\,(x - 2) = x2 - 3\,(x - 4)$
10. $\frac{3}{5}\left(\frac{x}{5} - \frac{7}{4}\right) + 2 = \frac{7x}{10} + 11$
11. $8x - 2\,(x + 3) = 3x$
12. $3\,(1 - 2x) + 8\,(2x - 5) = 150$

Escríbase la ecuación de la recta determinada por el punto y la pendiente dados, y represéntese después la recta.

1. $(-1, 1), m = -1$
2. $(a, 0), m = -3$
3. $(0, b), m = 1$
4. $(-1, 1), m = 1$
5. $(1, 1), m = 1$
6. $(1, 1), m = -1$
7. $(3, 2), m = 3$
8. $(1, 2), m = 2$
9. $(2, 3), m = -2$

10. $(3,3), m = 1$

Hállese la ecuación de la recta determinada por los puntos dados.

1. (1, 1), (1, 2)
2. (0, 0) , (1 , 2)
3. (2, -1), (-2, 3)
4. $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(\sqrt{5}, \sqrt{5})$
5. (1, 2), (3 , 4)
6. (-3 , 4) , (5 , 1)
7. (1 , 19 , (3 , 2)
8. (2 , 1) , (1 , 5)
9. (1 , 1) , (2 , 5)
10. (2 , 5) , (1 , 1)

Hállese la pendiente y las intersecciones de la recta con los ejes, represéntese la recta

1. $y = 4x + 5$
2. $x + y = 4$
3. $x - 2y = 4$
4. $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$
5. $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = -1$
6. $\frac{2x}{5} - \frac{y}{3} = 1$
7. $2y = 3x + 5$
8. $3x + 4y = 12$
9. $x = 2y - 5$
10. $x - 4y = 8$

Hállese la ecuación de la recta con la pendiente y la ordenada al origen dada

1. $m = 3, b = -4$
2. $m = 4, b = \sqrt{2}$
3. $m = 5, b = 2.5$
4. $m = -1, b = 2$
5. $m = 2, b = 2$
6. $m = -\frac{1}{2}, b = -3$
7. $m = \frac{1}{3}, b = -1$
8. $m = \frac{1}{4}, b = 1$
9. $m = \frac{1}{5}, b = 2$
10. $m = 1, b = 3$

4.6 La función cuadrática

Una función cuadrática es una función polinomial de grado 2

La gráfica de una función cuadrática $f(x) = x^2$ es una parábola que se abre hacia arriba.

La gráfica de cualquier función cuadrática puede obtenerse a partir de $f(x) = x^2$, mediante una sucesión de traslaciones, reflexiones, alargamientos, y compresiones.

Cualquier función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ puede escribirse en la forma del vértice o forma normal que se obtiene de la ecuación:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Factorizando a $f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$

$$f(x) = a\,(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2})$$

$$f(x) = a\,(x + \frac{b}{2a})^2 + a(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2})$$

$$f(x) = a\,(x + \frac{b}{2a})^2 + (c - \frac{b^2}{4a})$$

$f(x) = a\,(x + \frac{b}{2a})^2 + (\frac{4ac - b^2}{4a})$ Entonces,

Haciendo $h = \frac{-b}{2a}$ $y\ k = \frac{4ac - b^2}{4a}$

Se obtiene la ecuación estándar de la parábola (eje vertical):

$$f(x) = a(x-h)^2 + k$$

$$y - k = a(x-h)^2$$

La fórmula $h = -\frac{b}{2a}$ y $k = \frac{4ac - b^2}{4a}$ es útil para localizar el vértice y el eje de la parábola asociada a una función cuadrática.

Si $a > 0$, como $(x-h)^2 \geq 0$ entonces:

$$f(x) = a\,(x - h)2 + k \geq k$$

Y $f(x) = k$ si $x = h$ entonces $f(x)$ toma su valor mínimo cuando $x = h$ de la misma forma si $a < 0$ en $f(x) = a(x-h)^2 + k \leq k$ y $f(x) = k$ si solo si $x = h$ entonces $f(x)$ tiene su valor máximo cuando $x = h$ lo que implica que (h, k) es el vértice.

Si $a > 0$ la parabola abre hacia arriba y si $a < 0$ la parábola abre hacia abajo.

La función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ donde $f(x) = 0$ puede resolverse por los siguientes métodos:

1. Por factorización
2. Por completación de cuadrados
3. Por la formula

La solución por factorización se fundamenta en el principio que establece que si el producto de dos o más factores es igual a cero, uno o más factores deben ser igual a cero.

Ejemplo:

Resolver la ecuación $x^2 - x = 12$

Solución:

Transponiendo términos tenemos: $x^2 - x - 12 = 0$

Factorizando: $(x - 4)\,(x + 3) = 0$

Entonces: $x - 4 = 0$ y $x + 3 = 0$

La solución es $x = 4$ y $x = -3$

Ejemplo:

Resolver la ecuación $x\,(x - 2)\,(x + 3)\,(x + 4) = 0$

Solución:

cada factor es igual a cero entonces

$x = 0,$ $x - 2 = 0,$ $x + 3 = 0,$ $x + 4 = 0$

$x = 0,$ $x = 2,$ $x = -3,$ $x = -4$

Solución por completacion de cuadrado

Si a una expresión de la forma $x^2 + px$ le adicionamos el termino $(\frac{1}{2}p)^2$ o $\frac{1}{4}p^2$ y completamos el trinomio cuadrado perfecto como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo:

Resolver $x^2+8x=9$

Solución:

Completando el cuadrado en el primer miembro y adicionándolo al segundo se tiene:

$$x^2+8x+16=9+16=25$$

$$(x+4)^2=25$$

Extrayendo raíz cuadrada a ambos miembros de la ecuación

Nos queda: $x+4=\pm 5$ entonces $x=-4\pm 5$; $x=1$; $x=-9$

Solución por medio de la fórmula de la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$

Dada $ax^2+bx+c=0$ transponiendo términos:

$ax^2+bx=-c$ Ahora dividiendo por a

$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{-c}{a}$ Completando cuadrado

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{-c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{-4ac}{(2a)^2}+\frac{b^2}{(2a)^2}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{(2a)^2}$$

Extrayendo raíz cuadrada a cada lado de la ecuación

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Transponiendo términos:

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Que es la fórmula de la ecuación cuadrática:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

El término (b^2-4ac) se dice discriminante y el carácter de las raíces depende de su valor:

i. Si $(b^2-4ac)>0$ se tiene X_1 y X_2 soluciones reales y distintas la parábola cruza el eje X en $(X_1,0)$ y en $(X_2,0)$

ii. Si $(b^2-4ac)=0$ hay entonces una sola solución real $X_1=X_2=X=\frac{-b}{2a}$ el vértice está en el eje X en $(X,0)$.

iii. i $(b^2-4ac)<0$ entonces no hay soluciones reales la parábola no cruza el eje X.

Ejemplo:

Graficar $f(x)=x^2-2x-3$

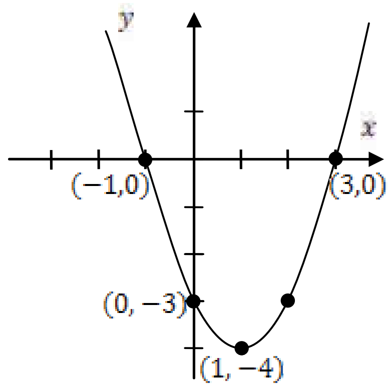
Solución: como $a=1>0$ se ve que la parábola se abre hacia arriba, de $f(0)=-3$ se obtiene el cruce con el eje y en $(0,-3)$. Para ver si hay intersecciones con el eje x, se resuelve $x^2-2x-3=0$ factorizando:

$$(x+1)(x-3)=0,$$

Y se ve que las soluciones son $x=-1$ y $x=3$. Los cruces con el eje x están en $(-1,0)$ y en $(3,0)$. Para ubicar el vértice se completa el cuadrado:

$$f(x)=(x^2-2x+1)-1-3=(x^2-2x+1)-4.$$

De esta manera llegamos a la forma normal, que es $f(x)=(x-1)^2-4$. Si $h=1$ y $k=-4$, la conclusión es que el vértice esta en$(1,-4)$. Con esta información trazamos una parábola que pase por esos cuatro puntos, como se ve en la figura.



Una ultima observación. Al ubicar el vértice, en forma automática se determina el contra-dominio de una función cuadrática. En este ejemplo, $y = -4$ es el numero menor del contra-dominio de f, por lo que el contra-dominio de f es el intervalo $[-4, \infty)$ e el eje y.

Ejemplo:

Grafica $f(x) = -4x^2 + 12x - 9$.

Solución: la grafica de esta función cuadrática es una parábola que se abre hacia abajo, por que $a = -4 < 0$. Para completar el cuadrado se comienza sacando a -4 como factor común de los dos términos en x:

$$f(x) = -4x^2 + 12x - 9$$

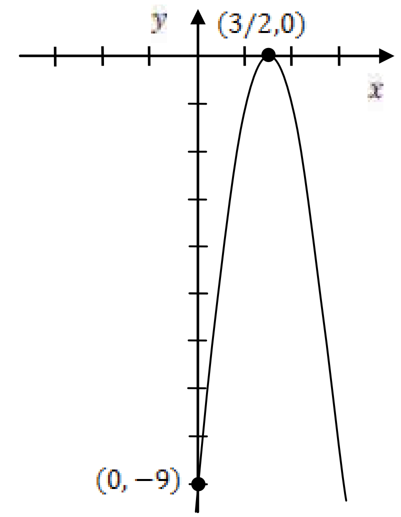
$$= -4(x^2 - 3x) - 9$$

$$= -4\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}\right) - 9$$

$$= -4\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) - 9 + 9$$

$$= -4\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right)$$

Entonces, la forma normal es $f(x) = -4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$. Con $h = \frac{3}{2}$ y $k = 0$, se ve que el vértice esta en $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$. El cruce con el eje y esta en $(0, f(0)) = (0, -9)$. Al resolver $-4x^2 + 12x - 9 = 0$ se ve que solo hay un cruce con el eje x, en $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$, naturalmente eso era de esperarse, por que el vértice $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ esta en el eje x. Como se ve en la figura, se puede obtener un esquema aproximado solo con estos dos puntos. La parábola es tangente al eje x en $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.



Ejemplo:

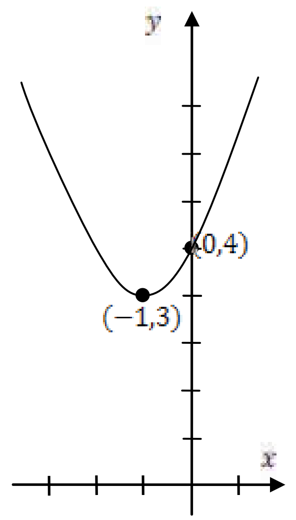
Graficar $f(x) = x^2 + 2x + 4$

Solución: la grafica es una parábola que se abre hacia arriba, por que $a = 1 > 0$. Para fines de ilustración, esta vez se usará la ecuación (4), para determinar el vértice. Con $b = 2, -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2} = -1$, y

$$f(-x) = (-1)^2 + 2(-1) + 4 = 3,$$

El vértice está en $(-1, f(-1)) = (-1,3)$. Ahora, el cruce con el eje y está en $(0, f(0)) = (0,4)$, pero la fórmula cuadrática indica que la ecuación $f(x) = 0$, ó

$x^2 + 2x + 4 = 0$ no tiene soluciones rales. En vista de lo anterior, la grafica no tiene intersección con el eje x. Como el vértice esta arriba del eje x y la parábola se abre hacia arriba, la grafica debe estar toda arriba del eje x. Véase la figura.



Ejercicio

Resolver $6x^2 - 7x - 5 = 0$

Aplicando la ecuación $a = 6$; $b = -7$ y $c = -5$ entonces

$$b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4(6)(-5) = 169$$

Sustituyendo en la fórmula:

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{169}}{(2)(6)} = \frac{7 \pm 13}{12}$$

$$X = \frac{5}{3} \text{ y } x = \frac{-1}{2}$$

4.7. Ejercicios

Resolver aplicando la fórmula de la ecuación cuadrática

1. $5x^2 = 3x + 2$
2. $5y^2 = 4y + 12$
3. $2x^2 + 3x = 2$
4. $18y^2 + 9y - 2 = 0$
5. $3x^2 + 5x = 2$
6. $2t^2 - 8 = 3t + 12$
7. $x(x + 2) = 1$
8. $4x^2 - 12x + 1 = 0$
9. $3x^2 = 7x + 6$
10. $3t^2 = 25(t + 2)$

Usando el discriminante, establecer cuando las raíces de las siguientes ecuaciones son reales o imaginarias

1. $x^2 - 6x - 3 = 0$
2. $3x^2 + 8x = 4$
3. $x^2 - 3x - 6 = 0$
4. $5x^2 + 2x - 3 = 0$
5. $6x^2 + x = 1$
6. $6x^3 + 2x + 8$
7. $x^2 - 4x + 1 = 0$
8. $x^2 - 7x = 12$
9. $x^2 = 6x + 2$
10. $x^2 + 8x + 1 = 0$
11. $5x = 8 - x^2$
12. $2x^2 + 13x + 2 = 0$
13. $15 = 6x - 3x^2$

4.8 Gráficas de funciones polinomiales de grado mayor que 2

Sea f una función polinomial de grado n entonces $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x^1 + a_0$

Para $a_n \neq 0$ el dominio de f son los reales (R), si el grado es impar el contra dominio o recorrido de f también son los reales pero si el grado es par entonces el contra-dominio es un intervalo infinito de la forma $(-\infty, a)$ o bien (a, ∞).

4.9 Ceros de una función

Los ceros de una función $f(x)$ son los valores de x tal que $f(x) = 0$, si $x = c$ entonces $f(c) = 0$, se dice que c es un cero de la función, también se conoce a c como una solución o raíz de la ecuación $f(x) = 0$.

Los ceros de $f(x)$ son las intersecciones en el eje x de la gráfica de $f(x)$

Ejemplo:

$f(x) = x^3 - 8$

$f(2) = 2^3 - 8 = 0$

$x = 2$ Es un cero de la función

También $x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$

En general $x^3 - b^3 = (x - b)(x^2 + bx + b^2)$

$x^3 + b^3 = (x + b)(x^2 - bx + b^2)$

Ejemplo:

Encontrar los ceros de la función $f(x) = 3x^2 + x - 10$

$0 = 3x^2 + x - 10$

$(3x - 5)(X + 2) = 0$

$x = \frac{5}{3}$ y $x = -2$ son ceros de la función.

Las gráficas de las funciones polinomiales de grado 1 son rectas.

Las gráficas de las funciones polinomiales de grado 2 son parábolas.

Si una función polinomial es de grado cero entonces $f(x) = a$ para algún número real a, diferente de cero y la gráfica es una recta horizontal.

Las funciones cubicas de la forma $ax^3 + bx^2 + cx + d$ tienen como dominio y como recorrido el conjunto de los números reales, para graficar estas funciones hay que elaborar una tabla de valores y representar cada par de valores en el plano cartesiano.

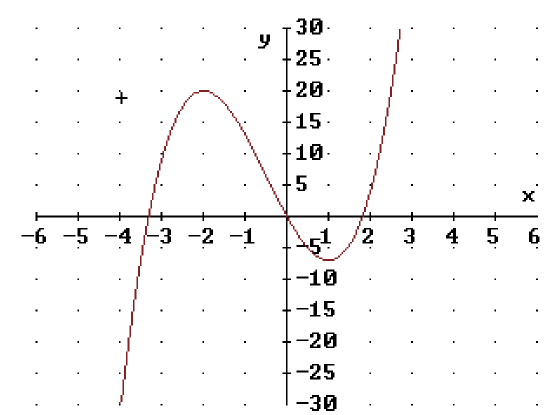
Ejemplo:

Grafique y obtenga el dominio y el recorrido de la función $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$

Se generará una tabla de valores, se graficará y verificará dominio y recorrido de la función.

X	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-32	9	20	13	0	-7	4	45

Tabla de valores de la función $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$



D: $\Re$ R: $\Re$

Grafica de la función $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$

Ejemplo:

Representar la función $f(x) = x^3 - 3x + 2$

El dominio de esta función son los números reales por ser polinómica.

Los puntos de corte con los ejes son:

Como es una función polinómica de grado 3 puede cortar el eje x a lo más 3 puntos.

Para hallar los puntos de corte con el eje x igualamos la función a cero $f(x) = 0$ y la descomponemos en sus factores.

$(x+2)$ Es un factor porque al remplazar $x = -2$ en la ecuación nos da un cero (teorema del factor).

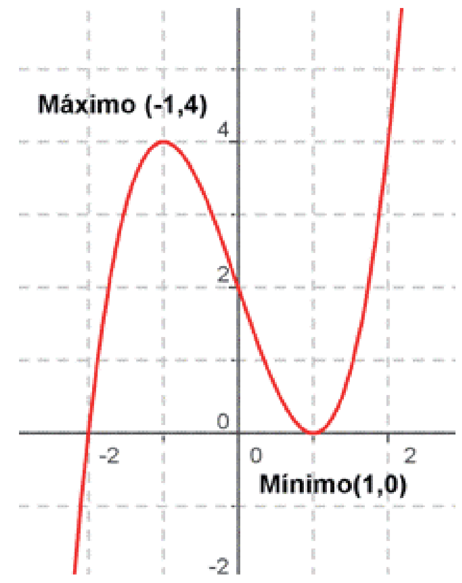
Dividiéndola entre este factor queda $(x^2 - 2x + 1)$ que es el otro factor, entonces:

$$\begin{aligned} f(x) = x^3 - 3x + 2 &= (x+2)(x^2 - 2x + 1) \\ &= (x+2)(x-1)2 \end{aligned}$$

Los puntos de corte con el eje x son $(-2,0)$ y $(1,0)$

Para hallar el punto de corte con el eje y hacemos $x = 0$ y resolvemos y nos da $(0,2)$

Haciendo una tabla de valores nos queda la gráfica:

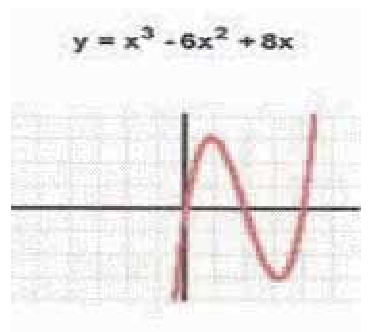


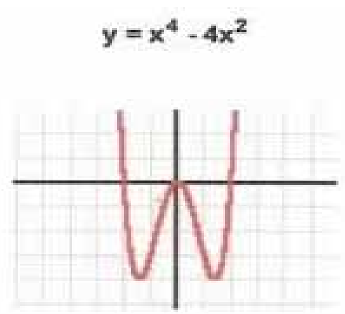
4.10 Ejercicios

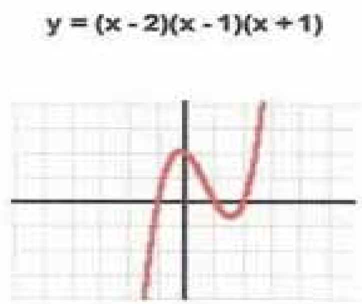
Grafique y obtenga dominio y recorrido de las siguientes funciones cubicas.

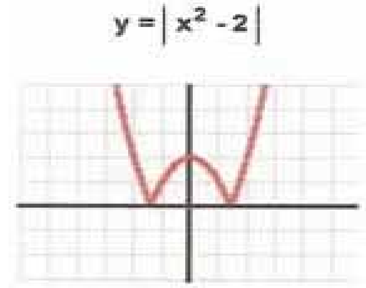
1. $f(x) = 3x^2 - 2x^3 - 1$
2. $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x$
3. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6x + 5$
4. $f(x) = x^3 + 2$
5. $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$
6. $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

Graficas de algunas funciones polinomiales de grado mayor que 2.



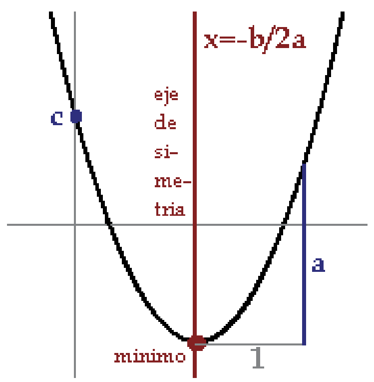


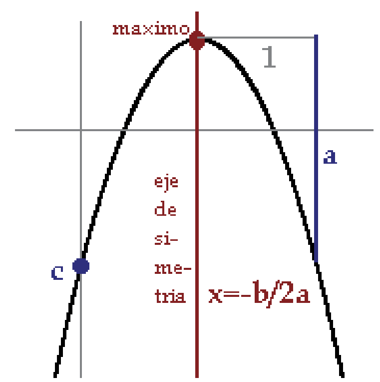




4.11 Teorema del valor intermedio para funciones polinomiales

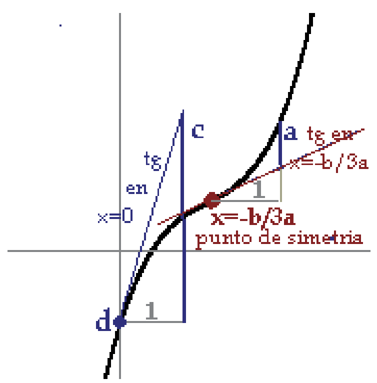
"Si f es una función polinomial y $f(a) \neq f(b)$ para $a < b$ entonces f toma todos los valores entre $f(a)$ y $f\ (b)$ en el intervalo $[a, b]$"

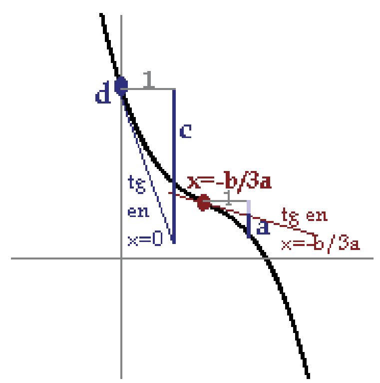




Gráfica 1 $f(x) = ax^2 + bx + c$ Gráfica 2 $f(x) = ax^2 + bx + c$

Con $a > 0$ Con $a < 0$





Gráfica 3

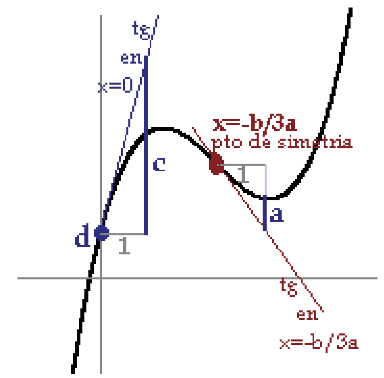
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

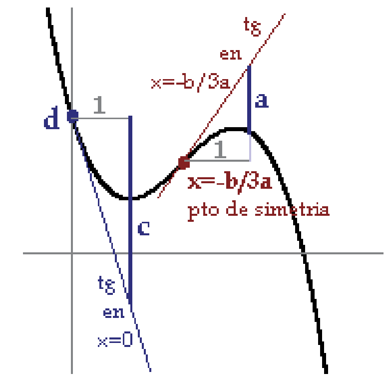
Con $b^2 - 3ac \leq 0$ y $a > 0$

Gráfica 4

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Con $b^2 - 3ac \leq 0$ y $a < 0$





Gráfica 5

$f(x) = ax3 + bx2 + cx + d$

Con $b^2 - 3ac > 0$ y $a > 0$

Gráfica 6

$f(x) = ax3 + bx2 + cx + d$

Con $b^2 - 3ac > 0$ y $a < 0$

4.12 Teorema fundamental del algebra

"Si un polinomio $f(x)$ tiene grado positivo y coeficientes complejos, entonces $f(x)$ tiene al menos una raíz compleja"

4.13 Teorema del factor

"El teorema del factor establece que un polinomio $f(x)$ tiene un factor $(x - k)$ si y solo si k es una raíz de $f(x)$, es decir $f(k) = 0$.

El teorema del factor sirve para encontrar los factores de un polinomio.

Se puede ilustrar con el siguiente ejemplo:

Si se desea encontrar los factores de $x^3 + 7x^2 + 8x + 2$ entonces se intenta con un primer factor $(x - a)$ si el resultado de sustituir a en el polinomio es igual a cero se sabe que hay un factor.

Primero se intenta con el factor $(x - 1)$ remplazando $a = 1$ en la ecuación $x^3 + 7x^2 + 8x + 2 = 1^3 + 7(1)^2 + 8(1) + 2 = 18$ entonces $(x - 1)$ no es un factor.

Ahora si se hace $(x + 1)$ entonces $x = -1$ remplazándolo en la ecuación $x^3 + 7x^2 + 8x + 2 = (-1)^3 + 7(-1)^2 + 8(-1) + 2 = 0$ entonces $(x + 1)$ es un factor de $x^3 + 7x^2 + 8x + 2$

Dividiéndolo directamente $\frac{x^3 + 7x^2 + 8x + 2}{(x + 1)} = x^2 + 6x + 2$

Al combinar el teorema fundamental del algebra con el teorema del factor nace el siguiente corolario:

"Todo polinomio de grado positivo tiene un factor de la forma $(x - c)$ en donde c es un numero complejo"

El corolario nos permite expresar por lo menos en teoría que todo polinomio $f(x)$ de grado positivo, como un producto de polinomios de grado 1.

Aplicando el corolario se obtiene:

$$f(x) = (x - c_1)f_1(x)$$

Donde c_1 es un número complejo y $f_1(x)$ es un polinomio de grado $n - 1$.

Si $n - 1$ es mayor que cero es posible aplicar nuevamente el corolario, hasta que se obtenga: $f(x) = a(x - c_1)(x - c_2)(x - c_3) \ldots\ldots (x - c_n)$ En donde cada número complejo C_j es una raíz de $f(x)$ y a es su coeficiente principal.

Entonces se ha comprobado el siguiente teorema:

"Si $f(x)$ es un polinomio de grado $n > 0$, entonces existen n números complejos $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tales que: $f(x) = a(x - c_1)(x - c_2)(x - c_3)\ldots\ldots(x - c_n)$ en donde a es el coeficiente principal de $f(x)$, cada número c_j es una raíz de $f(x)$"

Corolario: Un polinomio de grado $n > 0$ tiene cuando mucho n raíces complejas diferentes.

Si $f(x)$ es un polinomio de grado $n > 0$, y si la raíz de multiplicidad m se considera m veces, entonces $f(x)$ tiene precisamente n raíces.

4.14 Regla de los signos de descartes

Si $f(x)$ es un polinomio con coeficientes reales y términos constantes diferentes de cero, entonces:

i) El número de soluciones reales positivas de la ecuación $f(x) = 0$ es igual al número de variaciones de signo de $f(x)$, o es igual a este número menos un entero par.

ii) El número de soluciones reales negativas de la ecuación $f(x) = 0$ es igual al número de variaciones de signo de $f(-x)$, o es igual a este número menos un entero par.

Ejemplo:

Determinar el número de posibles soluciones reales positivas y negativas de la ecuación: $f(x) = 8x^5 - 5x^4 + 2x^2 + 6x - 2 = 0$

Solución: como el polinomio $f(x)$ tiene tres variaciones de signos la ecuación tiene tres soluciones reales positivas o una sola.

Como $f(-x) = -8x^5 - 5x^4 + 2x^2 - 6x - 2 = 0$ tiene dos variaciones de signos entonces la ecuación dada tiene dos soluciones reales negativas o ninguna.

Las soluciones que no son números reales son complejos de la forma $a + bi$ en donde a y b son reales con $b \neq 0$ en la siguiente tabla se resumen las distintas posibilidades de solución:

Numero de soluciones reales positivas	1	1	3	3
Numero de soluciones reales negativas	0	2	0	2
Numero de soluciones no reales complejas	4	2	2	0
Número total de soluciones	5	5	5	5

Posibles soluciones a la ecuación

$$f(x) = 8x^5 - 5x^4 + 2x^2 + 6x - 2 = 0$$

La regla de Descartes estipula que el termino constante sea diferente de cero si el termino constante es nulo como en la ecuación: $f(x) = 8x^5 - 5x^4 + 2x^2 + 6x = 0$ entonces se factoriza la x quedando: $x\,(8x^4 - 5x^3 + 2x^1 + 6) = 0$ en este caso $x = 0$ es una solución y se puede aplicar la regla de Descartes a $8x^4 - 5x^3 + 2x^1 + 6 = 0$

Ejemplo.

Discutir la naturaleza de las raíces de la ecuación: $7x^5 + 3x^3 + 2x - 5 = 0$

Solución: como el polinomio tiene una variación de signo por el teorema de Descartes existe únicamente una raíz real positiva y como $f(-x)$ no tiene variación de signos no hay raíces reales negativas, entonces la ecuación tiene una raíz real positiva y cuatro raíces complejas.

Cuando se aplica la regla de Descartes las raíces de multiplicidad k se consideran como k raíces, por ejemplo dado que $x^2 - 2x + 1 = 0$ el polinomio tiene dos variaciones de signo por lo cual la ecuación tiene dos raíces reales positivas o ninguna, la ecuación en forma factorizada es $(x-1)^2 = 0$ entonces tiene la raíz 1 de multiplicidad 2

4.15 Operaciones con polinomios

Suma y resta de polinomios

Si se trata de polinomios enteros (aquellos que tienen coeficientes pertenecientes a los enteros) se opera entre ellos simplificando sus términos semejantes.

Si se trata de polinomios racionales (aquellos que tienen coeficientes ϵ Q) las fracciones deben sumarse de forma análoga a las fracciones aritméticas, aplicando el MCM (mínimo común múltiplo).

Ejemplo:

$$\frac{x-2}{4} + \frac{3x+2}{6} = \frac{3(x-2)+2(3x+2)}{12} = \frac{3x-6+6x+4}{12} = \frac{9x-2}{12}$$

4.16 Multiplicación de polinomios

Dos o más polinomios se multiplican aplicando la propiedad distributiva, es decir multiplicando cada término del primer polinomio con cada uno de los términos del segundo polinomio teniendo en cuenta la ley de los signos y al final reduciendo los términos semejantes.

Ejemplo:

$$(4x + 3)(2x - 1) = 8x^2 - 4x + 6x - 3 = 8x^2 + 2x - 3$$

4.17 División de polinomios

La división de polinomios normalmente se expresa como una fracción algebraica simplificando en lo posible las expresiones por las distintas formas de la factorización o cocientes notables.

Ejemplo:

$$\frac{3a^2x + 2a^2 - 3b^2x - 2b^2}{2a - 3bx - 2b + 3ax} = \frac{(3x+2)(a^2-b^2)}{(a-b)(3x+2)} = (a + b)$$

4.18 Algoritmo de la división para polinomios

"Si $f(x)$ y $g(x)$ son polinomios y si $g(x) \neq 0$, y $grad\ de\ f(x) \geq grad\ de\ g(x)$ entonces existen polinomios únicos $q(x)$ y $r(x)$ tales que $f(x) = g(x)\,q(x) + r(x)$ en donde $r(x) = 0$ ó bien el grado de $r(x)$ es menor que el de $g(x)$. El polinomio $q(x)$ se llama cociente y $r(x)$ se llama residuo de la división de $f(x)$ entre $g(x)$"

4.19 Teorema del residuo o resto

"Si un polinomio $f(x)$ es divisible entre $x - c$, entonces el residuo es $f(c)$"

4.20 Teorema del factor

Un polinomio $f(x)$ tiene un factor $x - c$ si y solo si $f(c) = 0$

4.21 División de polinomios algebraicos

Es el método general de la división. Sea $P(x)$ un primer polinomio y sea $Q(x)$ un segundo polinomio, en la división $\frac{P(x)}{Q(x)}$ llámese a $P(x)$ dividendo y a $Q(x)$ divisor, y cociente al resultado de la división exacta y residuo es lo que sobra que es indivisible.

Para dividir dos polinomios algebraicos se siguen los siguientes pasos:

Se ordena el dividendo y el divisor con relación a una misma letra

Se divide el primer término del dividendo entre el primero termino del divisor y se obtiene el primer término del cociente.

Este primer término del cociente se multiplica por todo el divisor y el producto se resta del dividendo, para lo cual se le cambia el signo escribiendo cada término debajo de su semejante, si algún término de este producto no tiene término semejante en el dividendo se escribe en el lugar que le corresponda de acuerdo con la ordenación del dividendo y el divisor.

Se divide el primer término del resto entre el primer término del divisor y el producto se resta del dividendo cambiando los signos.
Se divide el primer término del segundo resto entre el primero del divisor y se efectúan las operaciones anteriores y así sucesivamente hasta que el residuo sea cero o de menor grado que el divisor.

Ejemplo:

Dividir $x^2 + 15 - 8x$ entre $3 - x$

Solución: ordenando los términos se obtiene: $x^2 - 8x + 15$ entre $-x + 3$

$$x^2 - 8x + 15 \ \underline{|- x + 3}$$

$$\underline{-x^2 + 3x} \qquad -x + 5$$

$$-5x + 15$$

$$\underline{+5x - 15}$$

$$0$$

Prueba: En toda división se cumple que: dividendo = divisor x cociente + residuo

$$(-x + 5)(-x + 3) = x^2 - 8x + 15$$

4.22 División sintética de $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ entre $x - c$

El método de la división sintética se utiliza para simplificar la aplicación del teorema del residuo en la división entre $x - c$ y el método se aplica de la siguiente manera:

1. Se organizan los coeficientes del polinomio de la siguiente manera: poniendo ceros en los lugares del polinomio donde no hay coeficientes

c	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_1	a
	a_n					

2. Multiplíquese a_n por c y colóquese el producto ca_n debajo de a_{n-1} como lo indica la flecha en el esquema siguiente, (estas flechas y las otras, se usan solamente para hacer más claras estas reglas.) enseguida se efectúa la suma $b = a_{n-1} + ca_n$ y se coloca debajo de la línea como se muestra.

c	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_1	a_0
		ca_n	cb_1	cb_2	cb_{n-2}	cb_{n-1}

a_n	b_1	b_2	b_{n-2}	b_{n-1}	r

3. Multiplíquese b_1 por c y colóquese el producto cb_1 debajo de a_{n-2} como se indica con otra flecha. Después se obtiene la suma $b_2 = a_{n-2} + cb_1$ y se escribe debajo de la línea como se muestra.

4. Se continúa este procedimiento como lo indican las flechas, hasta encontrar la suma final $r = a_0 + cb_{n-1}$. Los números: $A_0, \quad b_1, \quad b_2, \quad \dots \; b_{n-2}, \; b_{n-1}$

   Son los coeficientes del cociente $q(x)$ esto es:

   $q(x) = a_n x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \cdots + b_{n-2}x + b_{n-1}$, y r es el residuo

Ejemplo:

Aplicar la división sintética para obtener el cociente y el residuo cuando se divide $2x^4 + 5x^3 - 2x - 8$ entre $x + 3$

-3	2	5	0	-2	-8
		-6	3	-9	33
	2	-1	3	-11	25

Los primeros cuatro números del tercer renglón son los coeficientes del cociente $q(x)$ y el último número es el residuo r por lo tanto:

$$q(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 11 \quad \text{Y} \quad r = 25$$

4.23 Función racional

Las funciones racionales son razones polinomiales y se definen matemáticamente de la siguiente manera:
Sea $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones polinomiales con $g(x) \neq 0$ entonces la función:

$$r(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Es una función racional
El dominio de una función racional es el conjunto de todos reales, excepto los ceros de su denominador.

Toda función racional es continua en su dominio.

4.24 Fracciones parciales

Cuando se suman dos funciones racionales, como por ejemplo $f(x) = \frac{2}{x+5}$ y $g(x) = \frac{1}{x+1}$, los términos se combinan mediante un denominador común (o común denominador):

$$\frac{2}{x+5} + \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x+5}\left(\frac{x+1}{x+1}\right) + \frac{1}{x+1}\left(\frac{x+5}{x+5}\right)$$

Si se suman los numeradores en el lado derecho de (1), se obtiene la expresión racional única

$$\frac{3x+7}{(x+5)(x+1)} \qquad (2)$$

En un procedimiento importante en el estudio del cálculo integral se necesita poder invertir el proceso. En otras palabras, se comenzará con una expresión

racional como la (2), para $descomponerla$ en fracciones mas sencillas, $2/(x+5)$ y $1/(x+1)$, llamadas **fracciones parciales**.

Fracciones parciales

El proceso algebraico para descomponer una expresión racional como la (2) en fracciones parciales se llama **descomposición en fracciones parciales**. Por su comodidad supondremos que la función racional $P(x)/Q(x)$, $Q(x) \neq 0$ es una **fracción propia** o una **expresión racional propia**; esto es, que el grado de $p(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$. También supondremos una vez que los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ no tienen factores comunes.

En la descripción que sigue, examinaremos cuatro casos de descomposición de $P(x)/Q(x)$ en fracciones parciales. Esos casos dependen de los factores en el denominador $Q(x)$. Cuando el polinomio $Q(x)$ se factoriza como producto de $(ax+b)^n$ por $(ax^2+bx+c)^m, n = 1,2,\ldots, m = 1,2,\ldots,$ donde el polinomio cuadrático es **irreducible** sobre los números reales (esto es, no se factoriza usando números reales), la expresión racional $P(x)/Q(x)$ se puede descomponer en una sume de fracciones parciales de la forma

$$\frac{C_k}{(ax+b)^k} \quad \text{y} \quad \frac{A_k x + B_k}{(ax^2+bx+c)^k}$$

Caso I

El denominador $Q(x)$ tiene solo factores de primer grado y ninguno se repite, entonces corresponde a cada factor no repetido de primer, como $(x-a)$ una fracción racional de la

Forma:

$$\frac{A}{x-a}$$

Siendo A una constante y $(x-a)$ un factor del denominador.

Ejemplo

Descomponer la fracción $\frac{p(x)}{q(x)}$ si $q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2)(a_3x + b_3) \ldots (a_nx + b_n)$

Solución:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{(a1x + b1)} + \frac{A_2}{(a_2x + b2)} + \ldots + \frac{A_n}{(a_nx + bn)}$$

Caso II

El denominador tiene solo factores de primer grado y algunos se repiten, entonces corresponde a cada factor repetido n veces, como $(x - a)^n$ una fracción racional de la forma:

$$\frac{A}{(x-a)^n} + \frac{B}{(x-a)^{n-1}} + \cdots + \frac{L}{(x-a)^1}$$

Ejemplo:

Desarrolle en fracciones parciales la fracción: $\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}$

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)^3} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)^1}$$

Quitando denominadores:

$$x^3 + 1 = A(x - 1)^3 + BX + CX(x - 1) + DX(x - 1)^2$$

Multiplicando e igualando los coeficientes de las mismas potencias:

$$A + D = 1$$

$$-3A + C - 2D = 0$$

$$3A + B - C + D = 0$$

$$-A = 1$$

Resolviendo este sistema se obtiene:

$$A = -1, B = 2, C = 1, D = 2$$

Entonces

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3} = \frac{-1}{x} + \frac{2}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^1}$$

Caso III

El denominador tiene solo factores de segundo grado irreducible y ninguno se repite, entonces a cada factor no repetido le corresponde una fracción racional de la forma:

$$\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$$

Ejemplo:

Resolver por fracciones parciales la fracción $\frac{4}{x^3+4x}$

Factorizamos el denominador

$$\frac{4}{x^3+4x} = \frac{4}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

Quitando denominadores:

$$4 = A(x^2 + 4) + x(BX + C) = (A + B)x^2 + CX + A$$

Igualando los coeficientes de las potencias semejantes y resolviendo

$$A = 1, B = -1, C = 0$$

Entonces

$$\frac{4}{x(x^2+4)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+4}$$

Caso IV

El denominador tiene solo factores de segundo grado y algunos se repiten, entonces a cada factor repetido n veces como

$$(x^2 + px + q)^n$$

Le corresponde la suma de n fracciones parciales de la forma:

$$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n} + \frac{Cx+D}{(x^2+px+q)^{n-1}} + \cdots + \frac{Lx+M}{(x^2+px+q)^1}$$

Ejemplo:

Desarrollar en fracciones parciales la fracción $\frac{2x^3+x+3}{(x^2+1)^2}$

Como $x^2 + 1$ entra dos veces como factor entonces:

$$\frac{2x^3+x+3}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{(x^2+1)^2} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^1}$$

Quitando denominadores

$$2x^3 + x + 3 = AX + B + (Cx + D)(x^2 + 1)$$

Igualando los coeficientes de las mismas potencias de x y resolviendo obtenemos:

$$A = -1, B = 3, \quad C = 2, \quad D = 0$$

Entonces

$$\frac{2x^3+x+3}{(x^2+1)^2} = \frac{-1x+3}{(x^2+1)^2} + \frac{2x}{(x^2+1)^1}$$

Nota

Ejemplo: $\frac{(x^4+3x^3)}{x^2+2x+1} = x^2 + x - 3 + \frac{5x+3}{x^2+2x+1}$

Observe que el grado $Q(x)$ <grado de $P(x)$

Cuando esto ocurre se hace la división hasta obtener un resto en forma de fracción propia y luego se aplica según el caso (I, II, III, IV).

4.25 Ejercicios

Descomponer en fracciones parciales

1. $\frac{4x^4}{x(2x^2+1)^2}$
2. $\frac{x+1}{x-1}$
3. $\frac{2x-5}{(x-2)^3}$
4. $\frac{x^2+1}{x^3-x}$
5. $\frac{4}{(x-2)(x-1)^2}$
6. $\frac{21x-14}{(2x+1)(x-3)^2}$
7. $\frac{x+1}{x(x^2+1)}$
8. $\frac{8}{x^4+4}$
9. $\frac{3x^2-x+2}{(x^2-x-2)(x^2+2)}$
10. $\frac{3x^2+13x+11}{(x-1)(x+2)^2}$

CAPITULO V: FUNCION EXPONENCIAL Y LOGARITMICA.

Este capítulo se inicia con el siguiente problema de inversión:

Suponga que se depositan $\$1000$ en una cuenta de ahorros cuya tasa de interés anual es 3%

Determine el valor futuro dentro de 10 años.

$t = 0$ $\quad \$1000 =$

$t = 1$ $\quad C_1 = 1000 + 1000(0.03) = 1000(1 + 0.03)$

$t = 2$ $\quad C_2 = 1000(1 + 0.03) + 1000(1 + 0.03)(0.03)$

$= 1000(1 + 0.03)(1 + 0.03)$

$= 1000(1 + 0.03)^2$

$t = t$ $\quad C_t = 1000(1 + 0.03)^t$

Esta es una forma exponencial

5.1 Función exponencial

Definición

Sea $f: R \to R$

$x \to f(x) = a^x \qquad a > 0,\ a \neq 1$

f Se dice **función exponencial** en base a

Nota

La restricción $a > 0$ garantiza que a^x es un número real si $a = 1$ será la función constante $f(x) = 1$

Por ejemplo:

$(-4)^{1/2} = \sqrt{-4}$ Es un número complejo.

La función exponencial cumple con las leyes de los exponentes

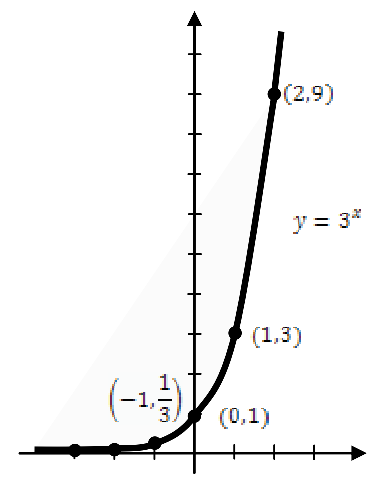
$a^x a^y = a^{x+y} \qquad (a^x)^y = a^{xy} \qquad \left({}^{a}/_{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

$a^x/_{a^y} = a^{x-y} \qquad (ab)^x = a^x b^x \qquad {}^{1}/_{a^x} = a^{-x}$

Grafico de $y = a^x$

Considere $y = 3^x$

Solución



Primero se hace una tabla con algunos valores de la función que correspondan a valores preseleccionados de x. Como se ve en la figura, se graficaron los puntos correspondientes obtenidos en la tabla, y se unieron con una curva continua. La grafica muestra que f es una función creciente en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

x	-3	-2	-1	0	1	2

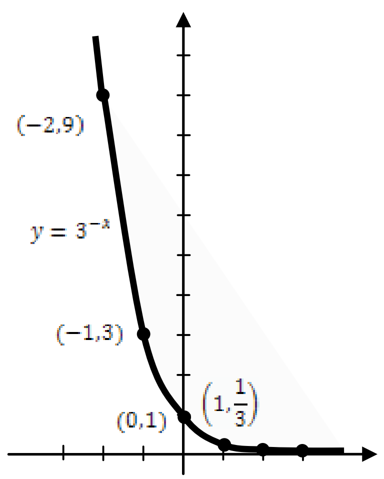
$f(x)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

Nota

La forma de $y = a^x$ con $a > 1$ tiene la misma forma que el gráfico anterior.

Considere $y = \left({}^{1}/_{3}\right)^x$

Solución



Se procede como en el ejemplo anterior y se forma una tabla de algunos valores de la función que correspondan a los valores preseleccionados de x. Por ejemplo, nótese que, por las leyes de los exponentes,

$$f(-2) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = (3^{-1})^{-2} = 3^2 = 9$$

Como se ve en la figura, se graficaron los puntos correspondientes obtenidos en la tabla, y se unieron con una curva continua. En este caso, la grafica muestra f es una función decreciente en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	27	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

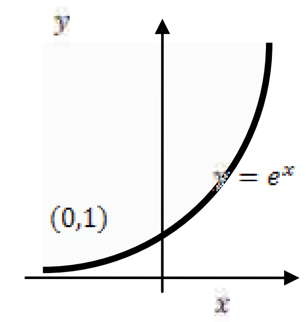
Las funciones exponenciales con bases que satisfagan $0 < a < 1$, como cuando $a = \frac{1}{3}$, se escriben con frecuencia en una forma alternativa. Ver que

$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ es lo mismo que $y = 3^{-x}$. De este ultimo resultado se observa que la grafica de $y = 3^{-x}$ solo es la grafica de $y = 3^x$ reflejada en el eje y.

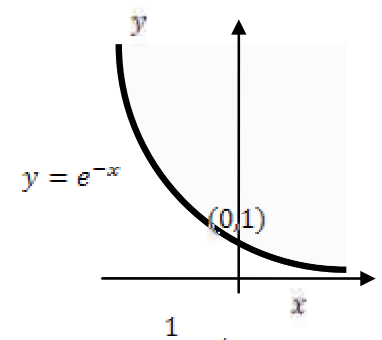
Nota

La forma de $y = a^x$ con $0 < a < 1$ tienen la misma forma que el grafico anterior.

Existe en R, el numero $e = 2.71828 \ldots$ y también se define $y = f(x) = e^x$ se dice función exponencial natural (o en base e) y tiene la misma forma que $f(x) = a^x$ para $a > 1$



$a > 1$



$\frac{1}{e} < 1$

5.2 Ejercicios:

En los problemas del 1 a 6, trace la grafica de la función f. Determine la intersección con el eje y. Indique si la función es creciente o decreciente.

1. $f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$
2. $f(x) = -2^x$
3. $f(x) = 2^{x+1}$
4. $f(x) = -5 + 3^x$
5. $f(x) = 3 - \left(\frac{1}{5}\right)^x$
6. $f(x) = -1 + e^{x-3}$

En los problemas 7 y 8, deduzca una función exponencial $f(x) = b^x$ tal que la grafica de f pase por el punto dado.

7. $(3{,}216)$
8. $(-1, e^2)$

En el problema 9 determine el contra dominio de la función.

9. $f(x) = 5 + e^{-x}$

En los problemas 10 a 12, determine las coordenadas de los cruces de la grafica de la función con los ejes x y y. No trace las gráficas.

10. $f(x) = 2^x - 4$
11. $f(x) = xe^x + 10e^x$
12. $f(x) = x^3 8^x + 5x^2 8^x + 6x8^x$

En los problemas 13 y 14, use una gráfica para resolver la desigualdad.

13. $2^x > 16$
14. $e^{x-2} < 1$

En el problema 15, use $f(-x) = f(x)$ para demostrar que la función es par. Trace la grafica de la función f.

15. $f(x) = e^{x^2}$

En los problemas 17 y 18, use las grafica obtenidas en el problema 16 como ayuda para trazar la grafica de la función f indicada.

16. $f(x) = 1 - e^{x^2}$
17. $f(x) = -e^{|x-3|}$
18. Demuestre que $f(x) = 2^x + 2^{-x}$ es una función par. Trace la grafica.

En los problemas 19 a 22 use la propiedad uno a uno para resolver la ecuación exponencial respectiva.

19. $10^{-2x} = \frac{1}{1000}$
20. $8^{x-7} - 1 = 0$
21. $2^x \cdot 3^x = 36$
22. $3^x = 27^{x^2}$

En los problemas 23 y 24, factorice o use la formula cuadrática para resolver la ecuación.

23. $(5^x)^2 - 26(5^x) + 25 = 0$
24. $2^x + 2^{-x} = 2$

En el problema 25 determine la intersección con el eje x de la grafica de la función dada.

25. $f(x) = e^{x+4} - e$

En el problema 26, trace la grafica de la función f definida por secciones.

26. $f(x) = \begin{cases} -e, & x < 0 \\ -e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}$

5.3 Función logarítmica

Se puede ver que para $a > 0 \quad a \neq 1$ y restringiendo el conjunto de llegada para $y = a^x$ a R^+, $f(x) = a^x$ es biyectiva y por consiguiente tiene una función inversa (f^{-1}) la que se conoce como función logarítmica en base a y se nota $\log_a x$

Definición

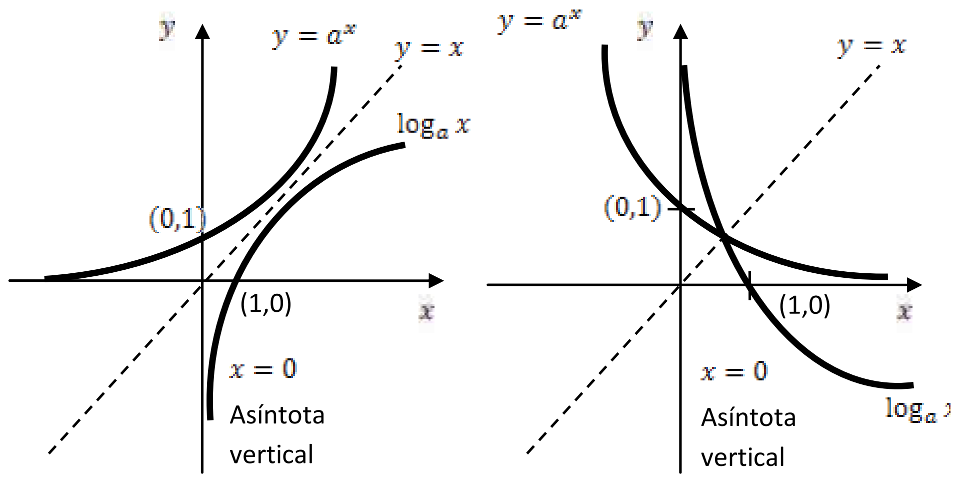
$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$$

$(f^{-1} \, o \, f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(\log_a x) = a^{\log_a x} = x$ Para $x > 0 \quad x \in Dom\, f$

$(f\ o\ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(a^x) = \log_a(a^x) = x$ Para

$x \in R \quad x \in Dom\, f^{-1}$

De la definición de $y = \log_a x$ y de la gráfica de $y = a^x$ se obtiene la gráfica de $\log_a x$



a) Base b) Base $0 < a < 1$

La función $\log_a x$ cumple también con las propiedades de los logaritmos

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a(x^r) = r\log_a x \qquad r \in R$$

También la inversa de la exponencial natural $f(x) = e^x$ se define como el logaritmo natural

$$y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y$$

$$f(x) = \log_e x \Leftrightarrow f^{-1}(x) = e^x$$

$$f(f^{-1}(x)) = f(e^x) \qquad x \in R$$

$$= \ln(e^x) = x$$

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(\ln x) \qquad x > 0$$

$$= e^{\ln x} = x$$

$\ln e = 1$ Puesto que $y = \ln e \Leftrightarrow e = e^y \Leftrightarrow y = 1$

$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ Esta fórmula tiene la propiedad de pasar del logaritmo de un número en base a al logaritmo (natural) del número (en base e). La que puede generalizar a cualquier otra base:

Sea

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$$

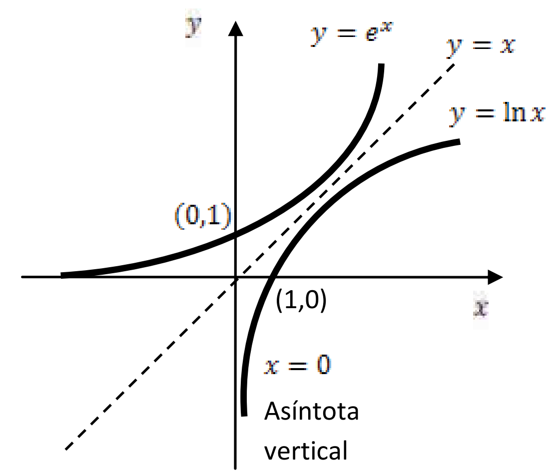
$$\log_b x = \log_b a^y$$

$$\log_b x = y\log_b a$$

$$y = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

De donde $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

Si $b = e$ $\quad \log_a x = \frac{\log_e x}{\log_e a} = \frac{\ln x}{\ln a}$



Ejemplo

Simplificar y escribir como un solo logaritmo

$$\frac{1}{2}\ln 36 + 2\ln 4 - \ln 4$$

Solución

Hay varia formas de atacar este problema. Por ejemplo, obsérvese que el segundo y tercer términos se pueden combinar aritméticamente como sigue:

$$2\ln 4 - \ln 4 = \ln 4 \qquad \leftarrow \text{Análogo a } 2x - x = x$$

También se le puede aplicar las propiedades de los logaritmos, para combinar estos términos:

$$2\ln 4 - \ln 4 = \ln 4^2 - \ln 4$$

$$= \ln 16 - \ln 4$$

$$= \ln \frac{16}{4}$$

$$= \ln 4$$

Por consiguiente $\frac{1}{2}\ln 36 + 2\ln 4 - \ln 4 = \ln(36)^{1/2} + \ln 4$

$$= \ln 6 + \ln 4$$

$$= \ln 24$$

Ejemplo

Usar las leyes de los logaritmos para reformar cada expresión, y evaluarla.

a) $\ln\sqrt{e}$

b) $\ln 5e$

c) $\ln\frac{1}{e}$

Solución

a) Como $\sqrt{e} = e^{1/2}$, entonces de acuerdo con las leyes de los logaritmos:

$$\ln\sqrt{e} = \ln e^{1/2} = \frac{1}{2}\ln e = \frac{1}{2}$$

b) De las leyes de los logaritmos, y con una calculadora:

$$\ln 5e = \ln 5 + \ln e = \ln 5 + 1 \approx 2.6094$$

c) Según las leyes de los logaritmos,

$$\ln\frac{1}{e} = \ln 1 - \ln e = 0 - 1 = -1$$

Nótese que aquí también se pudo haber usado otra de las leyes de los logaritmos:

$$\ln\frac{1}{e} = \ln e^{-1} = (-1)\ln e = -1$$

Propiedad uno a uno

El análogo logarítmico de la propiedad uno a uno de las funciones exponenciales, es:

Si $\log_b x_1 = \log_b x_2,$ entonces $x_1 = x_2$

La propiedad uno a uno de la función logarítmica puede usarse para resolver ciertos tipos de ecuaciones.

Ejemplo

Despejar x de $\ln 2 + \ln(4x-1) = \ln(2x+5)$

Solución

Las leyes de los logaritmos, el lado izquierdo de la ecuación se puede expresar como

$$\ln 2 + \ln(4x-1) = \ln 2(4x-1) = \ln(8x-2)$$

Entonces, la ecuación original es

$$\ln(8x-2) = \ln(2x+5)$$

Como dos logaritmos de la misma base son iguales, de inmediato se ve que, por la propiedad uno a uno

$8x - 2 = 2x + 5$ O sea $6x = 7$ o sea $x = \frac{7}{6}$

5.4 Solución de ecuaciones.

El ejemplo anterior ilustra solo uno de varios procedimientos que se pueden usar para resolver una diversidad de ecuaciones exponenciales y logarítmicas. A continuación se presenta una liste de estrategias para resolver ecuaciones:

- Usar las propiedades uno a uno de b^x y de $\log_b x$.
- Reformular una expresión exponencial como expresión logarítmica.
- Reformular una expresión logarítmica como una expresión exponencial.
- Para ecuaciones $a^{x_1} = b^{x_2}$, de donde $a \neq b$, sacar el logaritmo natural de ambos lados y simplificar usando las leyes de los logaritmos.

Ejemplo

Despejar k de $e^{10k} = 7$

Solución

Se usará la expresión exponencial dada como una expresión logarítmica:

$e^{10k} = 7$ Quiere decir que $10k = \ln 7$ $\leftarrow e^{\ln x} = x$

Por consiguiente, con ayuda de una calculadora,

$$k = \frac{1}{10}\ln 7 \approx 0.1946$$

Ejemplo

Despejar x de $\log_2 x = 5$

Solución

Se usará la definición para reexpresar la ecuación logarítmica como su forma exponencial equivalente:

$$x = 2^5 = 32$$

Ejemplo

Resolver $e^{2x} = 3^{x-4}$ para x

Solución

Como las bases de la expresión exponencial a cada lado de la ecuación son diferentes, una forma de proceder es sacar el logaritmo natural (también se podría usar el logaritmo común) de ambos lados. De la igualdad

$$\ln e^{2x} = \ln 3^{x-4}$$

Y de las leyes de los logaritmos se obtiene

$$2x \ln e = (x-4)\ln 3$$

Ahora, usando $\ln e = 1$ y la ley distributiva, la ultima ecuación de transforma en

$$2x = x\ln 3 - 4\ln 3$$

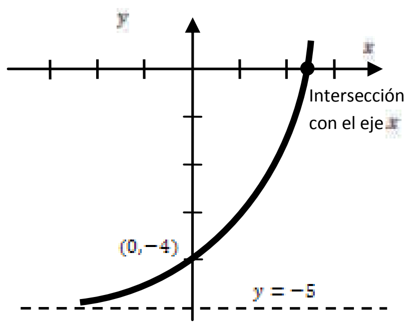
Se reúnen los términos en x en un lado de la igualdad para llegar a

$$\overbrace{2x - x\ln 3}^{\substack{sacar\ x\ como \\ factor\ comun\ de \\ de\ esos\ terminos}} = -4\ln 3 \quad ó \quad (2-\ln 3)x = -4\ln 3 \quad ó \quad x = -\frac{4\ln 3}{2-\ln 3}$$

Se recomienda al lector confirme que el resultado es $x \approx -4.8752$.

Cambio de base

Supongamos que se desea determinar la intersección con el eje x de la grafica de $y = 2^x - 5$. Si $y = 0$, se ve que x es la solución de la ecuación $2^x - 5 = 0$, ó de $2^x = 5$. Ahora bien, una solución perfectamente valida es $x = \log_2 5$. Pero, desde un punto de vista computacional (esto es, de expresar x como un número), el ultimo resultado no es deseable, por que ninguna calculadora tiene una función logarítmica con la base 2. Se puede calcular el resultado cambiando $\log_2 5$ al logaritmo natural, solo con sacar el logaritmo natural de ambos lados de la ecuación exponencial $2^x = 5$:



Abscisa al origen de $y = 2^x - 5$

$$\ln 2^x = \ln 5$$

$$x\ln 2 = \ln 5$$

$$\xrightarrow{\substack{Nota: En\ realidad \\ aqui\ se\ dividen \\ los\ logaritmos}} x = \frac{\ln 5}{\ln 2} \approx 2.3219$$

A propósito, como comenzamos con $x = \log_2 5$, este último resultado también muestra la igualdad $\log_2 5 = \frac{\ln 5}{\ln 2}$

Ejemplo

Determinar la x en el dominio de $f(x) = 8^x$ para la cual $f(x) = 73$

Solución

Se debe determinar una solución de la ecuación $8^x = 73$. Sacando logaritmo natural de ambos lados de esta ultima ecuación y despejando a x se obtiene

$$\ln 8^x = \ln 73 \quad \text{Y así} \quad x = \frac{\ln 73}{\ln 8}$$

Con ayuda de una calculadora se observa que $x = \frac{\ln 73}{\ln 8} \approx 2.0633$. Como en la discusión anterior a este ejemplo, en realidad se ha cambiado las bases de $\log_8 73$ a $x = \frac{\ln 73}{\ln 8}$.

Para convertir un logaritmo con cualquier base $b > 0$ al logaritmo natural, primero se reordena la expresión logarítmica $x = \log_b N$ como una expresión exponencial equivalente a $b^x = N$. A continuación se saca el logaritmo natural de ambos lados de esta última igualdad, y se despeja x de la ecuación resultante $x\ln b = \ln N$. Con esto se obtiene la formula general

$$\log_b N = \frac{\ln N}{\ln b}$$

5.5 Ejercicios

En los problemas 1 a 3 reformule la expresión exponencial en forma de una expresión logarítmica equivalente:

1. $4^{-1/2} = \frac{1}{2}$
2. $10^4 = 10000$
3. $t^{-s} = v$

En los problemas 4 a 6 reformule la expresión logarítmica en forma de una expresión exponencial equivalente.

4. $\log_2 128 = 7$
5. $\log_{\sqrt{3}} 81 = 8$
6. $\log_b u = v$

En los problemas 7 a 9 determine el valor exacto del logaritmo.

7. $\log_{10}(0.0000001)$

8. $\log_2(2^2+2^2)$

9. $\ln e^8$

En el problema 10, deduzca una función logarítmica $f(x)=\log_b x$ tal que la gráfica de f pase por el punto indicado.

10. $(49,2)$

En los problemas 11 a 14, determine el dominio de la función f. Determine la intersección con el eje x y la asíntota vertical de la gráfica. Trace la grafica de f.

11. $f(x)=-\log_2 x$

12. $f(x)=\log_2(-x)$

13. $f(x)=3-\log_2(x+3)$

14. $f(x)=-1+\ln x$

En el problema 15, resuelva la desigualdad con la grafica.

15. $\ln(x \lessgtr 1) < 0$

16. Demuestre que $f(x)=\ln|x|$ es una función par. Trace la gráfica de f. Determine las intersecciones con el eje x y la asíntota vertical de la gráfica.

En el problema 17, trace la grafica de la función f respectiva.

17. $f(x)=|\ln x|$

En los problemas 18 a 20, use las leyes de los logaritmos para reescribir la expresión dada como logaritmo.

18. $\log_{10} 2+2\log_{10} 5$

19. $\ln(x^4-4)-\ln(x^2+2)$

20. $\ln 5+\ln 5^2+\ln 5^3-\ln 5^6$

En los problemas 21 y 22. Aplique las leyes de los logaritmos de modo que $\ln y$ no contenga productos, cocientes ni potencias.

21. $y=\frac{x^{10}\sqrt{x^2+5}}{\sqrt[3]{8x^3+2}}$

22. $y=\frac{(x-3)^5(x^4+3x^2+1)^8}{\sqrt{x}(7x+5)^9}$

En los problemas 23 a 25 use la propiedad uno a uno para resolver la ecuación logarítmica indicada.

23. $\log_2 x-\log_2 10=\log_2 9.3$

24. $\ln x+\ln(x-2)=\ln 3$

25. $\log_2(x-3)-\log_2(2x+1)=-\log_2 4$

En los problemas 26 y 27, factorice o use la formula cuadrática para resolver la ecuación indicada.

26. $(5^x)^2-2(5^x)-1=0$

27. $(\ln x)^2+\ln x=2$

En los problemas 28 a 31 use las propiedades de los logaritmos para resolver la ecuación indicada.

28. $\log_{10}\frac{1}{x}=2$

29. $\log_2(\log_3 x)=2$

30. $\log_2(10x-x^2)=4$

31. $\log_3 81^x-\log_3 3^{2x}=3$

En el problema 32 use logaritmos naturales para determinar x en el dominio de la función indicada, para la cual f tenga valor indicado.

32. $f(x)=6^x; f(x)=51$

En los problemas 33 y 34 use logaritmos naturales para determinar x.

33. $2^{x+5} = 9$

34. $5^{x} = 2e^{x+1}$

CAPITULO VI: FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

6.1 Función circular unitaria

Si se toma una circunferencia con radio la unidad (circunferencia unitaria) y centro en el origen y se enlaza cada punto de la circunferencia con un ángulo se halla la función $f(\theta) = (X, Y)$ llamada **Función Circular** que tiene como **Dominio** todos los ángulos centrales y como **Rango** los puntos de la circunferencia formados por las parejas ordenadas (x, y) que satisfacen la ecuación $x^2 + y^2$=1.

Se llama punto trigonométrico a las parejas ordenadas (x, y) que satisfacen la ecuación de la función circular.

Se llaman Relaciones trigonométrica a las razones entre los lados de un triángulo rectángulo, según la medida de uno de sus ángulos agudos.

Según Montenegro (2004) se llama Funciones trigonométricas a la aplicación de las relaciones trigonométricas en la Función Circular por medio de la formación de un triángulo rectángulo tomando como lados el radio de la circunferencia, la componente horizontal y la componente vertical del punto trigonométrico como se muestra en la Figura 6.1.

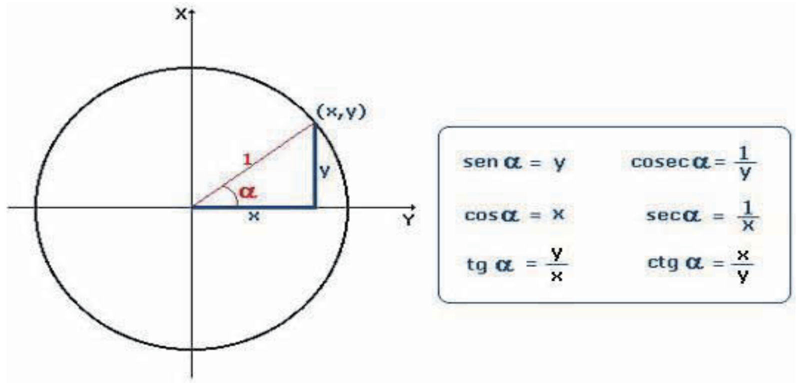


Figura 6.1Circunferencia Unitaria

Tomamos las relaciones trigonométricas o las razones entre los lados del triángulo formado por el radio unitario (hipotenusa), la Componente horizontal del punto trigonométrico (cateto adyacente) y la componente vertical del punto trigonométricc (cateto opuesto) entonces:

$$\text{seno}\,\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{y}{1} \;;\; \text{entonces} \quad y = \sin\alpha$$

$$\text{coseno}\,\alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{x}{1} \;;\; \text{entonces} \quad x = \cos\alpha$$

$$\text{tangente}\,\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{y}{x} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Las reciprocas de las funciones seno, coseno y tangente

$$\text{Cosecante}\,\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{1}{y} \;;\; \text{entonces}$$

$$\text{Csc}\,\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$

$$\text{secante}\,\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{1}{x} \;;\; \text{entonces}$$

$$\text{Sec}\,\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\text{Cotangente}\propto = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{x}{y} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \;;\; \text{entonces}$$

$$\text{Cot}\propto = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Nota

La escogencia del ciurculo unitario no quita generalidad a las definiciones anteriores, se obtienen los mismos resultados si se escoge un círculo de radio $R > 1$.

La tabla 1 nos muestra las funciones trigonométricas de Ángulos Notables.

VALORES TRIGONOMETRICOS PARA ANGULOS NOTABLES								
Rad.	*Ang.*	$Sin\,\theta$	$Cos\,\theta$	$Tan\,\theta$	$Csc\,\theta$	$Sec\,\theta$	$Cot\,\theta$
$0, 2\pi$	$0°$, $360°$	0	1	0	*Ind.*	1	*Ind.*
$\frac{\pi}{2}$	$90°$	1	0	*Ind.*	1	*Ind.*	0
π	$180°$	0	-1	0	*Ind.*	-1	*Ind.*
$\frac{3\pi}{2}$	$270°$	-1	0	*Ind.*	-1	*Ind.*	0
$\frac{\pi}{6}$	$30°$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	2	$2\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$45°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$60°$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}/3$	2	$\sqrt{3}/3$

Tabla 1 Ángulos notables

La tabla 2 nos muestra los signos de las funciones trigonométricas según el cuadrante.

SIGNOS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS				
FUNCIÓN TRIGONOMETRICA	*CUADRANTE*			
	I	*II*	*III*	*IV*
$Sin\,\theta$	$+$	$+$	$-$	$-$
$Cos\,\theta$	$+$	$-$	$-$	$+$
$Tan\,\theta$	$+$	$-$	$+$	$-$
$Csc\,\theta$	$+$	$+$	$-$	$-$
$Sec\,\theta$	$+$	$-$	$-$	$+$
$Cot\,\theta$	$+$	$-$	$+$	$-$

Tabla 2 Signos según el cuadrante

Como se puede ver en la tabla 2 en el primer cuadrante todas las funciones trigonométricas son positivas, en el segundo cuadrante solo son positivos el seno y la cosecante, en el tercer cuadrante solo son positivas la tangente y la cotangente y en el cuarto cuadrante solo son positivos el coseno y la secante.

En la tabla 3 se aprecian el crecimiento de las funciones trigonométricas según el cuadrante.

CRECIMIENTO DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS				
FUNCIÓN	CRECIENTE EN	DECRECIENTE EN	VALORES MIN	VALORES MAX
$Sin\ \theta$	I , IV	II , III	-1	1
$Cos\ \theta$	III, IV	I , II	-1	1
$Tan\ \theta$	Siempre	Nunca	$-\infty$	$+\infty$
$Csc\ \theta$	II , III	I , IV	$-\infty$	$+\infty$
$Sec\ \theta$	I , II	III , IV	$-\infty$	$+\infty$
$Cot\ \theta$	Nunca	Siempre	$-\infty$	$+\infty$

Tabla 3 Crecimiento de las funciones trigonométricas

Ahora, si se toma la función circular no unitaria con radio R y se hallan todas las relaciones trigonométricas anteriores tenemos:

Hipotenusa = R

seno $\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{y}{R}$; entonces y = R $\sin\alpha$

coseno $\alpha = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{x}{R}$; entonces x = $R\cos\alpha$

tangente $\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{y}{x} = \frac{R\sin\alpha}{R\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

Las recíprocas de las funciones seno, coseno y tangente

Cosecante $\alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto} = \frac{R}{y}$; entonces Csc $\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$

secante $\alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente} = \frac{R}{x}$; entonces Sec $\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$

Cotangente = $\frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto} = \frac{x}{y} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$; entonces Cot = $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

6.2 Funciones trigonométricas inversa

Función inversa del seno

Para hallar la función inversa del seno se redefine la función seno cuyo dominio son los números reales R y su recorrido o rango es $|y| \leq 1$ que se puede expresar de la siguiente manera $-1 \leq y \leq 1$; restringiendo su dominio entre $\left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$ la función se vuelve uno a uno y sobre.

La función seno no es uno a uno en su dominio natural porque no cumple el criterio de la recta horizontal, que dice que al trazar cualquier recta horizontal no debe cortar la gráfica en más de un punto, la función restringida si es uno a uno.

La función seno es impar y la condición de imparidad es $f(x) = -f(-x)$

La función coseno es par y la condición de paridad es $f(-x) = f(x)$, las funciones impares son simétricas en el origen y las pares son simétricas con el eje y.

La Función inversa de seno, $y = sin^{-1} x$ es la inversa de esa porción de la función restringida del seno figura 6.3

Entonces: por la relación inversa usual

$y = arcsen\ x$, si y solo si $x = sen\ y$

Cuyo dominio es $|x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$

y rango es $|y| \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

Ejemplo: $\frac{\pi}{6} = arcsen\ \frac{1}{2}$

Entiéndase que $sin^{-1}x$ es diferente que $\frac{1}{\sin x}$ la primera es la inversa de $sen\ x$ y la segunda es el reciproco.

La gráfica de la función seno es:

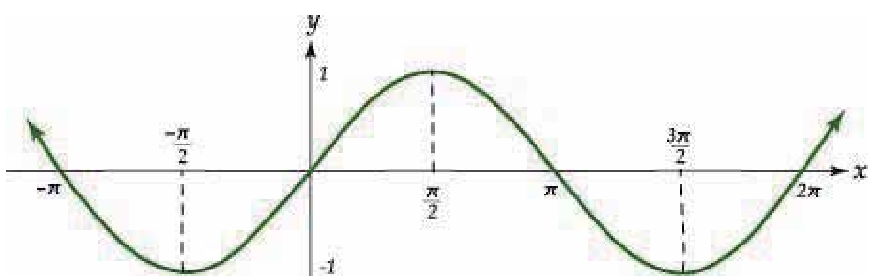


Figura 6.2 Función $sen\ x$

La gráfica de la función restringida es:

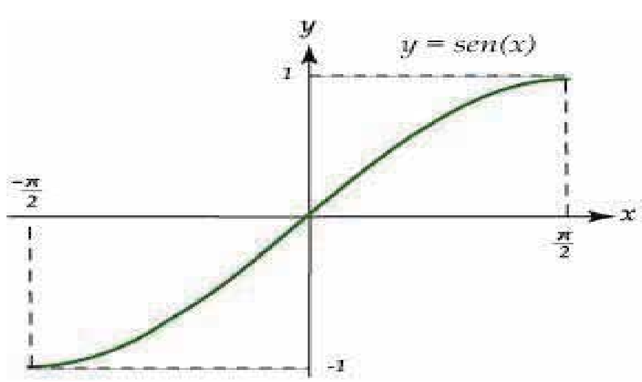


Figura 6.3 Función $sen\ x$ restringida

La gráfica de la función seno inverso de x es:

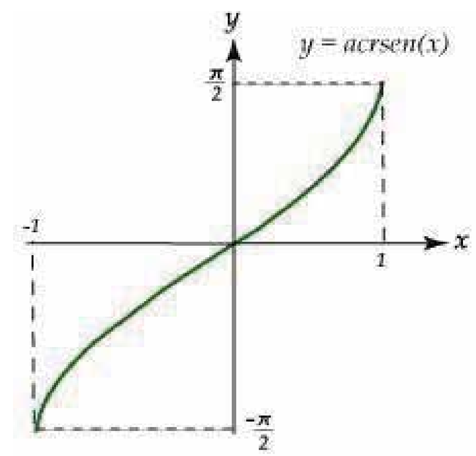


Figura 6.4 Función $arcseno\ x$

La función inversa de $sen\ x$ restringido es $y = sin^{-1}x$

Cuyo dominio es $[-1, 1]$

Y el recorrido es $\left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$

Esta gráfica es creciente como se ve en la figura 4 y es una función impar porque:

$sin^{-1}(x) = -sin^{-1}(-x)$

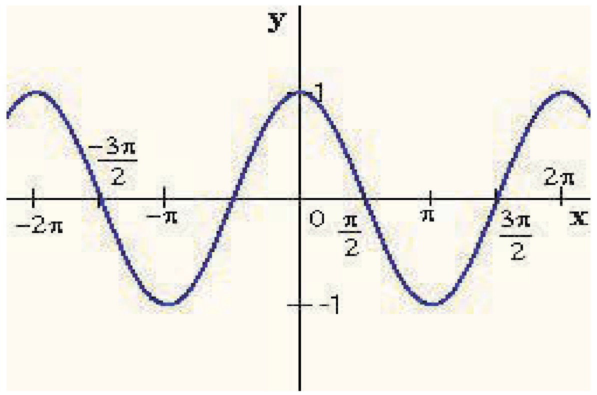
El arco seno de x es un ángulo cuyo seno es x

X	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$
sin^{-1}	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$

Tabla 4 Valores comunes de $y = sin^{-1}(x)$

Función inversa del coseno.

Para hallar la función inversa del coseno restringimos la función coseno cuyo dominio son los reales (R) y su recorrido o rango es $|y| \leq 1$ ó $\{-1 \leq y \leq 1\}$ Coseno es una función par cuya grafica es:



Grafica 6.5 Función $cos\ x$

Si restringimos el dominio de $y = cos\,x$ al intervalo $[0,\pi]$ tal que $\cos y = x$ es la inversa de $cos\ x$; (o $arccos\ x$). El ángulo $cos^{-1}\,x$ es también el arcocoseno de x.

El dominio de $y = cos^{-1}\,x$ es $[-1,1]$ y su rango es $[0,\pi]$

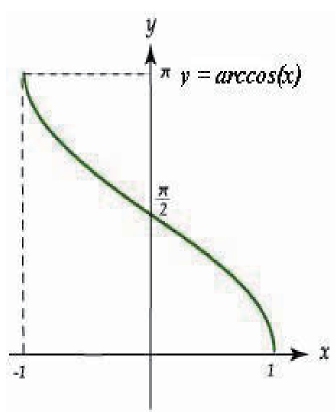


Figura 6.6 Función arco coseno

Esta gráfica es decreciente como se muestra en la Figura 6.6

Función inversa de la tangente.

Como la función $tan\ x$ está definida como $\frac{sen\ x}{cos\,x}$ hay que tener cuidado con los valores de x que hagan cero a $cos\,x$ cualquier $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ con k perteneciente a los enteros hacen cero el coseno, lo que hace que la función tangente sea indefinida en esos puntos lo que ocurre un número infinito de veces; es por eso que la función tiene asíntotas verticales en esos valores $(\ldots.-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\ldots\ldots.)$ como se muestra en la Figura 6.7.

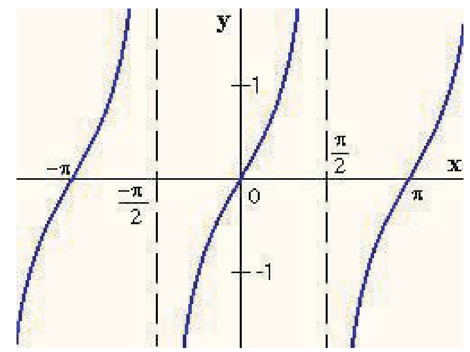


Figura 6.7 Función $tan\ x$

A diferencia de las funciones $sen\ (x)$ y $cos\ (x)$ cuyo periodo es 2π el periodo de la función tangente es π.

El dominio de la función tangente son todos los reales excepto los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$ y el rango son todos los reales siendo una función continua y, creciente en su dominio, simétrica con respecto al origen (impar), sin cota superior o inferior, sin mínimos ni máximos locales, sin asíntotas horizontales, y asíntotas verticales en $x\ (2k+1)\ \frac{\pi}{2}$, Si se restringe el dominio de $y = \tan^{-1} x$ al intervalo $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ la función restringida es uno a uno y decimos que la función

$y = tan^{-1} x$ es la inversa de esa porción de la función restringida de la tangente, como se muestra en la figura 6.9

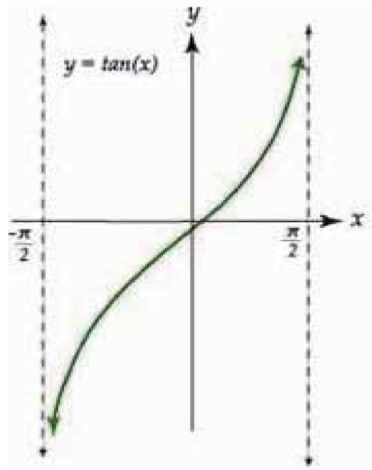


Figura 6.8 Función tangente restringida

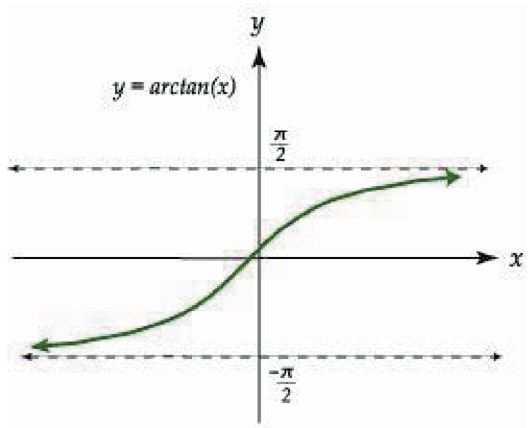


Figura 6.9 Función arco tangente

Función cotangente inversa

Para definir la función cotangente inversa restringimos el dominio de la función cotangente entre 0 y π en el que es continua y estrictamente decreciente por lo cual posee función inversa.

Se define la función cotangente restringida como:

$$H = \{(x,y)/\ y = cot\ x,\ \text{con}\ \ x \in]0,\pi[,\ \ y \in \mathbb{R}\}$$

La función cotangente inversa, también llamada arco cotangente se define como:

$$\begin{array}{rcl} arc\ cot : \mathbb{R} & \rightarrow &]0,\pi[\\ x & \rightarrow & cot\ x \end{array}$$

Por la definición de la función arco cotangente se tiene que:

$$y = arc\ cot\ x \Leftrightarrow cot\ y = x\ \ \text{con}\ \ y \in]0,\pi[,\ \ x \in \mathbb{R}.$$

La siguiente es la representación gráfica de la función cotangente y de arco cotangente

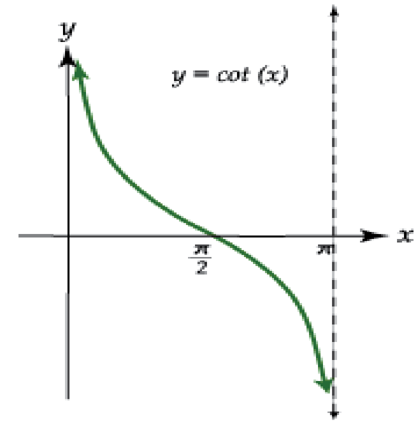


Figura 6.10 función cotangente restringido

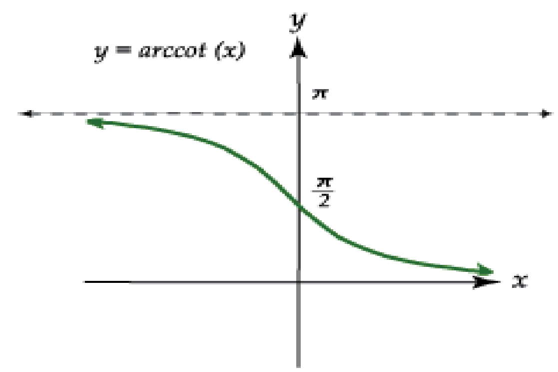


Figura 6.11 función arco cotangente

Función secante inversa

Elegimos el dominio de la función secante como el intervalo $I = \left[-\pi, \frac{-\pi}{2}\right) \cup \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ ya que en I la función secante es biunívoca.

La representación gráfica de la función secante en el intervalo anterior es:

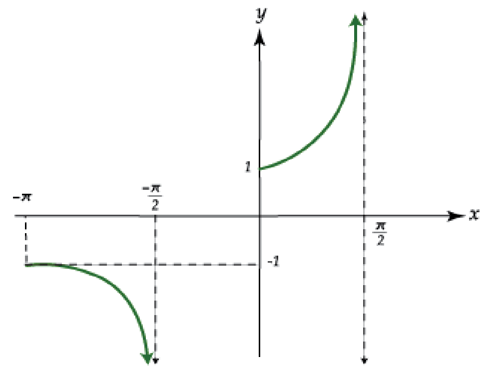


Figura 6.12 función secante restringida

Como puede observarse la función secante es continua en I siendo estrictamente decreciente en $[-\pi, \frac{-\pi}{2}[$ y estrictamente creciente en $[0, \frac{\pi}{2}[$

Existe por lo tanto la función secante inversa, llamada también arco secante definida por:

$$\begin{array}{ccc} arcsec :]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[& \longrightarrow & \left[-\pi, \frac{-\pi}{2}\right[\cup \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\\ x & \longrightarrow & arcsec\, x \end{array}$$

Por la definición de arco secante se tiene que:

$$y = arc\,sec\,x \Leftrightarrow x = sec\,y \qquad \text{con } y \in \left[-\pi, \frac{-\pi}{2}\right[\cup \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \ x \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$$

La gráfica de la función arco secante es la siguiente:

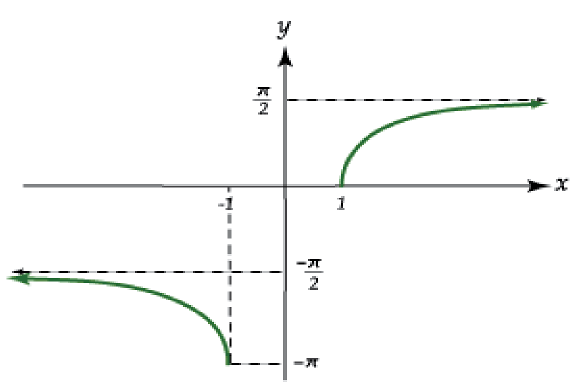


Figura 6.13 Función arco secante

La función secante inversa también suele definirse por la siguiente igualdad:

$$arcsec\,x = arccos\left(\frac{1}{x}\right) \ \text{con} \ |x| \geq 1$$

Función cosecante inversa

Para definir la función cosecante inversa se toma como dominio de la función cosecante el intervalo $I = \left(-\pi, \frac{-\pi}{2}\right] \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ en la que la función cosecante es biunívoca.

La representación gráfica de la función cosecante en el intervalo señalado es la siguiente:

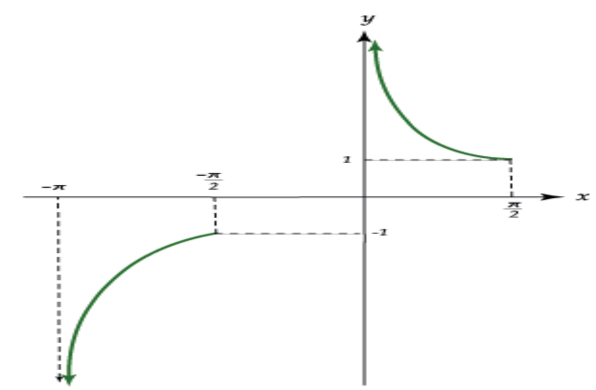


Figura 6.14 Función cosecante restringida

Como se puede observar en la figura 6.14 la función cosecante restringida es continua en I siendo estrictamente creciente en $\left(-\pi, \frac{-\pi}{2}\right]$ y estrictamente decreciente en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

Existe por lo tanto la función cosecante inversa llamada también arco cosecante definida por:

$$\begin{array}{ccc} arc\,csc :]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[& \longrightarrow &]-\pi, \frac{-\pi}{2}] \cup]0, \frac{\pi}{2}] \\ x & \longrightarrow & arc\,csc\,x \end{array}$$

Por la definición de arco cosecante se tiene que:

$$y = arc\ csc\ x \Leftrightarrow x = csc\ y\ con\ y \in \left(-\pi, \frac{-\pi}{2}\right] \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$x \in\ ]-\infty, -1]\ \cup\ ]\ 1, +\infty]$$

La representación gráfica de la función arco cosecante es la siguiente:

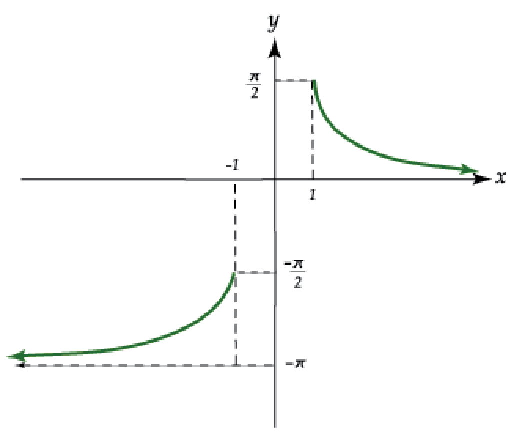


Figura 6.15 Función arco cosecante

6.3 Relaciones entre las funciones trigonométricas identidades y ecuaciones.

Identidades trigonométricas básicas.

Identidades reciprocas:

$$Csc\ \theta = \frac{1}{sen\ \ \theta} \qquad sen\ \theta = \frac{1}{csc\ \ \theta}$$

$$Sec\ \theta = \frac{1}{cos\ \ \theta} \qquad cos\ \theta = \frac{1}{sec\theta}$$

$$Cot\ \theta = \frac{1}{Tan\ \theta} \qquad Tan\ \theta = \frac{1}{cot\theta}$$

Identidades cocientes:

$$Tan\ \theta = \frac{sen\theta}{cos\theta} Cot\ \theta = \frac{cos\theta}{sen\theta}$$

Analizando el círculo unitario se puede demostrar fácilmente por Pitágoras que:

$$sen^2\theta + cos^2\ sen\theta = 1$$

Y si dividimos todo entre coseno cuadrado se tiene:

$$\frac{sen^2\theta}{cos^2\theta} + \frac{cos^2\theta}{cos^2\theta} = \frac{1}{cos^2\theta}$$

$$tan^2\theta + 1 = sec^2\theta$$

Ahora si se divide entre seno cuadrado se tiene:

$$\frac{sen^2\theta}{sen^2\theta} + \frac{cos^2\theta}{sen^2\theta} = \frac{1}{sen^2\theta}$$

$$1 + cot^2\theta = csc^2\theta$$

Identidades de co-funciones:

$$Sen\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = cos\ \theta cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = sen\ \theta$$

$$Tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = cot\ \theta cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = tan\ \theta$$

$$Sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = csc\ \theta csc\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = sec\ \theta$$

Identidades impar-par:

$$Sen\,(-x) = -\,sen(x) \qquad cos\,(-x) = cos(x) \qquad tan\,(-x) = -\,tan(x)$$

$$Csc\,(-x) = -\,csc\,(x) \qquad sec\,(-x) = sec\,(x) \qquad cot\,(-x) = -\,cot\,(x)$$

Identidades de ángulos dobles:

$$Sen\,2A = 2sen\,A\,cos\,A$$

$$Cos\,2A = cos^2 A - sen^2 A = 2cos^2 A - 1 = 1 - 2sen^2 A$$

$$Tan\,2A = \frac{2tan^2 A}{1 - tan^2 A}$$

Identidades de ángulos medios:

$$sen^2\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{1-cos A}{2}$$

$$cos^2\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{1+cos A}{2}$$

$$tan^2\frac{A}{2} = \frac{1-cos A}{1+cos A}$$

Identidades de producto de funciones:

$$Sen\,A\,cos\,B = \frac{sen(A+B) + sen(A-B)}{2}$$

$$Cos\,A\,sen\,B = \frac{sen(A+B) - sen(A-B)}{2}$$

$$Cos\,A\,cos\,B = \frac{cos(A+B) + cos(A-B)}{2}$$

$$Sen\,A\,sen\,B == \frac{cos(A-B) - cos(A+B)}{2}$$

Identidades de suma y diferencia de ángulos:

$$Sen\,(A+B) = sen\,A\,cos\,B + sen\,B\,cos\,A$$

$$Sen\,(A-B) = sen\,A\,cos\,B - sen\,B\,cos\,A$$

$$Cos\,(A-B) = cos\,A\,cos\,B + sen\,A\,sen\,B$$

$$Cos\,(A+B) = cos\,A\,cos\,B - sen\,A\,sen\,B$$

$$Tan\,(A+B) = \frac{tan\,A + tan\,B}{1 - tan\,A\,tan\,B}$$

$$Tan\,(A-B) = \frac{tan\,A - tan\,B}{1 + tan\,A\,tan\,B}$$

Ejemplo

Si $cos\,\theta = 0.5$ determine $sen\,(\theta - \frac{\pi}{2})$

$$Sen\,(\theta - \frac{\pi}{2}) = -\,sen\,(\frac{\pi}{2} - \theta) = -cos\,\theta = -\,0.5$$

Ejemplo

Simplificar la expresión $(sec\ \theta\ +\ tan\ \theta)(1-\ sen\ \theta)$

Entonces:

$$(Sec\ \theta + tan\theta)(1 - sen\theta) = (\frac{1}{cos\theta} + \frac{sen\theta}{cos\theta})(1\text{-}sen\theta)$$

$$= (\frac{(1 + sen\theta)(1 - sen\theta)}{cos\theta})$$

$$= \frac{1 - sen^2\theta}{cos\theta} = cos\theta$$

Ejemplo

Verificar la identidad $(\tan\theta - sec\theta)^{\,2} = \frac{1-sen\ \theta}{1+sen\theta}$

$$tan^2\theta - 2tan\theta sec\theta + sec^2\theta = \frac{1 - sen\ \theta}{1 + sen\theta}$$

$$\frac{sen^2\theta}{cos^2\theta} - \frac{2sen\theta}{cos^2\theta} + \frac{1}{cos^2\theta} = \left(\frac{1 - sen\theta}{1 + sen\theta}\right)\left(\frac{1 - sen\theta}{1 - sen\theta}\right)$$

$$\frac{sen^2\theta - 2sen\theta\ + 1}{cos^2\theta} = \frac{1 - 2sen\theta +\ sen^2\theta}{1 - sen^2\theta} = \frac{1 - 2sen\theta +\ sen^2\theta}{cos^2\theta}$$

6.4 Ejercicios

Verifique las siguientes identidades

1. $Sen\ x\ +\ cos\ x\ cot\ x\ =\ csc\ x$
2. $(cot\ x\ +\ csc\ x)\ (tan\ x - sen\ x)\ =\ sec\ x - cos\ x$
3. $\frac{(sec\ x+1)\ (sec\ x-1)}{sen^2\ \theta}\ =\ sec^2\theta$
4. $\frac{cos\ x}{1-sen\ x} - tan\ x = sec\ x$
5. $Csc\ \emptyset\ -\ sen\ \emptyset\ =\ cot\ \emptyset\ cos\ \emptyset$
6. $\frac{csc^2\ x}{1+tan^2x} =\ cot^2x$
7. $sec\ \propto\ - cos\ \propto\ = tan \propto sen \propto$
8. $\frac{sen\ \ \omega}{csc\ \omega}\ +\ \frac{cos\ \ \omega}{sec\omega} = 1$
9. $(1-\ sen^2\varphi)(\ 1+\ tan^2\varphi)\ =\ 1$
10. $tan\ x\ \ cot\ x =\ 1$

Utilice las identidades básicas para simplificar las expresiones

1. $Sen\ x\ csc\ (-x)$
2. $Sec\ (-x)\ cos\ (-\ x)$
3. $\frac{sen^2\emptyset + tan^2\emptyset + cos^2\emptyset}{sec\ \ \emptyset}$
4. $\frac{1+tan^2\ \emptyset}{csc\emptyset^2\ \emptyset}$
5. $Tan\ x\ cos\ x$
6. $\frac{1-cos^2x}{sen\ x}$
7. $Cot\ x\ tan\ x$
8. $Cot\ x\ sen\ x$

9. Dado el $sen\ x$ obtener las demás funciones trigonométricas (tan, cos, sec, csc, etc.)

10. Dado el $cos\ x$ obtener las demás funciones trigonométricas

Demuestre que:

1. $sen^4\theta - cos^4\theta = sen^2\theta + cos^2\theta$
2. $Tan\ x + cot\ x = sec\ x\ csc\ x$
3. $\frac{cot^2 x}{1+csc\ x} = csc\ x - 1$
4. $sen^2 x\ cos^5 x = (sen^2 x - 2sen^4 x + sen^6 x)(\cos x)$
5. $(\cos x)(\tan x + sen\ x \cot x) = sen\ x + cos^2 x$
6. $(\operatorname{sen} x)(\cot x + cos\ x \tan x) = cos\ x + sen^2 x$
7. $\tan x + \sec x = \frac{\cos x}{1-sen\ x}$
8. $\frac{\tan x}{\sec x - 1} = \frac{\sec x + 1}{\tan x}$
9. $\frac{1}{\tan x} + \tan x = \sec x \csc x$
10. $\frac{\cos x}{1+senx} = \frac{1-sen\ x}{\cos x}$

Ecuaciones trigonométricas.

Una ecuación trigonométrica es aquella que tiene incluido en sus términos funciones trigonométricas como seno, coseno, tangente y sus inversas.

La incógnita es el ángulo común de las funciones trigonométricas

Ejemplo:

$Sen\ x = ½$

$4\ sen\ x + cos\ x = 0$

$tan\ x - 1 = 0$

6.5 Ejercicios

Resuelva para $0 \leq x \leq 2\pi$

1. $\csc X + \cot X = \sqrt{3}$
2. $4 \cos 2X + 3 \cos X = 1$
3. $8 \tan X + \cos X = 1$
4. $\sin x = \frac{1}{2}$
5. $\cos x = \frac{1}{2}$
6. $4 \sin(x - 30) \cos(x - 3) = \sqrt{3}$
7. $3 \tan x = 1$
8. $\sin x + 3 \cos x = \sqrt{2}$
9. $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
10. $X = \cos^{-1} \frac{1}{2}$

Bibliografía:

- Acevedo M., Campos M., Jimenez L. & Leon B. (2006). ”*Elementos Iniciales de Matemáticas*”. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

- Leithold L. (1990). “*El Calculo con Geometría Analítica*”. Ed. Harla, 5ta. edición. Vol. 1.

- Lima E., Pinto P., Wagner E. & Morgado A. (1996). “*Matematica do Enseno Medio*”. Colecao do Profesores de Matematicas Soc. Brasilera de Matematicas. Rio de Janiero, Brazil Vol. 1.

- Zill D. & Dewar J. (2008). “*Pre-cálculo con Avances de Cálculo*”. Ed. Mc Graw Hill 4ta. Edición.